Gravitation : le problème des deux corps avec PSTricks partie 1

3 juillet 2012

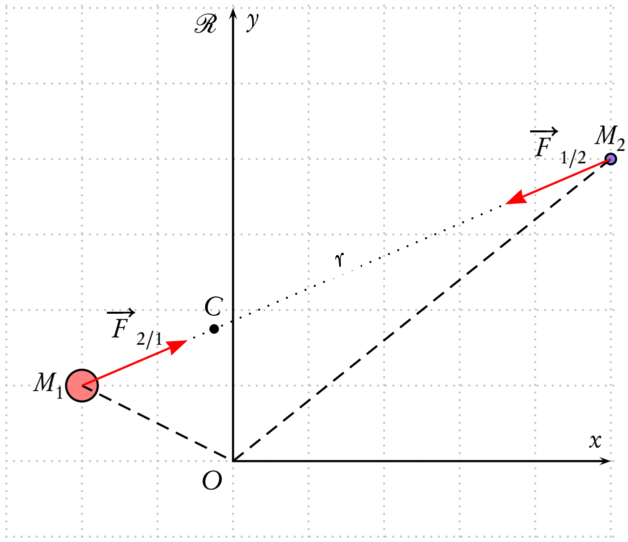
1 Présentation

Cette première partie aborde uniquement le problème théorique et l'établissement des relations et formules indispensables à la réalisation des figures avec 'PSTricks' et à l'animation avec le package 'animate'. Elle pourra donc sembler superflue à tous ceux qui connaissent bien ce problème classique. De très bons livres traitent le *problème des deux corps* de façon très claire comme celui de José-Philippe Pérez dans "*Mécanique*" aux éditions Masson ou celui publié par le CNES aux éditions CEPADUES : "*Le mouvement du satellite*" qui est, comme on s'en doute, très complet.

La deuxième partie détaillera la procédure suivie pour réaliser les schémas et les animations. Toutefois, on peut, dès à présent, avoir accès au code des figures dans le fichier source de ce document.

2 Étude théorique

On considère un système de deux corps en interaction gravitationnelle M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2 dans le repère galiléen *inertiel* $\mathscr{R}$. Ils sont supposés ponctuels.



On note $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$. M_2 subit de la part de M_1 une force attractive $\overrightarrow{F}_{1/2}$ et réciproquement M_1 subit de la part de M_2 une force attractive $\overrightarrow{F}_{2/1}$ telles que :

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = -\mathscr{G}\frac{m_1 m_2}{r^3}\overrightarrow{r} \qquad \overrightarrow{F}_{2/1} = +\mathscr{G}\frac{m_1 m_2}{r^3}\overrightarrow{r}$$

Bien sûr : $\overrightarrow{F}_{1/2} + \overrightarrow{F}_{2/1} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent, le centre de masse C du système $\{M_1, M_2\}$ est, dans le repère $\mathscr{R}$, soit immobile, soit en mouvement de translation rectiligne uniforme suivant les conditions initiales.

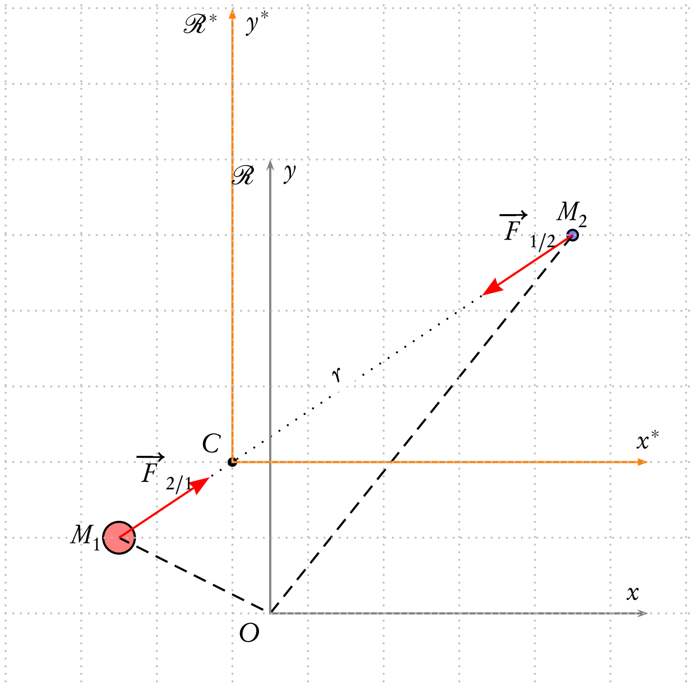
Dans $\mathscr{R}$ la position de C est déterminée par la relation :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\overrightarrow{v_{C/\mathscr{R}}} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2} = \overrightarrow{v_0} \tag{1}$$

$\overrightarrow{v_0}$ étant déterminé par les valeurs initiales de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. L'étude peut donc se poursuivre dans le repère lié au centre de masse $\mathscr{R}^*$, lui-même galiléen.

On pose : $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{CM_1}$ et $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{CM_2}$. On a toujours : $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$.



