Collège François RABELAIS POITIERS

Démonstration du théorème de Thalès. (Niveau 4^e, 3^e , 2^{nde})

JACQUES MAROT
jacques.marot@wanadoo.fr

12 février 2002

Il est possible de démontrer le théorème de Thalès dans un un triangle, d'une manière abordable à partir du niveau 4^e, Il suffit pour cela de savoir calculer l'aire d'un triangle. C'est ce que nous vous proposons de découvrir dans ce document.

Collège François RABELAIS POITIERS

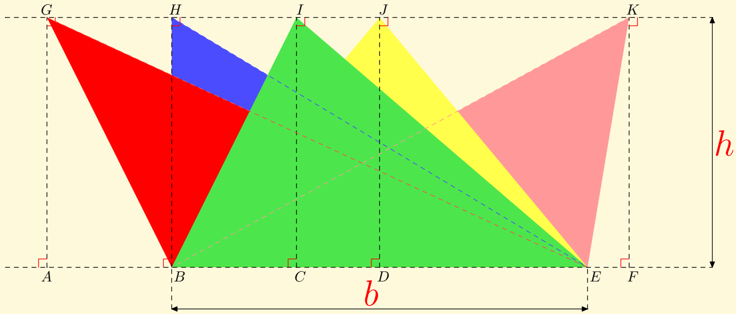
Aire d'un triangle
Cas particulier, toutes...
Vers le cas général, la...
Cas général

Page d'accueil
Page de Titre
Page 2 de 14
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

1. Aire d'un triangle

Rappellons que les éléments nécessaires pour calculer l'aire d'un triangle sont :

- la mesure de l'un des 3 côtés du triangle que nous appellerons base.
- la mesure de la hauteur relative à ce côté pris pour base.

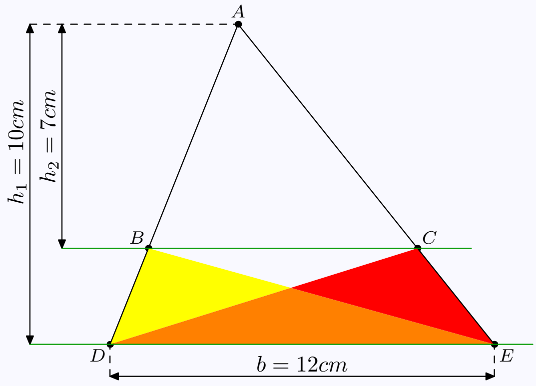


Les triangles BEG en rouge, BEH en bleu, BEI en vert, BEJ en jaune ou BEK en rose admettent tous $[BE]$ pour base, nous désignerons la mesure de ce segment par b.

Les points G, H, I, J et K étant tous situés sur sur une même parallèle à (BE), la mesure des hauteurs relative à cette base est la même pour tous ces triangles ; désignons cette mesure par h.

Ces 5 triangles ont donc tous la même aire : $\dfrac{b \times h}{2}$

2. Cas particulier, toutes les mesures sont connues



- $(BC) /\!/ (DE)$,
- la hauteur du triangle ADE relative au côté $[DE]$ mesure $10\,cm$
- les hauteurs relatives au côté $[DE]$ des triangles BED jaune ou CED en rouge ont la même mesure : $10\,cm - 7cm = 3\,cm$.
- la mesure de la base $[DE]$ est $b = 12\,cm$.

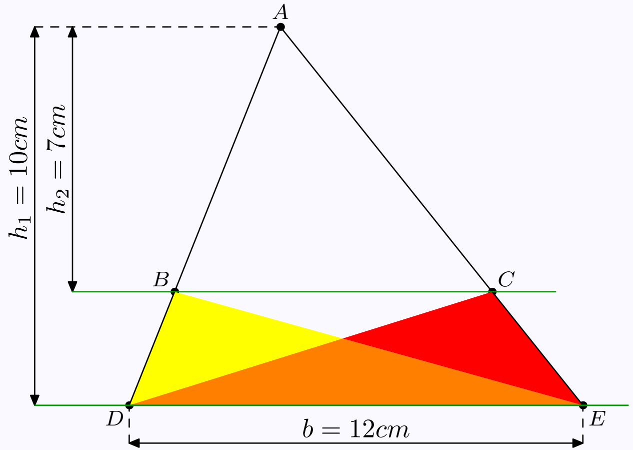
Début (Pour remettre à 0 les scores, cliquez sur début)

