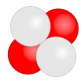
1 La découverte de la diffusion des particules α par le noyau d'or

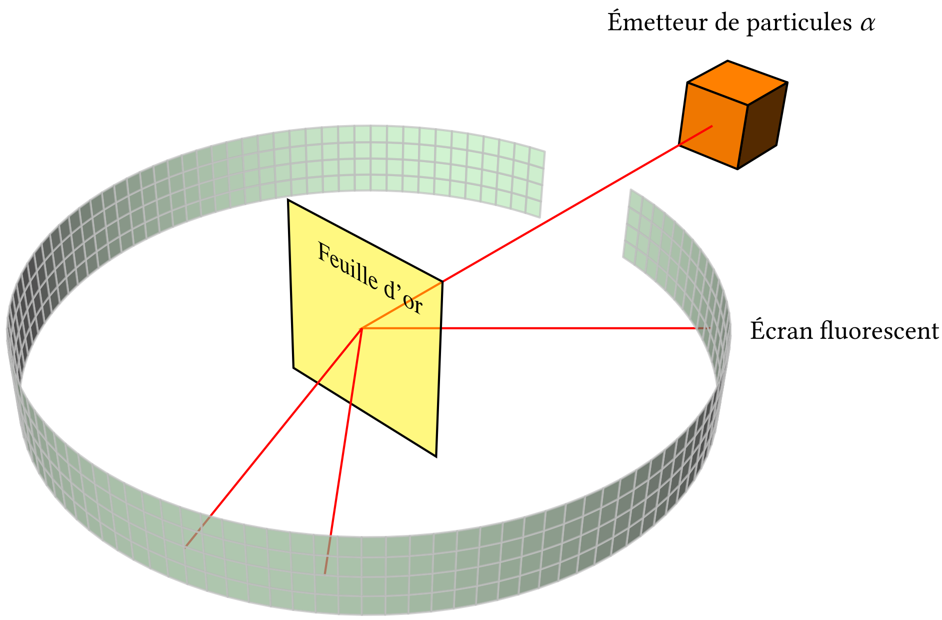
1.1 L'expérience d'Ernest Rutherford en 1909

Rutherford bombarde avec des particules α (noyau d'hélium : 2 neutrons et 2 protons) une mince feuille d'or.



$^{4}_{2}He^{2+}$

1.2 Montage expérimental



1.2.1 Observation

L'expérience est réalisée sous vide. De la matière radioactive émettant des particules α (noyaux d'hélium, He^{2+}) est placée dans une boîte et le faisceau de particule α est orienté en direction d'une fine feuille d'or (6000 Å). Derrière cette couche d'or, un écran est placé ; il est enrichi d'une substance chimique (sulfure de zinc: ZnS) permettant de visualiser, par un scintillement lumineux, la collision par les particules α.

Plusieurs minutes après la disposition du matériel, différents points lumineux apparaissent sur l'écran et ces points ne sont pas dans l'orientation du faisceau, mais étalés sur de grands angles.[1]

1.2.2 Interpretation

La majorité des particules α traversent la feuille d'or, sans être déviées mais une partie de ces particules, de l'ordre de 0,01 %, a été déviée. De cette expérience, nous pouvons déduire que la matière est une structure lacunaire. Elle est constituée essentiellement de vide c'est pour cela que la plupart des particules ne sont pas déviées. Il existe de même des îlots de charge positive qui repoussent les particules α. L'ordre de grandeur de ces îlots est très petit par rapport à l'atome (de l'ordre de 100 000 fois plus petit).

En fait, Rutherford a observé la diffusion inélastique en pensant que c'était la diffusion élastique. Le taux de diffusion élastique est supprimé par un facteur de forme qui prend en compte le mouvement du noyau comme un nuage positif (ou bien *pâte*). En plus, la transmission de l'énergie aux *noyaux* liés excite les atomes (diffusion inélastique). Seulement la somme de tous les différents événements (avec participation des voisins donc) crée l'image d'un noyau ponctuel.[2]

[1] *http://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience_de_Rutherford*
[2] *http://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience_de_Rutherford*

2 Le potentiel coulombien – donnant des trajectoires hyperboliques

Prenons un repère cartésien. La masse m_0 d'une particule α a pour coordonnés (x/y) et vitesse $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. La particule d'or est placée dans l'origine $O(0/0)$. Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance entre l'origine et la masse m_0.

