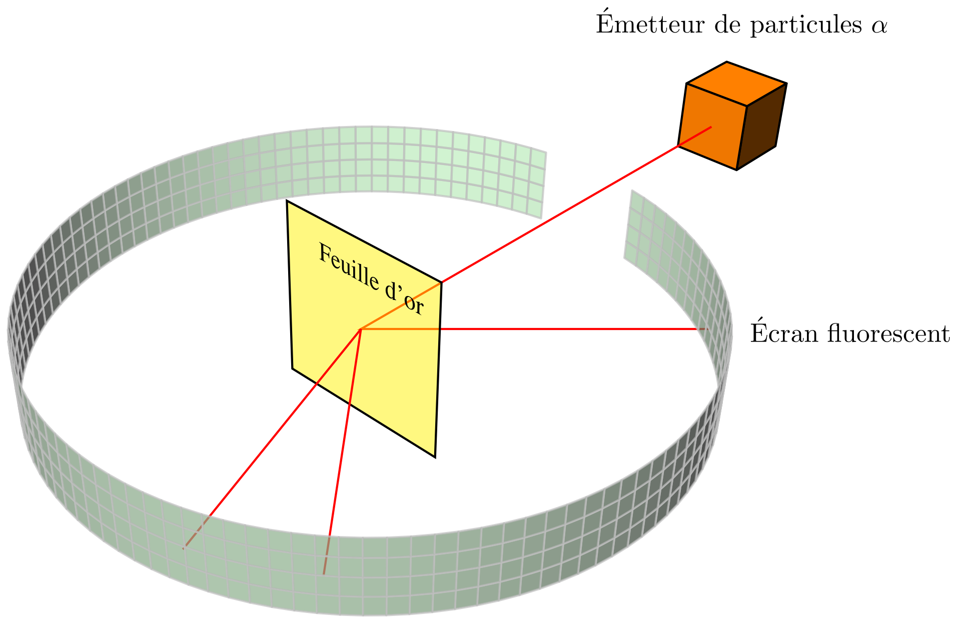
1 La découverte de la diffusion des particules α par le noyau d'or

1.1 L'expérience d'Ernest Rutherford en 1909

Rutherford bombarde avec des particules α (noyau d'hélium : 2 neutrons et 2 protons) une mince feuille d'or.

$^{4}_{2}He^{2+}$

1.2 Montage expérimental



2 Le potentiel coulombien – donnant des trajectoires hyperboliques

Prenons un repère cartésien. La masse m_0 d'une particule α a pour coordonnés (x/y) et vitesse $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. La particule d'or est placée dans l'origine $O(0/0)$. Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance entre l'origine et la masse m_0.

L'enérgie cinétique a pour expression :

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

L'énergie potentielle coulombienne :

$$U(x, y) = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{dont} \quad k = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Le Lagrangien est :

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent : Pour x, $\dot{x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = k \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \dot{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \ddot{x}$$

Alors

$$m_0\ddot{x} - k\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = 0$$

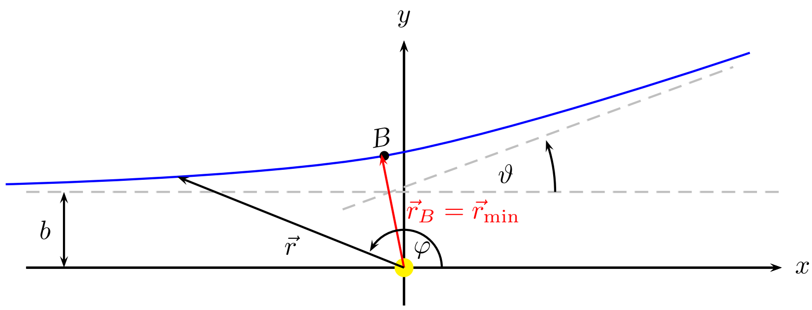
En divisant par m_0

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m_0}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}}$$

Le Lagrangien étant symétrique en x et y, alors :

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{k}{m_0}\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}}$$

3 La symétrie des trajectoires



Le vecteur $\vec{r}_B$ est l'axe de symétrie de la hyperbole

Prenons des coordonnées polaires avec les transformations usuelles :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Ça donne pour la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le moment cinétique :

$$\vec{L} = m_0\vec{r}\times\vec{v} = m_0\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = m_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Conservation du moment cinétique demande que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

autrement dit :

$$r^2\dot{\varphi} = \mathrm{cste} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}\cdot \mathrm{cste}$$

La transformation $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ se dérive par rapport au temps :

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

On peut déduire que $x\dot{y} - \dot{x}y$ est constante pour chaque temps t, alors aussi pour le temps $t_0 = 0$ (les conditions initiales) : $x = x_0$, $y = b$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{bv_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Prenons la composante y de la force coulombienne :

$$F_y = m_0 \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2} \sin\varphi = -\frac{k}{bv_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \sin\varphi$$

Intégrant l'équation entre t_0 et t_E (presque infini)

$$m_0 \int\limits_{t_0}^{t_E} \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{bv_0} \int\limits_{t_0}^{t_E} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \sin\varphi\,\mathrm{d}t$$