1. Quelle est l'aire du triangle ADE ?
☐ 120 cm^2 ☐ 240 cm^2 ☐ 60 cm^2 ☐ 80 cm^2

2. Quelle est l'aire du triangle BDE ?
☐ 36 cm^2 ☐ 12 cm^2 ☐ 72 cm^2 ☐ 18 cm^2

3. Quelle est l'aire du triangle CDE ?
☐ 36 cm^2 ☐ 18 cm^2 ☐ 20 cm^2 ☐ 84 cm^2

Fin Score : Réponses (Pour voir le score cliquez sur fin)



Début En déduire les aires suivantes, rappelons que l'aire de ADE est 60 cm^2 et que l'aire de BDE ou CDE est 18 cm^2.

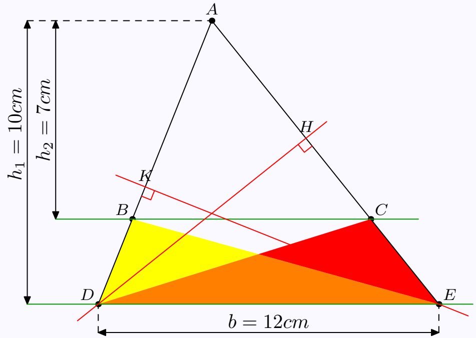
1. Quelle est l'aire du triangle ADC ?

☐ 120 cm^2 ☐ 42 cm ^{2} ☐ 21 cm^2 ☐ 84 cm ^{2}

2. Quelle est l'aire du triangle ABE ?

☐ 42 cm^2 ☐ 120 cm^2 ☐ 72 cm^2 ☐ 80 cm^2

Fin Score : Réponses



- On trace la droite (EK) perpendiculaire à (AD) passant par E.
- On trace la droite (DH) perpendiculaire à (AC) passant par D.

Début

1. En prenant le côté $[AB]$ pour base du triangle ABE, quelle est la hauteur relative à ce côté ?

☐ (DH) ☐ (AC) ☐ (EK) ☐ (DE)

2. Déterminer la valeur du produit $AB \times EK$. (Penser qu'il s'agit du double de l'aire d'un triangle)

☐ 21 ☐ 42 ☐ 84 ☐ 24

3. En prenant le côté $[AC]$ pour base du triangle ACD, quelle est la hauteur relative à ce côté ?

☐ (DH) ☐ (AC) ☐ (EK) ☐ (DE)

4. Déterminer la valeur du produit $AC \times DH$. (Penser qu'il s'agit du double de l'aire d'un triangle)

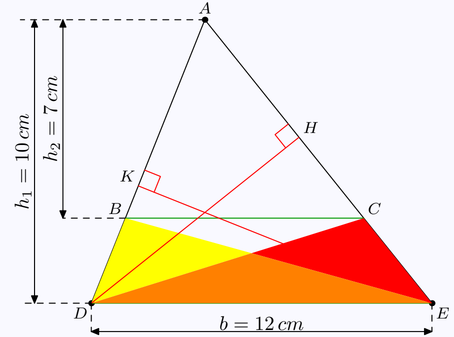
☐ 21 ☐ 42 ☐ 24 ☐ 84

5. Comparer les produits $AB \times EK$ et $AC \times DH$.

☐ $AB \times EK < AC \times DH$ ☐ $AB \times EK = AC \times DH$ ☐ $AB \times EK > AC \times DH$

Fin Score : Réponses

Aire d'un triangle
Cas particulier, toutes...
Vers le cas général, la...
Cas général
Page d'accueil
Page de Titre
Page 6 de 14
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



On peut aussi calculer l'aire du triangle ADE de plusieurs façons, en prenant le côté $[AD]$ ou $[AE]$ pour base.