Dans le repère $\mathscr{R}^*$, la quantité de mouvement du système $\{M_1, M_2\}$ est nulle : $\overrightarrow{p}^* = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v}^*_C = \overrightarrow{0}$. Pour chacun des deux corps, la quantité de mouvement dans $\mathscr{R}^*$ est :

$$\overrightarrow{p}^*_1 = m_1\overrightarrow{v}^*_1 = m_1(\overrightarrow{v}_{1/\mathscr{R}} - \overrightarrow{v}_{C/\mathscr{R}}) = -\overrightarrow{p}^*_2$$

D'après (1) qui donne $\overrightarrow{v}_{C/\mathscr{R}}$, on obtient :

$$\overrightarrow{p}^*_1 = m_1\left(\overrightarrow{v}_{1/\mathscr{R}} - \frac{m_1\overrightarrow{v}_{1/\mathscr{R}} + m_2\overrightarrow{v}_{2/\mathscr{R}}}{m_1+m_2}\right) = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\overrightarrow{v}_{1/\mathscr{R}} - \overrightarrow{v}_{2/\mathscr{R}}) = -\overrightarrow{p}^*_2$$

Puisque, on a défini $\overrightarrow{r}$ par $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$, en posant $\mu\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$:

$$\overrightarrow{p}^*_1 = -\mu\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \overrightarrow{p}^*_2 = \mu\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$$

La quantité de mouvement de M_2 est identique à celle d'une particule fictive de masse μ, appelée *masse réduite*, et de vitesse $\overrightarrow{v}_{2/\mathscr{R}} - \overrightarrow{v}_{1/\mathscr{R}}$: vitesse relative de M_2 par rapport à M_1, idem pour M_1.

On considère cette particule fictive de masse μ située au point M tel que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{r}$.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à chacun des deux corps donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}^*_1}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{2/1} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}^*_2}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{1/2} \end{array}\right.$$

En remplaçant $\overrightarrow{p}^*_1$ (ou $\overrightarrow{p}^*_2$) par son expression en fonction de μ, on a :

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{1/2} = -\mathscr{G}\frac{m_1m_2}{r^3}\overrightarrow{r} \qquad (2)$$

Nous désignons cette force par $\overrightarrow{F}$. Remarquons qu'elle peut s'écrire, en notant la masse totale $(m_1 + m_2)$ du système $\{M_1, M_2\}$ par m_t :

$$\overrightarrow{F} = -\mathscr{G}\frac{\mu m_t}{r^3}\overrightarrow{r} \qquad (3)$$

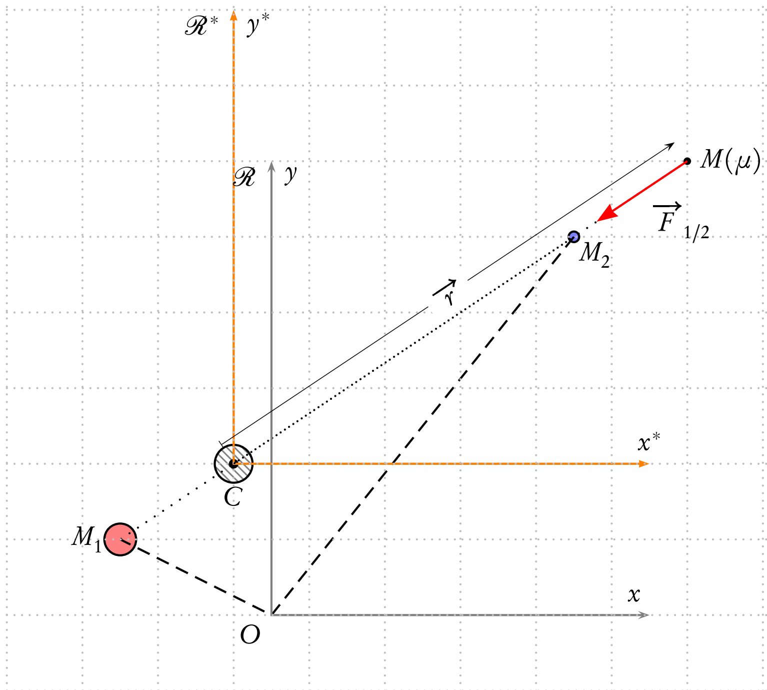
En conclusion, cette particule fictive M, de masse μ positionnée en $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{r}$ est attirée par un corps fictif de masse égale à la masse totale du système $(m_1 + m_2)$, placé en C. Sa position et sa vitesse initiales sont déterminées par les positions et vitesses initiales de M_1 et M_2.

$$\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{r}_{2_0} - \overrightarrow{r}_{1_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}^*_0 = \overrightarrow{v}_{0/R} = \overrightarrow{v}^*_{2_0} - \overrightarrow{v}^*_{1_0} = \overrightarrow{v}_{0_2/R} - \overrightarrow{v}_{0_1/R}$$

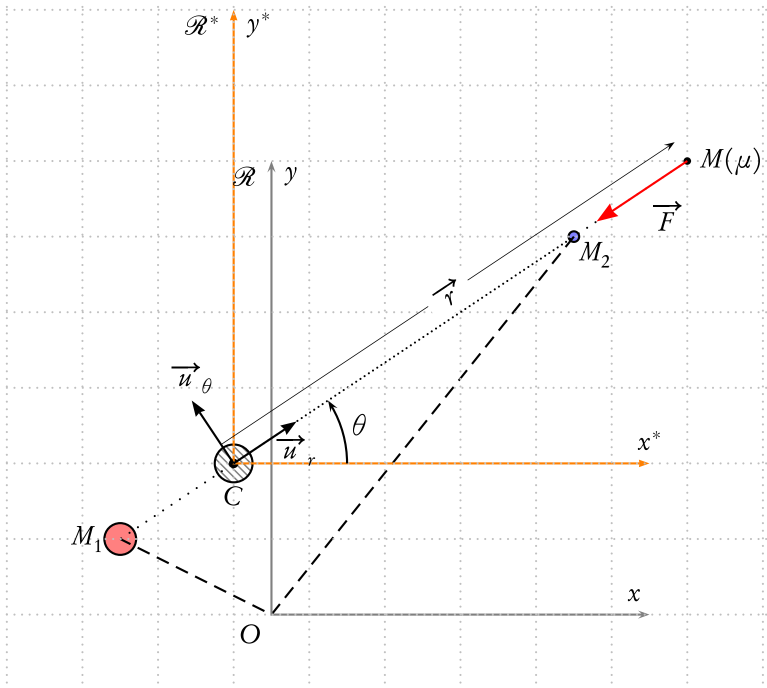
Si nous connaissons le mouvement de M nous pourrons en déduire les mouvements respectifs de M_1 et M_2, puisque d'après la définition du centre de masse :

$$\overrightarrow{r_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \tag{4}$$

Les trajectoires de M_1 et M_2 se déduiront de celle de M par une homothétie de centre C.



