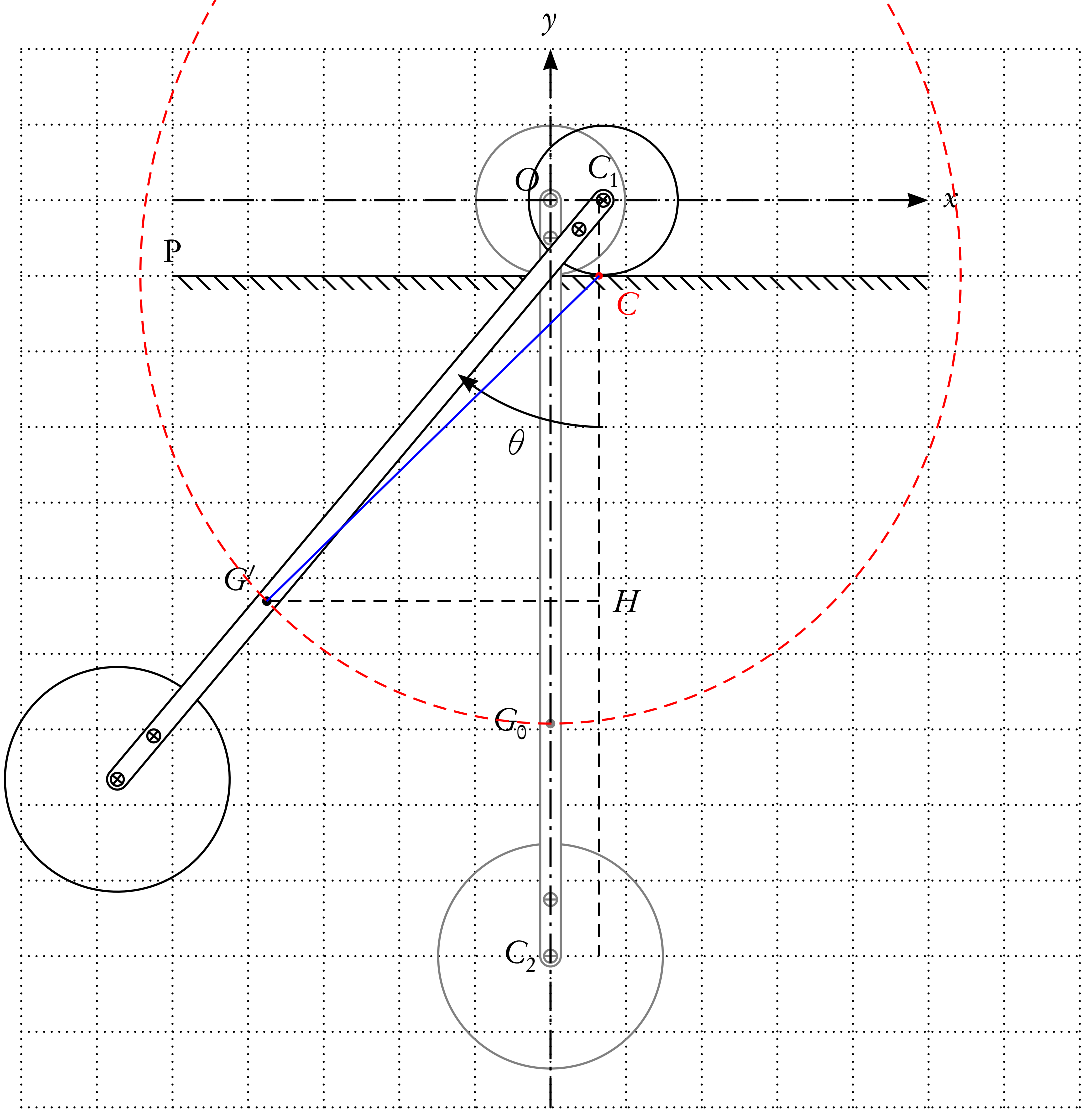
Pendule à couteau cylindrique roulant sur un plan fixe

22 mai 2 012



1 Équations du mouvement

On trouve ce pendule chez Henri Bouasse dans son livre “*Pendule spiral, diapason*”, tome 1, aux pages 100, 101 et 102[1].

