L'hodographe du mouvement d'un satellite

23 juin 2 012

On rappelle qu'en coordonnées polaires le vecteur-vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$$

$$\dot{r} = -\frac{p(-\mathrm{e}\dot{\theta}\sin(\theta-\theta_0)}{(1+\mathrm{e}\cos(\theta-\theta_0))^2} = \frac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\sin(\theta-\theta_0)$$

On peut exprimer v uniquement en fonction de θ :

$$\overrightarrow{v} = \frac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\sin(\theta-\theta_0)\overrightarrow{u_r} + \frac{r_0 v_0}{p}\Big(1+\mathrm{e}\cos(\theta-\theta_0)\Big)\overrightarrow{u_\theta}$$

Ses composantes dans la base $(\overrightarrow{u_r}, u_\theta)$ sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_r & = & \dfrac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\sin(\theta-\theta_0) \\ v_\theta & = & \dfrac{r_0 v_0}{p}\Big(1+\mathrm{e}\cos(\theta-\theta_0)\Big) \end{array}\right.$$

On repasse aux coordonnées cartésiennes par une rotation d'angle $(-\theta)$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \\ \dot{y} & = & v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{p}{r_0 v_0}\dot{x} & = & \mathrm{e}\sin(\theta-\theta_0)\cos\theta - \Big(1+\mathrm{e}\cos(\theta-\theta_0)\Big)\sin\theta \\ \dfrac{p}{r_0 v_0}\dot{y} & = & \mathrm{e}\sin(\theta-\theta_0)\sin\theta + \Big(1+\mathrm{e}\cos(\theta-\theta_0)\Big)\cos\theta \end{array}\right.$$

En utilisant les relations trigonométriques de soustraction :

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta) \qquad \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

On obtient :

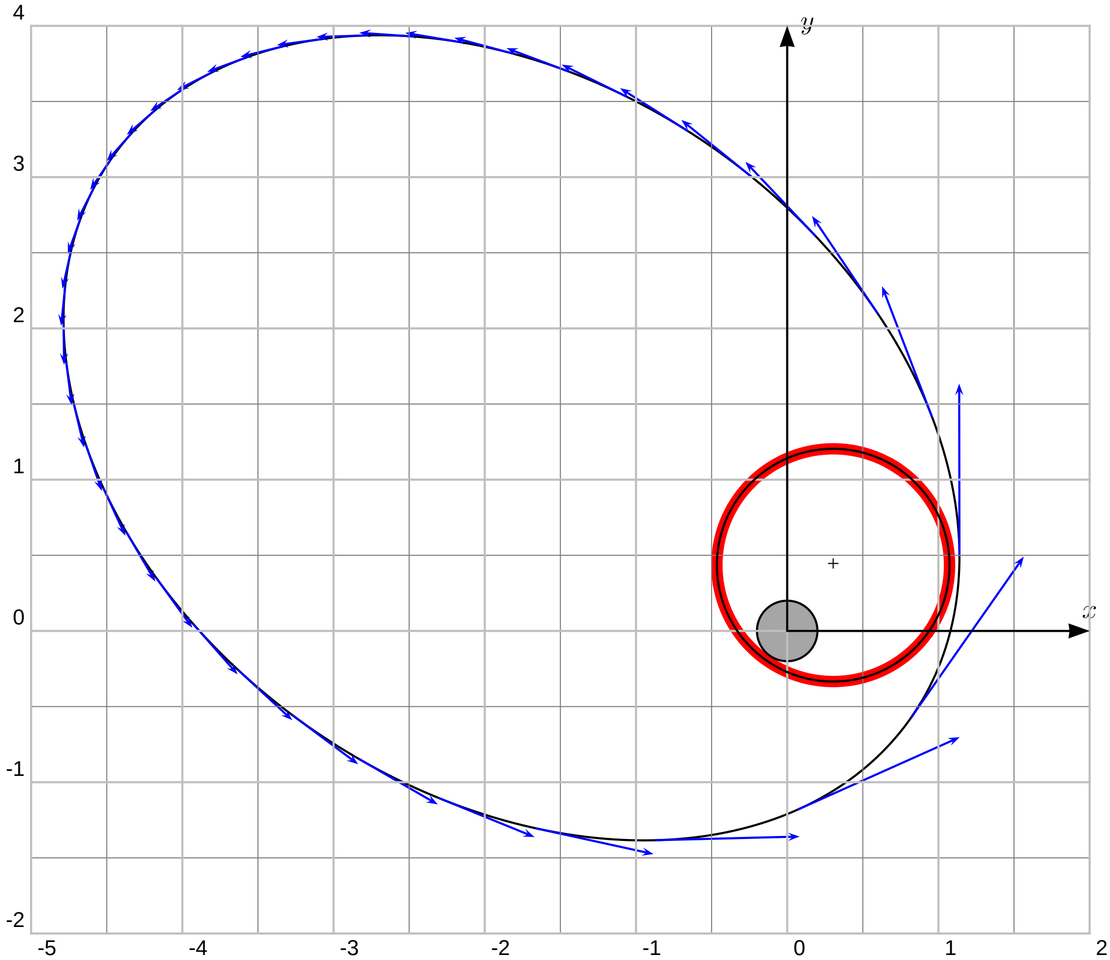
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{p}{r_0 v_0}\dot{x} & = & -\mathrm{e}\sin\theta_0 - \sin\theta \\ \dfrac{p}{r_0 v_0}\dot{y} & = & \mathrm{e}\cos\theta_0 + \cos\theta \end{array}\right.$$