Pour étudier, dans $\mathscr{R}^*$, le mouvement de ce point matériel fictif M de masse (μ) soumis à la force centrale $\overrightarrow{F}$, il est avantageux de passer en coordonnées polaires.



Pour la suite, retenons que dans $\mathscr{R}^*$:

$$\overrightarrow{u}_r = \left| \begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u}_\theta = \left| \begin{array}{l} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right.$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\overrightarrow{u}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\overrightarrow{u}_r$$

Dans ce repère, la position de M et sa vitesse ont pour expressions respectives :

$$\overrightarrow{r} = r\,\overrightarrow{u}_r \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_r + r\dot\theta\,\overrightarrow{u}_\theta$$

l'accélération s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot r\,\overrightarrow{u}_r + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + r\ddot\theta\,\overrightarrow{u}_\theta - r\dot\theta^2\,\overrightarrow{u}_r \\ &= (\ddot r - r\dot\theta^2)\overrightarrow{u}_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\overrightarrow{u}_\theta \end{aligned}$$

En résumé :

$$\overrightarrow{v} = \left| \begin{array}{l} \dot r \\ r\dot\theta \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\gamma} = \left| \begin{array}{l} \ddot r - r\dot\theta^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\theta) \end{array} \right.$$

L'équation (2) nous donne, en divisant par μ, l'accélération :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\mathscr{G}\frac{m_t}{r^2}\overrightarrow{u}_r$$

Et puisque l'accélération radiale est nulle :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\theta) = 0$$

D'où :

$$r^2\dot\theta = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$$

Il est intéressant ici de calculer le moment cinétique de M et d'exprimer la loi des aires.

Le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{r} \wedge \mu\overrightarrow{v}$$

$\overrightarrow{F}$ étant dirigée vers C, son moment par rapport à C est nul. Le moment cinétique est donc constant. Il en découle que le mouvement est plan, puisque le vecteur-position $\overrightarrow{r}$ reste toujours perpendiculaire à un vecteur constant. Ce plan est le plan perpendiculaire à σ_0 contenant C.

On peut calculer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}$, à partir des coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\sigma} = \mu \left| \begin{array}{l} r \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} \dot r \\ r\dot\theta \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ r^2\dot\theta \end{array} \right. = \mu r^2\dot\theta\,\overrightarrow{u}_z$$

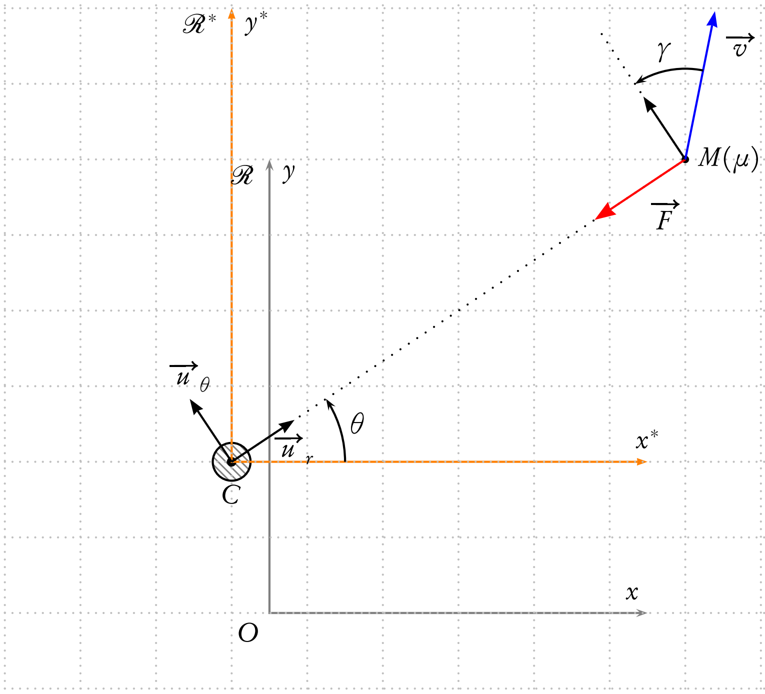
La constante des aires(voir plus loin pourquoi elle s'appelle ainsi) est $\mathrm{C} = \dfrac{\sigma}{\mu} = r^2\dot\theta$, c'est aussi la valeur du moment cinétique par unité de masse.

On peut aussi calculer le moment cinétique en coordonnées cartésiennes. Les conditions initiales étant fixées, $\overrightarrow{v}_0$ est donné par ses coordonnées, ainsi que $\overrightarrow{r}_0$.