« Le pendule est lié à un cylindre circulaire qui roule sans glisser sur un plan P fixe horizontal.

À chaque instant le pendule admet pour axe instantané de rotation, la génératrice C de tangence du cylindre avec le plan P.»

La méthode suivie par Henri Bouasse est intéressante car elle utilise le *rayon de giration*, qui me semble-t-il est un peu tombé en désuétude.

Le pendule est constitué d'une tige de masse négligeable et de longueur ℓ. Le cylindre de *roulement* de centre C_1, a un rayon r_1 et une masse m_1. La lentille du pendule est un cylindre de centre C_2, de rayon r_2 et de masse m_2. On pose $\ell = C_1C_2$.

Déterminons la position du centre d'inertie sur la tige :

$$\ell_1 = C_1G = \frac{m_2\ell}{m_1 + m_2}$$

Le roulement s'effectuant sans glissement, les coordonnées de G sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x_G & = & -r_1\theta + l_1 \sin\theta \\ y_G & = & -l_1 \cos\theta \end{array} \right.$$

G décrit une cycloïde *allongée*.

Moment d'inertie par rapport à G, on désigne par ρ le rayon de giration :

$$J_G = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + m_1l_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + m_2(l - l_1)^2 = (m_1 + m_2)\rho^2$$

$$\rho^2 = \frac{\frac{1}{2}m_1r_1^2 + m_1l_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + m_2(l - l_1)^2}{m_1 + m_2}$$

Soit θ l'angle de l'axe du pendule avec la verticale à un instant t et calculons CG'.

$$CG'^2 = l_1^2 + r_1^2 - 2r_1l_1\cos\theta$$

Le moment d'inertie par rapport à C vaut :

$$J_C = (m_1 + m_2)(\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2r_1l_1\cos\theta)$$

Henri Bouasse : « Nous pouvons considérer *pendant un instant* le point C comme immobile (axe instantané). Comme dans le roulement toutes les droites du solide

[1] Toutes les citations sont d'Henri Bouasse.

invariable tournent du même angle, la vitesse de rotation autour du point C est $\dot{\theta}$. »
D'où l'expression de l'énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_C = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathscr{E}_p = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta$$

Le roulement s'effectuant sans glissement, on peut appliquer la conservation de l'énergie. Le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et abandonné sans vitesse initiale.[2]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2 r_1 l_1 \cos\theta)\dot{\theta}^2 \\ -&(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_0 \end{aligned}$$

Pour le prochain calcul de la période retenons, après simplification :

$$(m_1 + m_2)(\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2 r_1 l_1 \cos\theta) = 2(m_1 + m_2) g l_1 (\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{1}$$

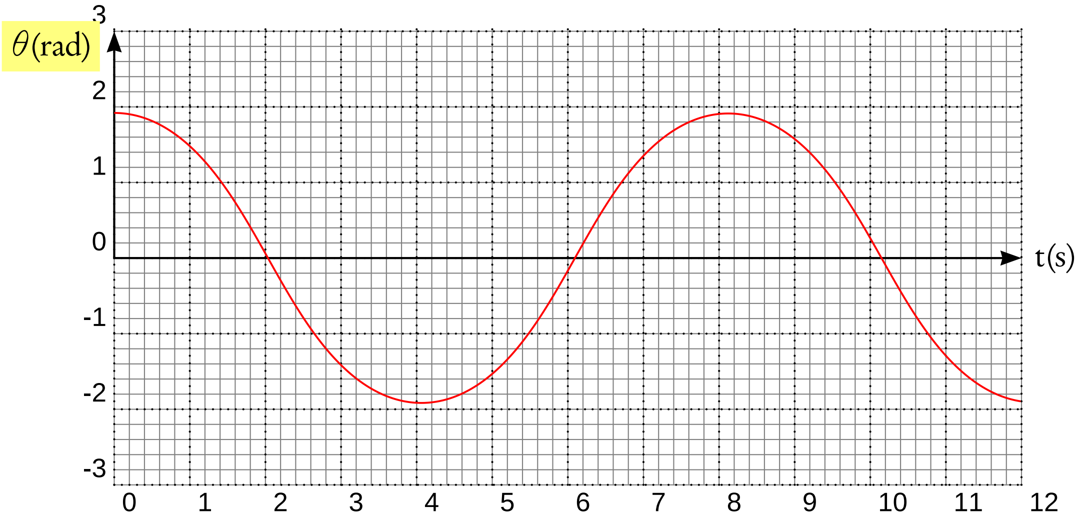
Écrivons que la dérivée par rapport au temps de l'énergie est nulle et simplifions :