L'enérgie cinétique a pour expression :

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

L'énergie potentielle coulombienne :

$$U(x, y) = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{dont} \quad k = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Le Lagrangien est :

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent : Pour x, $\dot{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= k \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_0 \dot{x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_0 \ddot{x} \end{aligned}$$

Alors

$$m_0 \ddot{x} - k \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} = 0$$

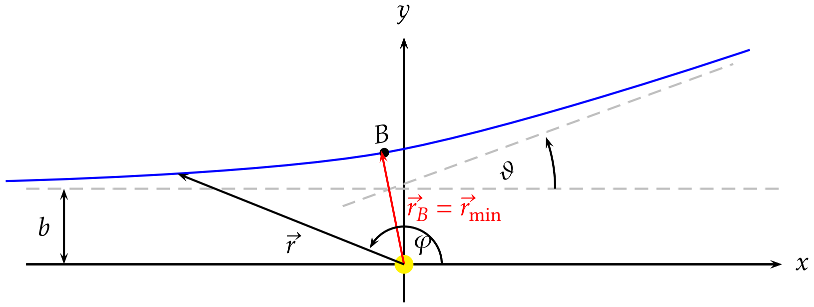
En divisant par m_0

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m_0} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}}$$

Le Lagrangien étant symétrique en x et y, alors :

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{k}{m_0} \frac{y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}}$$

3 La symétrie des trajectoires



Le vecteur $\vec{r}_B$ est l'axe de symétrie de la hyperbole

Prenons des coordonnées polaires avec les transformations usuelles :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Ça donne pour la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le moment cinétique :

$$\vec{L} = m_0 \vec{r} \times \vec{v} = m_0 \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Conservation du moment cinétique demande que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

autrement dit :

$$r^2\dot{\varphi} = \mathrm{cste} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} \cdot \mathrm{cste}$$

La transformation $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ se dérive par rapport au temps :

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

On peut déduire que $x\dot{y} - \dot{x}y$ est constante pour chaque temps t, alors aussi pour le temps $t_0 = 0$ (les conditions initiales) : $x = x_0$, $y = b$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{bv_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Prenons la composante y de la force coulombienne :

$$F_y = m_0\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2}\sin\varphi = -\frac{k}{bv_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin\varphi$$

Intégrant l'équation entre t_0 et t_E (presque infini)

$$m_0\int_{t_0}^{t_E}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{bv_0}\int_{t_0}^{t_E}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin\varphi\,\mathrm{d}t$$

Substitutions des limites de l'intégral :

$$m_0\int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_E)}\mathrm{d}v_y = -\frac{k}{bv_0}\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_E)}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Avec $v_y(t_0) = 0$, $v_y(t_E) = v_0\sin\vartheta$, $\varphi(t_0) = \pi$ et $\varphi(t_E) = \vartheta$

$$m_0 v_y\Big|_0^{v_0\sin\vartheta} = \frac{k}{bv_0}\cos\varphi\Big|_\pi^\vartheta$$

puis

$$m_0 v_0\sin\vartheta = \frac{k}{bv_0}(\cos\vartheta + 1)$$
$$b = \frac{k}{m_0 v_0^2}\frac{\cos\vartheta + 1}{\sin\vartheta} = \frac{k}{m_0 v_0^2}\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Nommons l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2}m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$b(\vartheta) = \frac{k}{2E_0}\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

4 La distance minimale entre le particule α et le noyau d'or

Le moment cinétique en point B, qui a la distance minimale $r_B = r_{\min}$ (là $\vec{r}_B \perp \vec{v}_B$) est

$$L_B = m_0 r_B v_B$$

Le moment cinétique initiale est $L_0 = m_0 b v_0$. La conservation du moment cinétique $L_B = L_0$ donne :

$$r_B = \frac{v_0}{v_B} b$$

Prenons encore l'intégrale de la force coulombienne en direction y, mais seulement au point B par le temps t_B :

$$m_0 \int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_B)} \mathrm{d}v_y = -\frac{k}{bv_0} \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_B)} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$