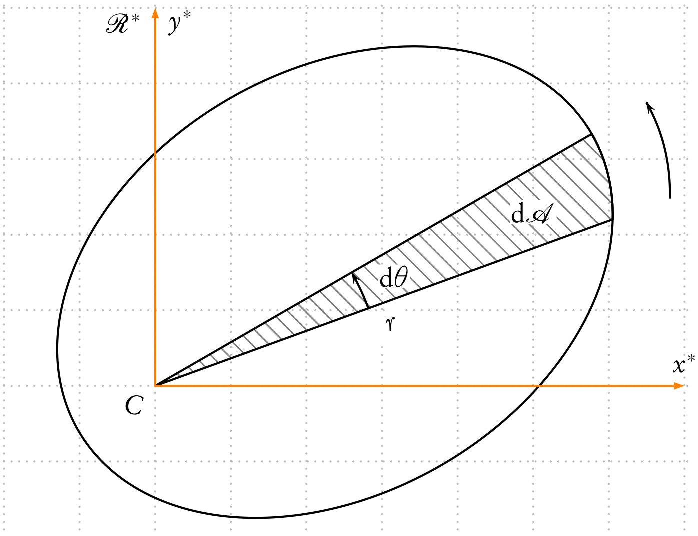
$$\overrightarrow{\sigma} = \mu \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ x_0 v_{y_0} - y_0 v_{x_0} \end{array} \right. = \mu(x_0 v_{y_0} - y_0 v_{x_0})\overrightarrow{u}_z$$

Les livres d'astronomie[1] préfèrent définir la vitesse par un autre paramètre γ, *angle de l'horizontale locale* $\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_r$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{u}_\theta$) *avec la vitesse*, en se plaçant toujours en coordonnées polaires.

[1] page 43 dans *Le mouvement du satellite* : conférences et exercices de mécanique spatiale. Cepadues-éditions 1983.



Dans ce cas, on peut exprimer la constante des aires par : $\mathrm{C} = r\,v\cos\gamma$



Géométriquement lorsque θ varie de $\mathrm{d}\theta$, la surface balayée par le rayon vecteur vaut :

$$\mathrm{d}\mathscr{A} = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

On définit ainsi la vitesse *aérolaire*, qui est l'aire balayée par unité de temps, en fonction de C :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{C}}{2}$$

On retrouve ainsi la deuxième loi de Képler.

Pour déterminer l'équation de la trajectoire, on utilise la méthode de Binet, qui consiste en un changement de variable en posant $u = \dfrac{1}{r}$.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Nous avons la constante des aires $\mathrm{C} = r^2\dot{\theta} = \dfrac{\dot{\theta}}{u^2}$, par conséquent :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

On remplace $\dot{\theta}$ par $\mathrm{C}u^2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{C}^2 u^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

Nous avons vu qu'en appliquant la loi de Newton, la composante de l'accélération γ suivant $\sqrt[n]{u}_r$ vaut :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{m_t}{r^2}$$

Ce qui s'écrit avec la variable u :

$$-\mathrm{C}^2 u^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} - \mathrm{C}^2 u^3 = -\mathcal{G} m_t u^2$$

Ce qui, après simplification, donne :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G} m_t}{\mathrm{C}^2}} \tag{5}$$

La solution générale de cette équation peut s'écrire :

$$u = A\cos(\theta - \varphi) + \frac{\mathcal{G} m_t}{\mathrm{C}^2}$$

A et φ sont fixés par les conditions initiales. Le rayon-vecteur a pour expression :

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \varphi) + \dfrac{\mathcal{G} m_t}{\mathrm{C}^2}}$$

Il s'écrit encore ainsi :

$$r = \frac{\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G} m_t}}{A\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G} m_t}\cos(\theta - \varphi) + 1}$$

Si on pose $p = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G} m_t}$ et $\mathrm{e} = Ap$, on reconnaît l'équation d'une conique dont l'un des foyers est C, de paramètre p et d'excentricité e.

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}} \tag{6}$$

Déterminons les constantes en fonction des conditions initiales.

Nous avons vu que la constante des aires C pouvait se calculer de deux façons suivant le choix fait pour définir la vitesse initiale, soit $\mathrm{C} = r_0 v_0 \cos\gamma_0$, soit $C = x_0 v_{y_0} - y_0 v_{x_0}$. Par conséquent p est bien déterminé.

Lorsque $\theta = \varphi$ alors $r = \dfrac{p}{1+\mathrm{e}}$, ce qui est la plus petite valeur possible de r. On est donc au périgée P de la conique, on note, en ce point, le rayon-vecteur par $\vec{r}_\mathrm{P}$. En ce point la vitesse $\vec{v}_\mathrm{P}$ est perpendiculaire à $\vec{r}_\mathrm{P}$ et la constante des aires peut s'écrire : $\mathrm{C} = r_\mathrm{P} v_\mathrm{P}$.

L'angle φ est l'inclinaison du grand axe de la conique avec Ox, plus précisément l'angle du rayon-vecteur au périgée, $\vec{r}_P$ avec Ox.

L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, elle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. En fonction des conditions initiales elle s'écrit(on rappelle que μ est la masse(*réduite*)) de la particule fictive M étudiée :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \mathcal{G}\frac{\mu(m_1 + m_2)}{r_0} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r_0}$$

Au périgée, elle s'exprimera par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu v_\mathrm{P}^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r_\mathrm{P}}$$

Pour exprimer l'énergie dans le cas général, calculons la vitesse en fonction de u. Rappelons que :

$$\overrightarrow{v} = \left| \begin{array}{l} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{array} \right.$$

Calculons séparément $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$r\dot{\theta} = \frac{1}{u}\mathrm{C}u^2 = \mathrm{C}u$$

$$v^2 = \mathrm{C}^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$$v^2 = \mathrm{C}^2\left[\frac{\mathrm{e}^2}{p^2}\sin^2(\theta-\varphi) + \frac{1}{p^2}\left[1 + 2\mathrm{e}\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{e}^2\cos^2(\theta-\varphi)\right]\right]$$

$$v^2 = \frac{\mathrm{C}^2}{p^2}\left[1 + 2\mathrm{e}\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{e}^2\right]$$

L'énergie cinétique s'exprime par :

$$E_C = \frac{1}{2}\mu\frac{\mathrm{C}^2}{p^2}\left[1 + 2\mathrm{e}\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{e}^2\right]$$

On se souvient que $p = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}m_t}$, il vient :

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}\mu m_t}{p}\left[1 + 2\mathrm{e}\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{e}^2\right]$$