$$0 = (\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2 r_1 l_1 \cos\theta)\ddot{\theta} + r_1 l_1 \sin\theta \dot{\theta}^2 + g l_1 \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{(r_1 \dot{\theta}^2 + g) l_1 \sin\theta}{\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2 r_1 l_1 \cos\theta} \tag{2}$$

[2]« On remarquera qu'il doit nécessairement exister une réaction tangentielle X du support. Si le frottement était nul, le pendule ne roulerait pas : il se déplacerait en bloc dès que la droite joignant le point de contact au centre d'inertie cesserait d'être verticale. Mais le mouvement étant un pur roulement, la force X ne travaille pas. »

Henri Bouasse : "*Pendule spiral, diapason*", tome 1, page 102.



2 Calcul de la période :

De l'équation (1), on déduit :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2gl_1(\cos\theta - \cos\theta_0)}{\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2r_1l_1\cos\theta}}$$

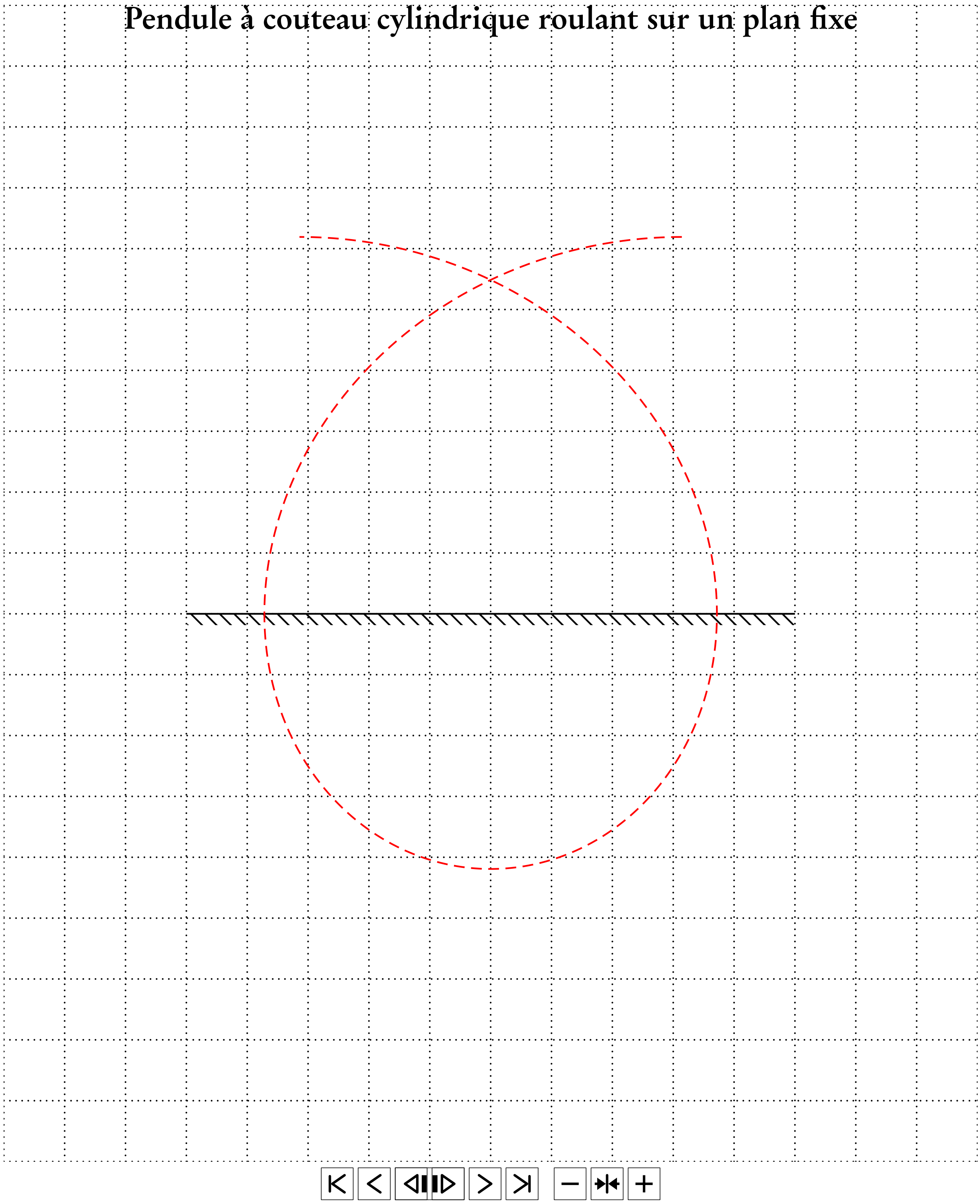
$$T = 4\int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{(\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2r_1l_1\cos\theta)}{2gl_1(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