Avec $v_y(t_0) = 0$, $v_y(t_B) = v_B \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$, $\varphi(t_0) = \pi$ et $\varphi(t_B) = \frac{\pi+\vartheta}{2}$

$$m_0 v_y \Big|_0^{v_B \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{k}{bv_0} \cos\varphi \Big|_\pi^{\frac{\pi+\vartheta}{2}}$$

on reçoit

$$m_0 v_B \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{k}{bv_0}\left[\cos\left(\frac{\pi+\vartheta}{2}\right) + 1\right]$$

Avec la formule trigonométrique $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$:

$$v_B = \frac{k}{bm_0 v_0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Substituant $r_B = \frac{v_0}{v_B} b$ et avec l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$r_{\min} = r_B(\vartheta) = \frac{k}{2E_0} \frac{1 + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = b(\vartheta) \frac{1 + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

5 Point de retour

Soit $b = 0$, le particule α mouve directement vers le noyau d'or sur l'axe x et à une distance r_C du noyau d'or (point C) sa vitesse devient $v_C = 0$. Prenons la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{k}{r_C} + \frac{1}{2} m_0 \underbrace{v_C^2}_{=0}$$

Ça donne

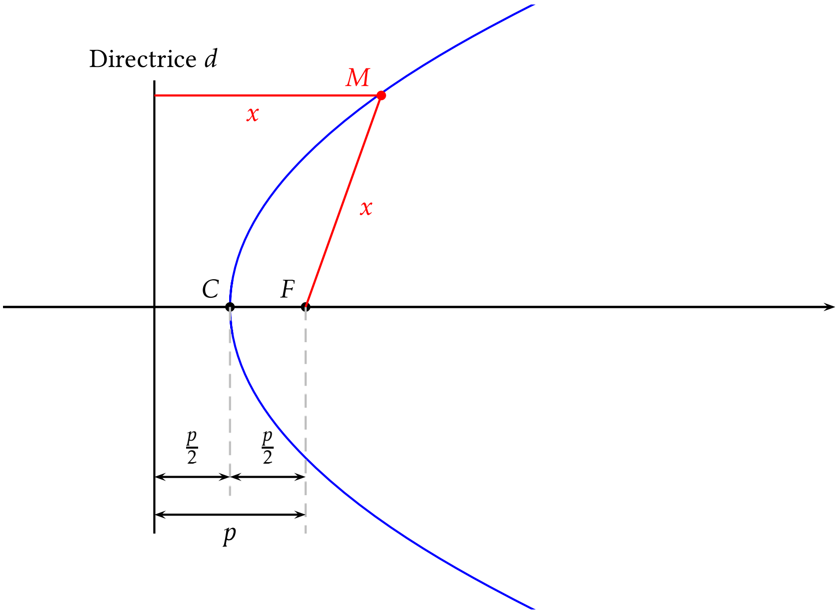
$$r_C = \frac{2k}{m_0 v_0^2}$$

et avec la notation de l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$r_C = \frac{k}{E_0}$$

6 L'enveloppe des trajectoires

La parabole est la courbe d'équidistance entre un point (le foyer F) et une droite (la directrice d).



Une parabole en nommation polaire :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

Le paramètre p est la distance du foyer F de la parabole à la directrice d.

L'enveloppe des trajectoires hyperboles est une parabole avec $p = 2r_C$:

$$r(\varphi) = \frac{2r_C}{1 - \cos\varphi}$$

7 Les trajectoires des particules α

Les paramètres suivants de l'expérience originale sont :

$$m_0 = 6{,}64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$
$$e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{kg\,m^3}}$$
$$Z_1 = 2$$
$$Z_2 = 79$$
$$v_{0x} = 2{,}1 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$