Pour l'énergie potentielle nous avons :

$$E_p = -\frac{\mathcal{G}\mu m_t}{r} = -\frac{\mathcal{G}\mu m_t}{p}\left[1 + e\cos(\theta-\varphi)\right]$$

et pour l'énergie mécanique, nous obtenons après simplification :

$$\mathcal{E} = E_C + E_p = \frac{\mathcal{G}\mu m_t}{2p}(\mathrm{e}^2 - 1)$$

On en déduit l'excentricité :

$$\mathrm{e}^2 = \frac{2p\mathcal{E}}{\mathcal{G}\mu m_t} + 1 \Longrightarrow \mathrm{e} = \sqrt{\frac{2p\mathcal{E}}{\mathcal{G}\mu m_t} + 1}$$

On peut l'exprimer en fonction de la constante des aires en posant $K = \mathcal{G}m_t$ et en remplaçant p par $\dfrac{\mathrm{C}^2}{K}$:

$$\boxed{\mathrm{e} = \sqrt{\frac{2\mathrm{C}^2\mathcal{E}}{\mu K^2} + 1}} \tag{7}$$

Il reste à déterminer φ, c'est le problème le plus simple à résoudre.

$$r_0 = \frac{p}{1 + \mathrm{e}\cos(\theta_0 - \varphi)}$$

On en déduit :

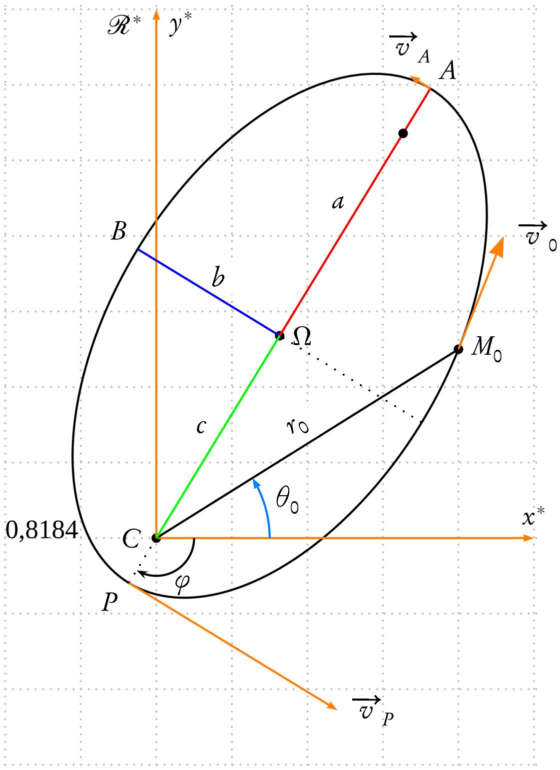
$$\boxed{\varphi = \theta_0 - \arccos\left[\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\frac{1}{\mathrm{e}}\right]} \tag{8}$$

On distingue trois cas :

- $\mathrm{e} < 1$ ou $\mathscr{E} < 0$: ellipse
- $\mathrm{e} = 1$ ou $\mathscr{E} = 0$: parabole
- $\mathrm{e} > 1$ ou $\mathscr{E} > 0$: hyperbole

Et on s'intéresse maintenant au mouvement elliptique. Les conditions initiales $(\overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{v}_0)$ doivent vérifier :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \mathscr{G}\frac{m_1 m_2}{r_0} < 0$$



L'un des foyers de l'ellipse est le centre attracteur C. L'autre est le symétrique de C par rapport à Ω.

Au périgée, le rayon-vecteur vaut : $r_P = \dfrac{p}{1+\mathrm{e}}$, à l'apogée $r_A = \dfrac{p}{1-\mathrm{e}}$.

Le demi-grand axe est égal à : $a = \dfrac{r_P + r_A}{2} = \dfrac{p}{1-\mathrm{e}^2}$.

La distance focale est égale à : $c = a - r_P = \dfrac{p\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^2} = a\mathrm{e}$.

Pour calculer le demi-petit axe de l'ellipse b, on peut rappeler que l'ellipse est lieu des points dont la somme des distances aux foyers est égale à $2a$. Au point B cette somme est égale à $2a$, par conséquent le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle $C\Omega B$ donne la valeur du demi-axe : $b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}$.

Rappelons que $\mathrm{e}^2 = \dfrac{2p\mathscr{E}}{\mathscr{G}\mu m_t} + 1$. On peut exprimer $\mathscr{E}$ en fonction de e :

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{G}\mu m_t}{2p}(\mathrm{e}^2 - 1) = -\frac{\mathscr{G}\mu m_t}{2a} \quad \text{ou} \quad \mathscr{E} = -\frac{\mathscr{G} m_1 m_2}{2a}$$

Pour le système $\{M_1, M_2\}$, son énergie s'exprime très simplement en fonction du grand axe de l'ellipse $2a$.

Calculons la vitesse tout au long de l'ellipse :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\mathscr{G}\mu m_t}{r} = -\frac{\mathscr{G}\mu m_t}{2a}$$

$$v^2 = \mathscr{G} m_t \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

On en déduit les vitesses au périgée et à l'apogée :

$$v_P = \sqrt{\frac{\mathscr{G} m_t}{p}}(1+\mathrm{e}) \qquad v_A = \sqrt{\frac{\mathscr{G} m_t}{p}}(1-\mathrm{e})$$

La vitesse est maximale au périgée et minimale à l'apogée.