Début

1. En prenant le côté $[AD]$ pour base du triangle ADE, quelle est la droite qui est hauteur relative à ce côté ?

☐ (DH) ☐ (AC) ☐ (EK) ☐ (DE)

2. En déduire la valeur du produit $AD \times EK$.

☐ 120 ☐ 42 ☐ 84 ☐ 24

3. En prenant le côté $[AE]$ pour base du triangle ADE, quelle est la droite qui est hauteur relative à ce côté ?

☐ (DH) ☐ (AC) ☐ (EK) ☐ (DE)

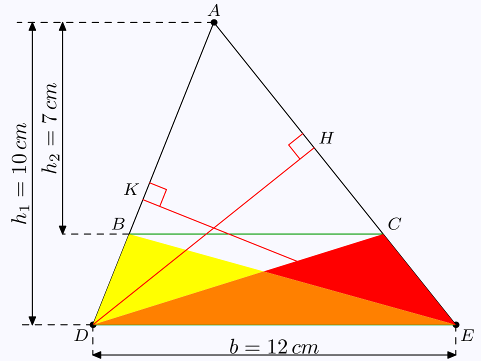
4. Déterminer la valeur du produit $AE \times DH$.

☐ 21 ☐ 42 ☐ 120 ☐ 84

5. Comparer les produits $AD \times EK$ et $AE \times DH$.

☐ $AD \times EK < AE \times DH$ ☐ $AD \times EK = AE \times DH$ ☐ $AD \times EK > AE \times DH$

Fin Score : Réponses



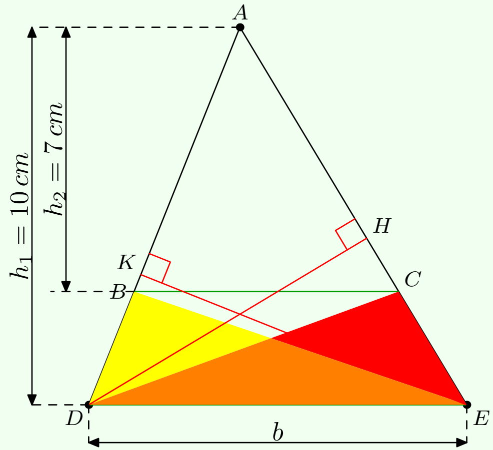
On obtient alors dans ce cas particulier la conclusion du théorème de Thalès qui affirme que :

Si $(BC) /\!/ (DE)$ alors les rapports $\dfrac{AB}{AD}$ et $\dfrac{AC}{AE}$ sont égaux .

En effet, dans ce cas particulier on peut calculer ces deux rapports de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned}\frac{AB}{AD} &= \frac{AB \times EK}{AD \times EK}\\ \frac{AC}{AE} &= \frac{AC \times DH}{AE \times DH}\end{aligned}\right\} = \frac{84}{120} = \frac{7 \times 12}{10 \times 12} = \frac{7}{10}$$

3. Vers le cas général, la base désignée par b est inconnue



On suppose toujours que :

- $(BC) /\!/ (DE)$.
- la hauteur du triangle ADE mesure $10\,cm$
- la hauteur du trapèze $BCED$ mesure $3\,cm$.

Mais cette fois ci

- la mesure de la base b est inconnue.

Début En prenant le côté $[DE]$. pour base, déterminez les aires suivantes :

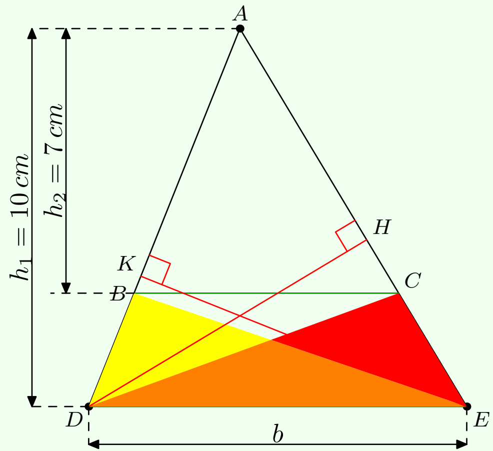
1. Quelle est l'aire du triangle ADE ?