T=8,10553 s

C'est une période très grande, mais le pendule théorique étudié a des proportions gigantesques !

```
/theta0 110 deg2rad def % en radians
/r1 1 def % rayon du cylindre couteau en m
/r2 1.5 def % rayon de la lentille du pendule en m
/L0 10 def % longueur du pendule en m
/m1 1 def % masse du cylindre couteau en kg
/m2 2.25 def % masse de la lentille en kg
```

3 Animation



4 Les macros PStricks utilisées

\psRK permet la résolution numérique de l'équation différentielle (2). Elle calcule un tableau de valeurs stockées dans la variable postscript `tabTheta` : $[\ldots t_i\ \theta_i\ \ldots]$ qui permet d'une part de tracer le graphe $\theta = f(t)$ et d'autre part de dessiner le pendule à une date quelconque. Il permet ainsi simuler les oscillations en temps réel. `\psRK[options](borne_inf,borne_sup){fonction}`. Pour la précision, le pas est calculée à partir du nombre de points choisis : `plotpoints`.

```
\def\thetapendule{-((r1*l1*y1^2+G*l1)*sin(y0))/(rho+l1^2+r1^2-2*r1*l1*cos(y0))}%
\pstVerb{
    /Pi 3.1415926 def
    /deg2rad {180 div Pi mul} def
    /rad2deg {180 mul Pi div} def
    /G 9.8 def
    /theta0 110 deg2rad def % en radians
    /thetapoint0 0 def
    /r1 1 def % rayon du cylindre couteau
    /r2 1.5 def % rayon de la lentille du pendule
    /L0 10 def % O1O2 du pendule
    /m1 1 def % masse du cylindre couteau
    /m2 2.25 def % masse de lentille
    /l1 m2 L0 mul m1 m2 add div def % O1G distance de O1 au centre de gravité
    /l2 L0 l1 sub def % O2G
    /JG m1 r1 dup mul mul 0.5 mul m2 r2 dup mul mul 0.5 mul add
        m1 l1 dup mul mul m2 l2 dup mul mul add add def % J/G
    /rho JG m1 m2 add div def % rayon de giration au carré
     }%
\psRK[algebraic,plotpoints=1000](0,12){\thetapendule}%
\listplot[linecolor=red,linewidth=0.025]{tabTheta aload pop}%
```