La période de révolution se détermine à partir de la vitesse *aérolaire*. Cette vitesse vaut :

$$\mathcal{V} = \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{p\mathcal{G}m_t}}{2}$$

Sachant que surface de l'ellipse est $S = \pi a b$:

$$T = \frac{2\pi a b}{\sqrt{p\mathcal{G}m_t}}$$

On remplace b par $a\sqrt{(1-\mathrm{e}^2)}$ et p par $a(1-\mathrm{e}^2)$:

$$T = \frac{2\pi a^2\sqrt{(1-\mathrm{e}^2)}}{\sqrt{a(1-\mathrm{e}^2)\mathcal{G}m_t}} = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{a\mathcal{G}m_t}}$$

En élevant les deux membres au carré on retrouve la troisième loi de Képler :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_t}} \tag{9}$$

3 Le mouvement des 2 corps dans le repère du centre de masse

Nous avons vu (4), que les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de celle de M par une homothétie de centre C.

$$\overrightarrow{r_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}$$

Les trajectoires sont donc deux ellipses dont les caractéristiques, paramètre, demi-grand axe et demi-petit axe, se déduisent de l'ellipse de la particule de masse réduite dans le même rapport.

- Paramètre : $p_1 = p\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$.
- rayon-vecteur à l'apogée : $r_{A_1} = r_A\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$
- rayon-vecteur au périgée : $r_{P_1} = r_P\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$
- demi-grand axe : $a_1 = \dfrac{r_{A_1}+r_{P_1}}{2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dfrac{r_A+r_P}{2} = a\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$
- excentricité, on vérifie facilement qu'elle est inchangée : $\mathrm{e}_1 = \dfrac{r_{A_1}-r_{P_1}}{r_{A_1}+r_{P_1}} = \mathrm{e}$

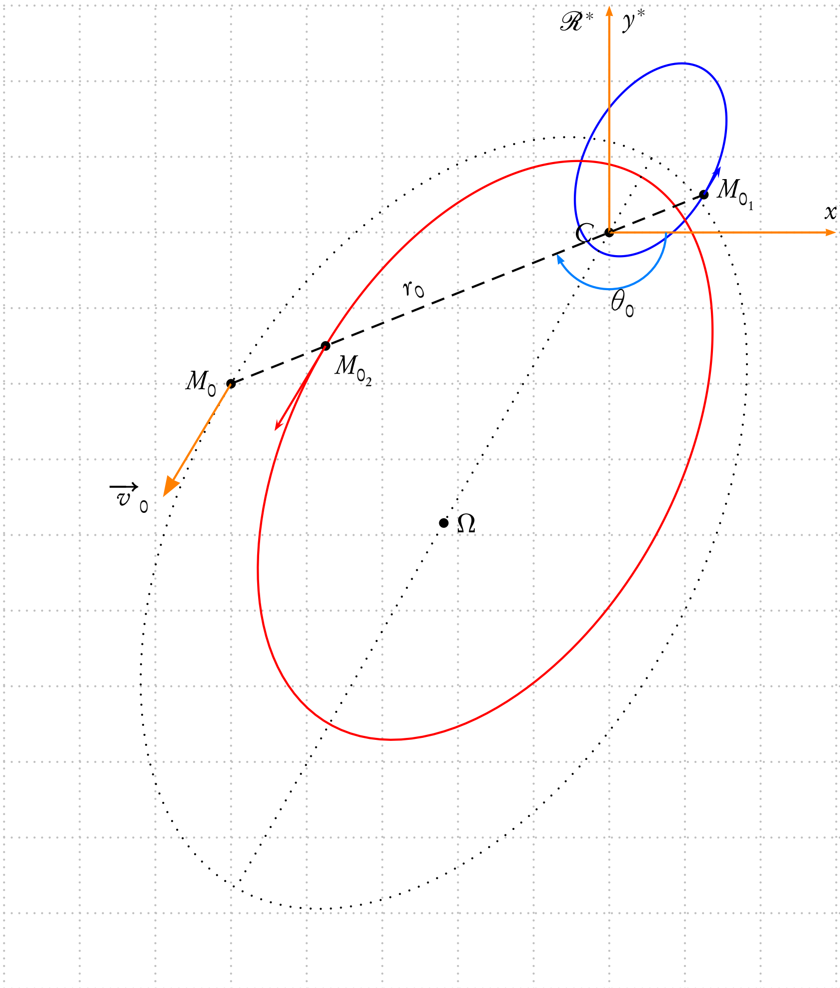
pour la deuxième :

- Paramètre : $p_2 = p\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$.
- rayon-vecteur à l'apogée : $r_{A_2} = r_A\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$
- rayon-vecteur au périgée : $r_{P_2} = r_P\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$
- demi-grand axe : $a_1 = \dfrac{r_{A_2}+r_{P_2}}{2} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dfrac{r_A+r_P}{2} = a\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$
- excentricité : $\mathrm{e}_2 = \dfrac{r_{A_2}-r_{P_2}}{r_{A_2}+r_{P_2}} = \mathrm{e}$

Leurs équations respectives s'écrivent :

$$r_1 = \frac{p_1}{1+e\cos(\theta-\varphi)} \qquad r_2 = \frac{p_2}{1+e\cos(\theta-\varphi)}$$

Dans l'exemple suivant $\{m_1 = 3, m_2 = 1\}$. Les vitesses initiales dans $\mathscr{R}^*$ sont indiquées par une flèche. La trajectoire de M_1 est en bleu, celle de M_2 en rouge et celle du point fictif est en pointillés.