☐ $10b$ ☐ $20b$ ☐ $5b$ ☐ $2{,}5b$

2. Les aires des triangles BDE et CDE sont les mêmes, quelle est sa valeur ?

☐ $3b$ ☐ $1{,}5b$ ☐ $6b$ ☐ $7b$

Fin Score : Réponses



Par soustraction de l'aire du grand triangle ADE qui est $5b$ et de l'aire du triangle jaune BDE ou du triangle rouge CDE qui est $1,5b$, on en déduit comme dans le cas particulier précédent que les aires des triangles ADC ou ABE ont la même valeur :

$$5b - 1,5b = 3,5b$$

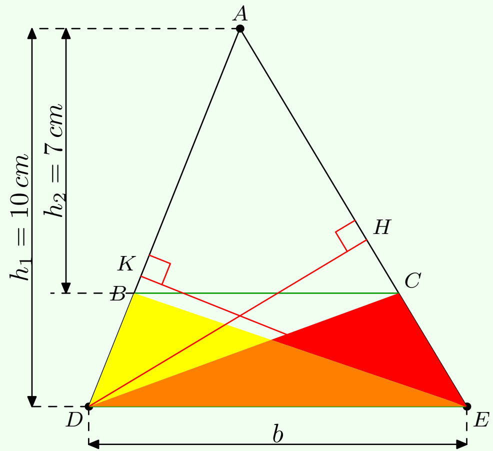
Début On trace les mêmes hauteurs que dans le cas particulier précédent, à l'aide des réponses aux questions précédentes répondre au Q.C.M. suivant :

1. Le produit $AB \times EK$ est le double de l'aire du triangle :
☐ BDE ☐ ABE ☐ ACD ☐ CDE

2. Le produit $AC \times DH$ est le double de l'aire du triangle :
☐ BDE ☐ ABE ☐ ACD ☐ CDE

3. Les 2 produits précédents sont égaux, quelle est leur valeur ?
☐ $3b$ ☐ $3,5b$ ☐ $7b$ ☐ $10b$

Fin Score : Réponses



Rappelons nous que comme dans le cas particulier précédent, l'aire du triangle ADE qui est $5b$, peut être calculée de plusieurs manières différentes, selon que le côté $[AD]$, $[DE]$ ou $[EA]$ est pris pour base.

Question.

1. Parmi les produits ci-dessous, deux sont égaux au double de l'aire du triangle ADE, lesquels ?

(a) $AB \times EK$ (b) $AD \times EK$ (c) $AE \times DH$ (d) $AC \times DH$

2. Ces deux produits sont donc égaux, quelle est leur valeur :

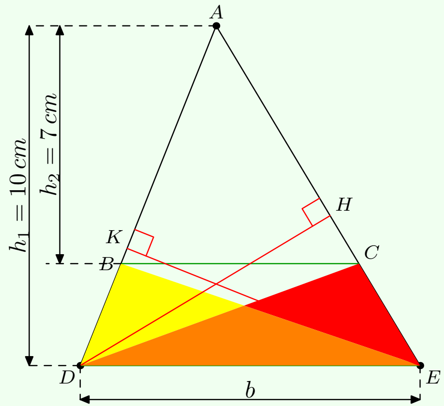
(a) $5b$ (b) $7b$ (c) $10b$ (d) $3b$

Même lorsque la mesure de la base $[DE]$ est un nombre b quelconque,

le calcul des rapports $\dfrac{AB \times EK}{AD \times EK}$ et $\dfrac{AC \times DH}{AE \times DH}$

aboutit toujours au même résultat :

- $\dfrac{AB \times EK}{AD \times EK} = \dfrac{7b}{10b}$ donc $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{7}{10}$ (en simplifiant par EK et par b)
- $\dfrac{AC \times DH}{AE \times DH} = \dfrac{7b}{10b}$ donc $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{7}{10}$ (en simplifiant par DH et par b)



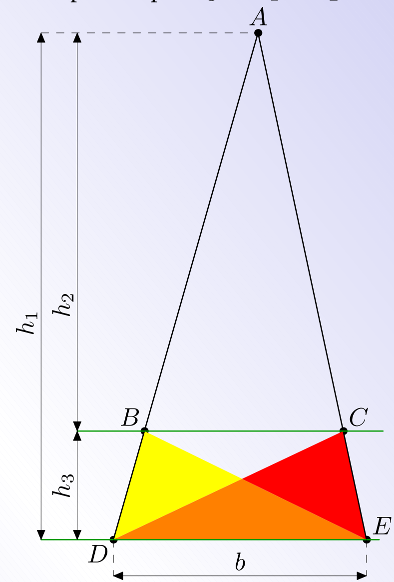
Il en résulte encore dans ce cas le théorème de Thalès :

$$\text{Si } (BC) /\!\!/ (DE) \quad \text{alors } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Le parallélisme est intervenu, lorqu'il a fallu calculer les aires de BDE et CDE, en se servant de la mesure de leur hauteur relative à $[DE]$, qui est de 3 cm pour les deux triangles

4. Cas général

On suppose toujours que $(BC)/\!\!/(DE)$, mais aucune mesure n'est supposée avoir une valeur particulière. La mesure du côté $[BE]$ sera toujours désignée par b et la mesure de la hauteur des triangles BDE ou CDE relative à (DE) sera exprimée par $h_3 = h_1 - h_2$.