\psInt permet de le calcul d'une intégrale, elle est employée pour calculer la période des oscillations (3). `\psInt[options](borne_inf,borne_sup){fonction}`.

```
\def\periode{4*sqrt((rho+l1^2+r1^2-2*r1*l1*cos(t))/(2*G*l1*abs((cos(t)-costheta0))
\pstVerb{
    /Pi 3.1415926 def
    /deg2rad {180 div Pi mul} def
    /rad2deg {180 mul Pi div} def
    /G 9.8 def
    /theta0 110 deg2rad def % en radians
```

```
    /costheta0 110 cos def
    /thetai theta0 0.99999 mul def
    /thetapoint0 0 def
    /r1 1 def % rayon du cylindre couteau
    /r2 1.5 def % rayon de la lentille du pendule
    /L0 10 def % O1O2 du pendule
    /m1 1 def % masse du cylindre couteau
    /m2 2.25 def % masse de lentille
    /l1 m2 L0 mul m1 m2 add div def % O1G distance de O1 au centre de gravité
    /l2 L0 l1 sub def % O2G
    /JG m1 r1 dup mul mul 0.5 mul m2 r2 dup mul mul 0.5 mul add
        m1 l1 dup mul mul m2 l2 dup mul mul add add def % J/G
    /rho JG m1 m2 add div def % rayon de giration au carré
     }%
\psInt[algebraic](0,thetai){\periode}
\rput(0,0){T=\psPrintValue{I}\hphantom{000000}s}
```

5 Une deuxième méthode

Henri Bouasse propose une autre méthode pour trouver l'équation différentielle (2) du mouvement.

On rappelle que les coordonnées de G vérifient :

$$\begin{cases} x &= -r_1\theta + l_1 \sin\theta \\ y &= -l_1 \cos\theta \end{cases}$$

Les composantes tangentielle et normale de la réaction du support $\overrightarrow{R}$ sont notées X et Y. En premier, on applique le théorème du centre d'inertie (relation fondamentale de la dynamique en considérant que toutes les forces sont appliquées au centre d'inertie). Notons : $m = m_1 + m_2$, la masse totale du pendule.

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t^2} = m\overrightarrow{\mathrm{g}} + \overrightarrow{R}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \ddot{\theta}(-r_1 + l_1\cos\theta) - l_1\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} &= l_1\ddot{\theta}\sin\theta + l_1\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

En projection sur les axes, le théorème de centre d'inertie nous donne :

$$\begin{cases} m\ddot{\theta}(-r_1 + l_1\cos\theta) - ml_1\dot{\theta}^2\sin\theta &= X \\ ml_1\ddot{\theta}\sin\theta + ml_1\dot{\theta}^2\cos\theta &= Y - m\mathrm{g} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X &= m\Big(\ddot{\theta}(-r_1 + l_1\cos\theta) - l_1\dot{\theta}^2\sin\theta\Big) \\ Y &= m\Big(l_1\ddot{\theta}\sin\theta + l_1\dot{\theta}^2\cos\theta + \mathrm{g}\Big) \end{cases}$$

Dans une deuxième étape, on applique le théorème du moment cinétique au centre d'inertie G :

$$m\rho^2\ddot{\theta} = -X(l_1\cos\theta - r_1) - Y l_1\sin\theta$$

Remplaçons X et Y par leurs expressions respectives et simplifions par m :

$$\rho^2\ddot{\theta} = -\Big(\ddot{\theta}(-r_1 + l_1\cos\theta) - l_1\dot{\theta}^2\sin\theta\Big)(l_1\cos\theta - r_1) - (l_1\ddot{\theta}\sin\theta + l_1\dot{\theta}^2\cos\theta + \mathrm{g})l_1\sin\theta$$

Après développement et simplification, on retrouve bien, l'expression de $\ddot{\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{(r_1\dot{\theta}^2 + \mathrm{g})l_1\sin\theta}{\rho^2 + l_1^2 + r_1^2 - 2r_1 l_1\cos\theta}}$$