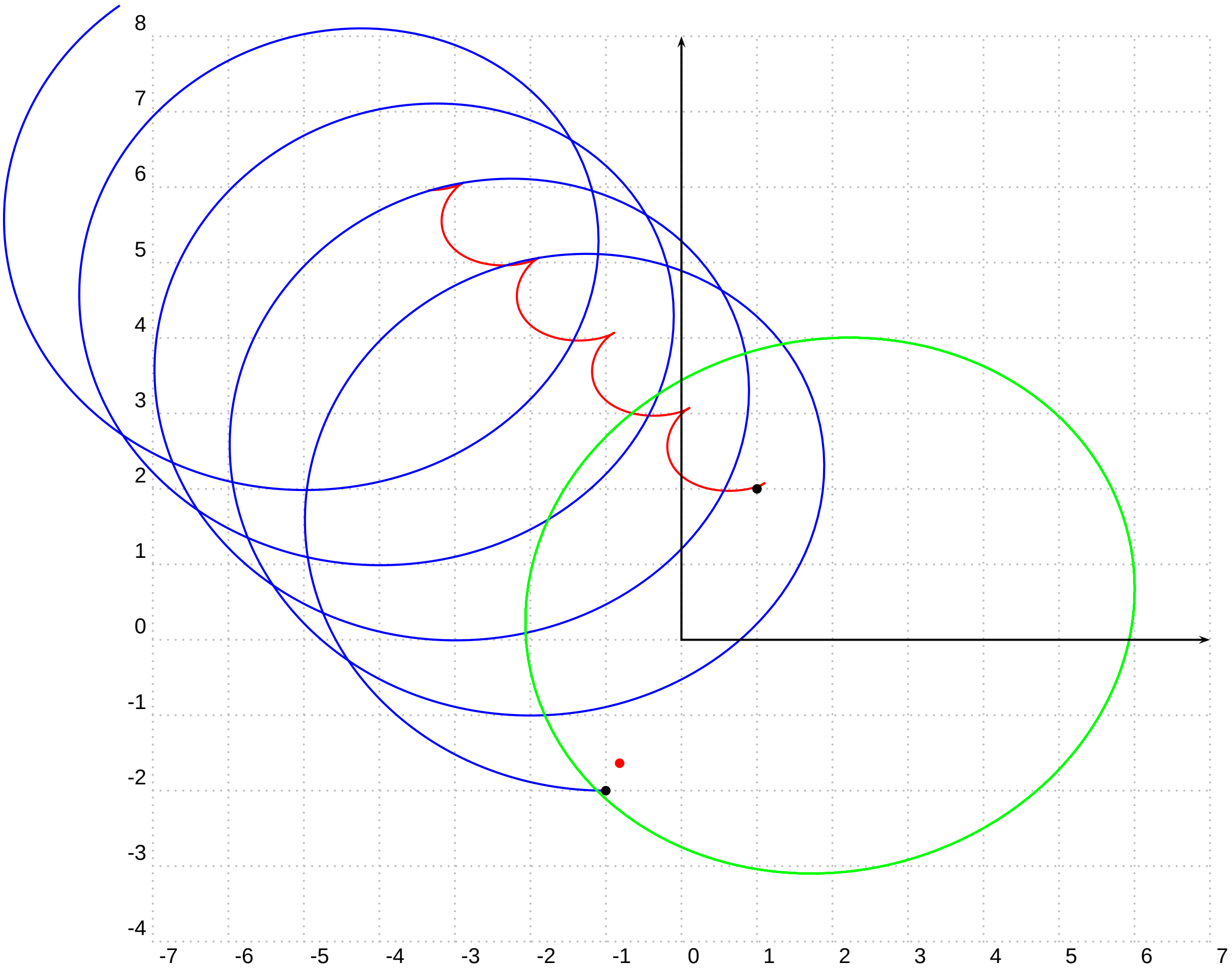


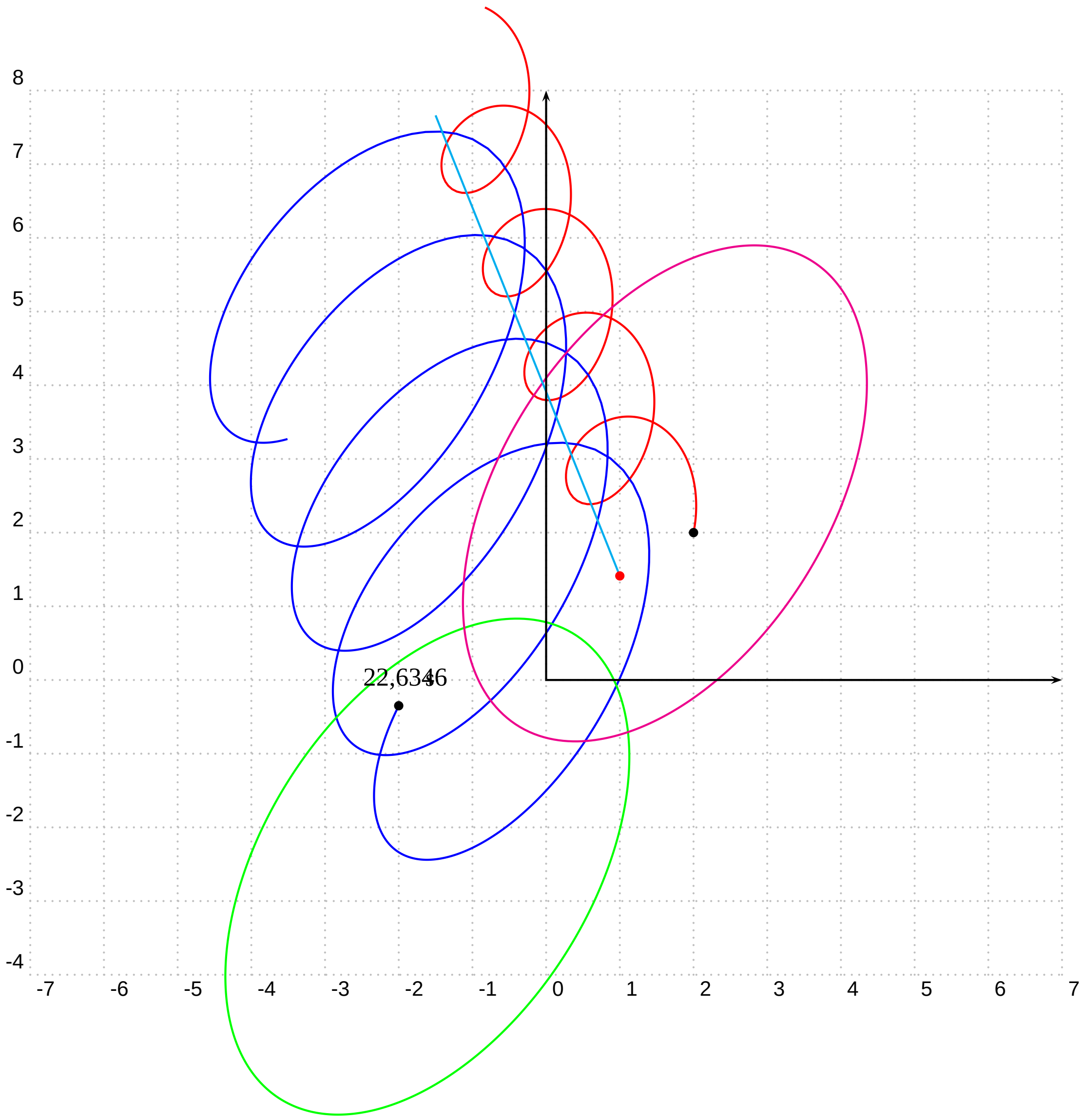
4 Exemples à développer, réalisés avec pst-eqdf