Début

1. Quelle est l'aire du triangle ADE ?

☐ $\dfrac{bh_2}{2}$ ☐ $\dfrac{bh_1}{2}$ ☐ bh_1 ☐ $\dfrac{bh_3}{2}$

2. Comme dans les cas particuliers précédents, les triangles BDE en jaune et CDE en rouge ont la même aire, quelle est-elle ?

☐ $\dfrac{bh_2}{2}$ ☐ $\dfrac{bh_1}{2}$ ☐ bh_3 ☐ $\dfrac{bh_3}{2}$

3. Les triangles ADC ou ABE ont aussi la même aire, obtenue par soustraction des aires précédentes, quelle est-elle ?

☐ $\dfrac{bh_2}{2}$ ☐ $\dfrac{bh_1}{2}$ ☐ bh_3 ☐ $\dfrac{bh_3}{2}$

Fin Score : Réponses

Indications : On peut effectuer le calcul suivant :

$$\frac{bh_1}{2} - \frac{bh_3}{2} = \frac{bh_1 - bh_3}{2} = \frac{b(h_1 - h_3)}{2} = \frac{bh_2}{2}$$

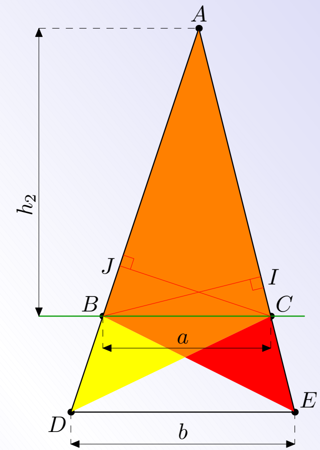
Page d'accueil
Page de Titre
Page 13 de 14
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Les triangles ADC et ABE ont la même aire : $\dfrac{bh_2}{2}$, elle peut être aussi calculée de deux autres manières suivantes :

- En prenant $[AD]$ pour base et (CJ) pour hauteur, l'aire de ADC est : $\dfrac{AD \times CJ}{2}$
- En prenant $[AE]$ pour base et (BI) pour hauteur, l'aire de ABE est : $\dfrac{AE \times BI}{2}$

On en déduit :

$$\boxed{AD \times CJ = AE \times BI = bh_2}$$



Choisissons dans le triangle ABC le côté $[AB]$ pour base et désignons sa mesure par a, l'aire de ce triangle est $\dfrac{ah_2}{2}$. Elle peut aussi être calculée des deux autres façons suivantes :

- En prenant $[AB]$ pour base et (CJ) pour hauteur, l'aire de ABC est : $\dfrac{AB \times CJ}{2}$
- En prenant $[AC]$ pour base et (BI) pour hauteur, l'aire de ABC est : $\dfrac{AC \times BI}{2}$

On en déduit :

$$\boxed{AB \times CJ = AC \times BI = ah_2}$$

On peut donc simplifier le calcul du rapport $\dfrac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(ABE)}$ qui est le même que le rapport $\dfrac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(ADC)}$ de la manière suivante :

- $\dfrac{AB \times CJ}{AD \times CJ} = \dfrac{ah_2}{bh_2}$ donc $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{a}{b}$ (en simplifiant par CJ et par h_2)
- $\dfrac{AC \times BI}{AE \times BI} = \dfrac{ah_2}{bh_2}$ donc $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{a}{b}$ (en simplifiant par BI et par h_2)

Nous avons donc trouvé un 3ème rapport : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{BC}{DE}$, égal aux deux déjà trouvés dans les deux cas particuliers précédents. On peut donc énoncer le théorème de Thalès sous la forme suivante :

Si $B \in [AD]$ et $C \in [AE]$ sont tels que $(BC) /\!/ (DE)$ alors $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$