Substitutions des limites de l'intégral :

$$m_0 \int\limits_{v_y(t_0)}^{v_y(t_E)} \mathrm{d}v_y = -\frac{k}{bv_0} \int\limits_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_E)} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Avec $v_y(t_0) = 0$, $v_y(t_E) = v_0 \sin\vartheta$, $\varphi(t_0) = \pi$ et $\varphi(t_E) = \vartheta$

$$m_0 v_y \Big|_0^{v_0 \sin\vartheta} = \frac{k}{bv_0} \cos\varphi \Big|_\pi^\vartheta$$

puis

$$m_0 v_0 \sin\vartheta = \frac{k}{bv_0}(\cos\vartheta + 1)$$

$$b = \frac{k}{m_0 v_0^2} \frac{\cos\vartheta + 1}{\sin\vartheta} = \frac{k}{m_0 v_0^2} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Nommons l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$b(\vartheta) = \frac{k}{2E_0} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

4 La distance minimale entre le particule α et le noyau d'or

Le moment cinétique en point B, qui a la distance minimale $r_B = r_{\min}$ (là $\vec{r}_B \perp \vec{v}_B$) est

$$L_B = m_0 r_B v_B$$

Le moment cinétique initiale est $L_0 = m_0 b v_0$. La conservation du moment cinétique $L_B = L_0$ donne :

$$r_B = \frac{v_0}{v_B} b$$

Prenons encore l'intégrale de la force coulombienne en direction y, mais seulement au point B par le temps t_B :

$$m_0 \int\limits_{v_y(t_0)}^{v_y(t_B)} \mathrm{d}v_y = -\frac{k}{bv_0} \int\limits_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_B)} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Avec $v_y(t_0) = 0$, $v_y(t_B) = v_B \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$, $\varphi(t_0) = \pi$ et $\varphi(t_B) = \frac{\pi+\vartheta}{2}$

$$m_0 v_y \Big|_0^{v_B \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{k}{bv_0} \cos\varphi \Big|_\pi^{\frac{\pi+\vartheta}{2}}$$

on reçoit

$$m_0 v_B \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{k}{bv_0} \left[\cos\left(\frac{\pi+\vartheta}{2}\right) + 1\right]$$

Avec la formule trigonométrique $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$:

$$v_B = \frac{k}{bm_0 v_0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Substituant $r_B = \frac{v_0}{v_B} b$ et avec l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$r_{\min} = r_B(\vartheta) = \frac{k}{2E_0} \frac{1 + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = b(\vartheta) \frac{1 + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

5 Point de retour

Soit $b = 0$, le particule α mouve directement vers le noyau d'or sur l'axe x et à une distance r_C du noyau d'or (point C) sa vitesse devient $v_C = 0$. Prenons la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{k}{r_0} + \frac{1}{2}m_0 \underbrace{v_C^2}_{=0}$$

Ça donne

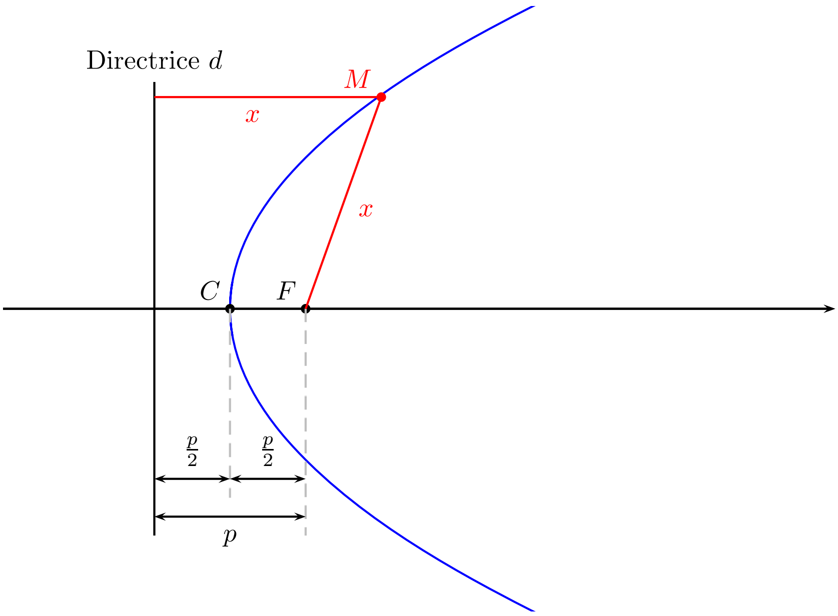
$$r_C = \frac{2k}{m_0 v_0^2}$$

et avec la notation de l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2}m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$r_C = \frac{k}{E_0}$$

6 L'enveloppe des trajectoires

La parabole est la courbe d'équidistance entre un point (le foyer F) et une droite (la directrice d).



Une parabole en nommation polaire :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

Le paramètre p est la distance du foyer F de la parabole à la directrice d.

L'enveloppe des trajectoires hyperboles est une parabole avec $p = 2r_C$:

$$r(\varphi) = \frac{2r_C}{1 - \cos\varphi}$$

7 Les trajectoires des particules α

Les paramètres suivants de l'expérience originale sont :

$$m_0 = 6,64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$
$$e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$
$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{kg\,m^3}}$$
$$Z_1 = 2$$
$$Z_2 = 79$$
$$v_{0x} = 2,1 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$