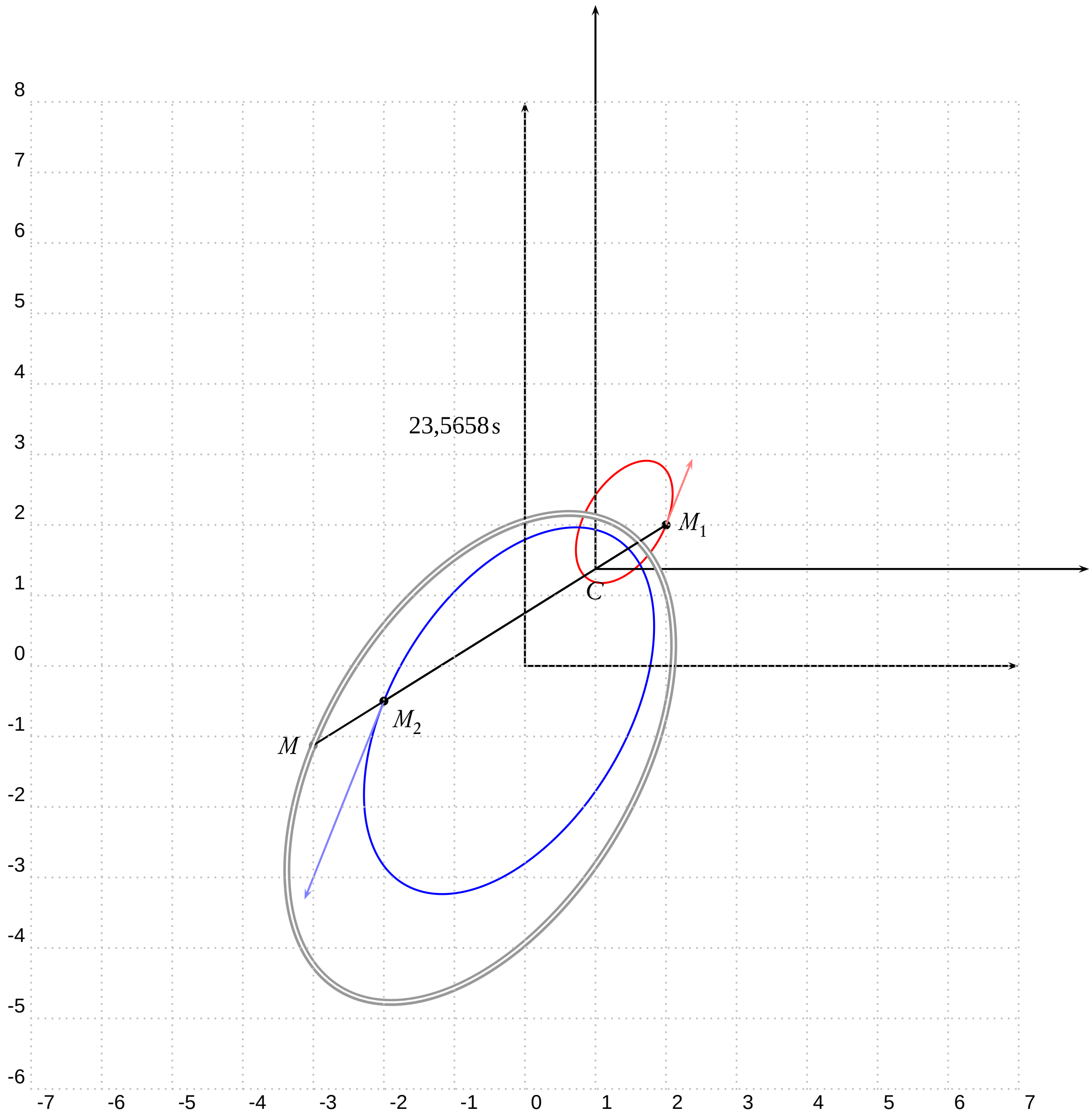
$$\mu\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\overrightarrow{r}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\overrightarrow{r}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -G\dfrac{m_1+m_2}{r^3}x \\ \ddot{y} = -G\dfrac{m_1+m_2}{r^3}y \end{cases}$$


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
22,6346


23,5658 s
M_1
M_2
M
C
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7