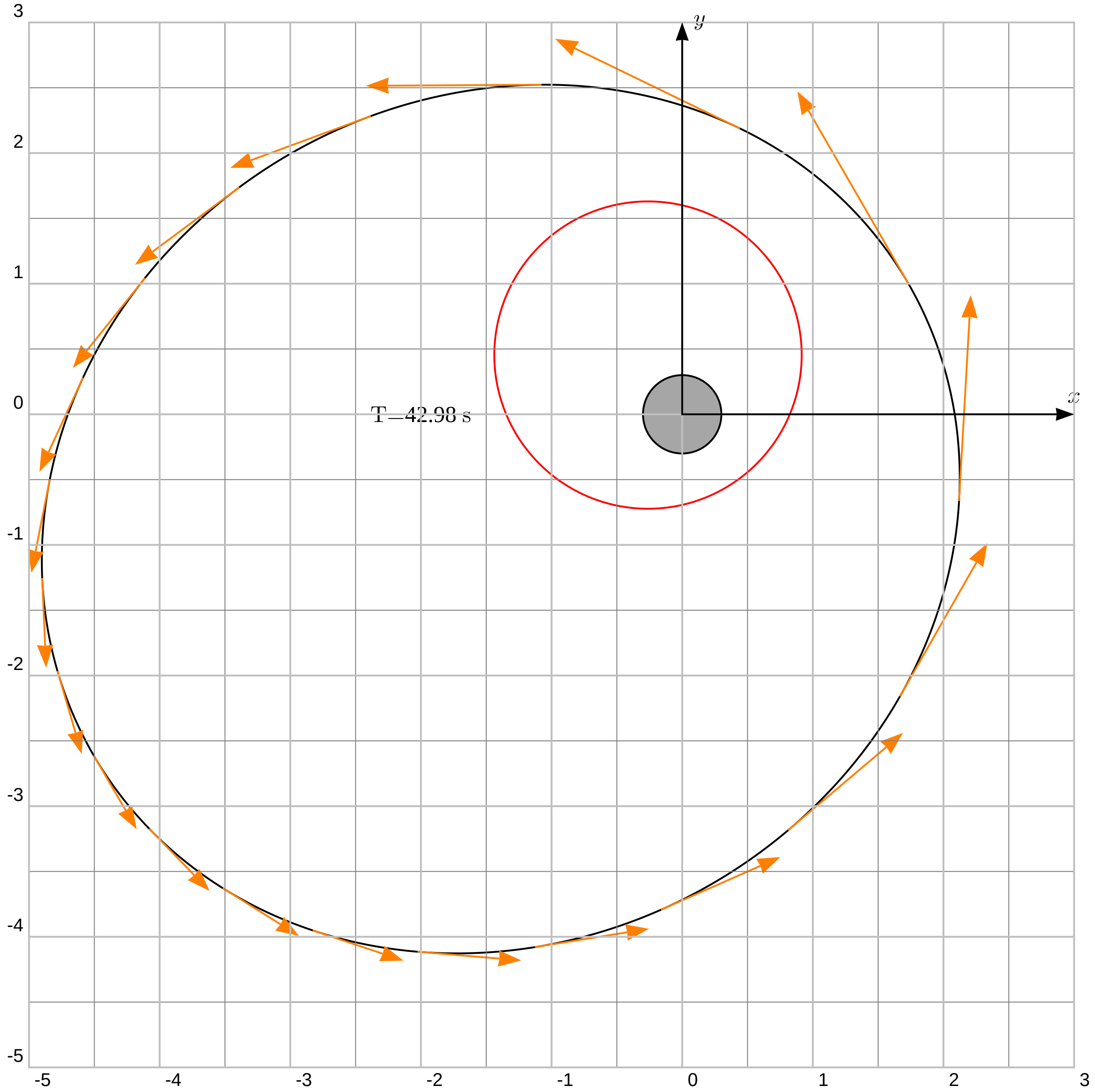
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} + \dfrac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\sin\theta_0 & = & -\dfrac{r_0 v_0}{p}\sin\theta \\ \dot{y} - \dfrac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\cos\theta_0 & = & \dfrac{r_0 v_0}{p}\cos\theta \end{array}\right.$$

L'équation de l'hodographe :

$$\left(\dot{x} + \frac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\sin\theta_0\right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\cos\theta_0\right)^2 = \left(\frac{r_0 v_0}{p}\right)^2$$

est celle d'un cercle centré en $\Big(\dfrac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\sin\theta_0, \dfrac{r_0 v_0}{p}\mathrm{e}\cos\theta_0\Big)$, de rayon $R = \dfrac{r_0 v_0}{p}$. Ce qu'on vérifie sur le graphe suivant : en rouge l'hodographe a été obtenu à partir de l'équation différentielle et en noir avec un trait plus fin par l'expression exacte de l'équation du cercle.


4
3
2
1
0
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
y
x



3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
y
x
T=42.98 s