Chapitre 1 : Ensembles dénombrables, topologie de $\mathbb{R}$, suites numériques

I Ensembles dénombrables

A) Propriétés élémentaires de $\mathbb{N}$, ensembles finis

Voir cours de sup

B) Ensembles dénombrables

Définition :

- Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont équipotents lorsqu'il existe une bijection de E dans F.
- On dit qu'un ensemble E est dénombrable lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exemples :

- $\mathbb{N}$ est dénombrable
- $p\mathbb{N}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, une bijection de $\mathbb{N}$ dans $p\mathbb{N}$ étant $n \mapsto pn$.
- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. En effet, l'application $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto (2p+1)2^n \end{array}$ est bijective.

Théorème :

Un ensemble I est dénombrable si et seulement si I est la réunion d'une famille croissante de parties finies, non stationnaire.

C'est-à-dire : I est dénombrable $\Leftrightarrow$ Il existe une famille $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset J_{n+1}$
- $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset I$ et $J_n \neq I$

Démonstration :

$\Rightarrow$:

Comme I est équipotent à $\mathbb{N}$, on peut supposer que $I = \mathbb{N}$.

Posons $J_n = [\![0, n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Alors J_n est fini, $J_n \subset J_{n+1}$, $I = \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ et enfin $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

$\Leftarrow$:

Supposons l'existence d'une telle famille $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais strictement croissante.

On note $a_n = \mathrm{card}(J_n)$ (noté aussi $\# J_n$), $\begin{cases} K_0 = J_0 \\ K_n = J_n \setminus J_{n-1} \end{cases}$ et $b_n = \# K_n = a_n - a_{n-1}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une bijection $f_n : [\![1, b_n]\!] \to K_n$

On définit l'application $g : \mathbb{N}^* \to I$ par :

$g(n) = f_{k+1}(n - a_k)$, où, pour $n \in \mathbb{N}$, on a noté $k = \min\{i \in \mathbb{N}, n \leq a_{i+1}\}$

(Ainsi, $a_k < n \leq a_{k+1}$, donc $n - a_k \leq a_{k+1} - a_k = b_{k+1}$ donc *g* est bien définie)

Alors :

- *g* est injective :

Soient $n, n' \in \mathbb{N}$, supposons que $g(n) = g(n')$.

Soient *k*, *k'* tels que $a_k < n \leq a_{k+1}$ et $a_{k'} < n' \leq a_{k'+1}$.

Alors $g(n) = f_{k+1}(n - a_k) \in K_{k+1}$ et $g(n') = f_{k'+1}(n' - a_{k'}) \in K_{k'+1}$

Alors $k = k'$, car sinon, comme les K_n sont disjoints, on aurait $g(n) \neq g(n')$.

Donc $f_{k+1}(n - a_k) = g(n) = g(n') = f_{k+1}(n' - a_k)$

Soit, comme f_{k+1} est injective, $n = n'$. D'où l'injectivité de *g*.

- *g* est surjective :

Soit $x \in I$. Il existe donc $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in J_i$; posons $k = \min\{i \in \mathbb{N}, x \in J_i\}$

Ainsi, $x \notin J_{k-1}$, et donc $x \in J_k \setminus J_{k-1} = K_k$

Il existe donc $j \in [\![1, b_k]\!]$ tel que $x = f_k(j)$.

Et on a alors $g(a_k + j) = f_k(a_k + j - a_k) = f_k(j) = x$

D'où la surjectivité de *g*.

Si maintenant la famille $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est que croissante, on a toujours le résultat en "retirant" les termes en double, ce qui ne mettra en défaut aucune des hypothèses.

Ainsi, par exemple :

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable, avec $J_n = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1, |p| + q \leq n + 1\right\}$
- Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Théorème :

Soit *E* un ensemble. Il n'existe aucune surjection de *E* sur $P(E)$

Démonstration :

Supposons qu'il existe une telle surjection $f : E \to P(E)$.

Notons $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Comme *f* est surjective, *A* possède un antécédent *a* par *f*.

Si $a \in A$, alors par définition, $a \notin f(A) = A$, ce qui est contradictoire.

Donc $a \notin A$, c'est-à-dire que $a \in f(A)$ soit $a \in A$ ce qui est aussi contradictoire.

Donc *f* n'est pas surjective.

Corollaire :

$\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $P(\mathbb{N})$.

Exemple :

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (démonstration de Cantor) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0;1[$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on notera $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ le développement décimal de u_n, c'est-à-dire l'unique suite à valeurs dans $[\![0;9]\!]$ telle que $u_n=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_n^{(i)}}{10^i}$ et telle que $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire à 9.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit donc, en base 10 :

$u_0=0,a_0^{(1)}a_0^{(2)}...$

$u_1=0,a_1^{(1)}a_1^{(2)}...$

$\vdots$

$u_k=0,a_k^{(1)}a_k^{(2)}...a_k^{(k+1)}...$

Soit $(b^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} b^{(k)}=0 \text{ si } a_k^{(k+1)}\neq 0 \\ b^{(k)}=1 \text{ sinon}\end{cases}$

Alors cette suite n'est pas stationnaire en 9. Donc $(b^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est le développement décimal propre de $b=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{b^{(i)}}{10^i}$.

Alors $b\notin\{u_k,k\in\mathbb{N}\}$

En effet, supposons que $b=u_k$, où $k\in\mathbb{N}$.

Alors $\forall i\in\mathbb{N}^*,b^{(i)}=a_k^{(i)}$

Donc, en particulier, $b^{(k+1)}=a_k^{(k+1)}$, ce qui est impossible.

Il n'existe donc pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $[0;1[$, et encore moins dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

$\mathbb{R}$ est donc un ensemble "plus grand" que $\mathbb{N}$.

L'hypothèse du continu affirme qu'il n'existe pas d'ensemble "plus grand" que $\mathbb{N}$ et "plus petit" que $\mathbb{R}$. (l'existence ou la non-existence d'un tel ensemble est en effet indécidable sans cet axiome supplémentaire)

II Espaces vectoriels normés

A) Norme, distance associée

On désignera ici par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle norme sur E toute application $N:E\to\mathbb{R}$ telle que :

(1) $\forall x\in E, N(x)\geq 0$

(2) $\forall x\in E, N(x)=0\Rightarrow x=0$

(3) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x\in E, N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$

(4) $\forall(x,y)\in E^2, N(x+y)\leq N(x)+N(y)$

On appelle espace vectoriel normé le couple (E,N).

Exemples :

$|\ |$ est une norme sur $\mathbb{R}$. Mais $|\ |$ peut aussi être vue comme norme sur $\mathbb{C}$.

Propriétés :

- La norme N est une application 1-lipschitzienne par rapport à elle-même, c'est-à-dire :

$|N(x)-N(y)| \leq N(x-y)$

- La norme N est convexe, c'est-à-dire :

$\forall t \in [0;1], \forall (x,y) \in E^2, N(tx+(1-t)y) \leq tN(x)+(1-t)N(y)$

Démonstration :

- $N(x)=N(y+(x-y)) \leq N(y)+N(x-y)$

Donc $N(x)-N(y) \leq N(x-y)$.

Et, de même, $N(y)-N(x) \leq N(y-x)=N(x-y)$.

Donc $|N(x)-N(y)| \leq N(x-y)$

- $N(tx+(1-t)y) \leq N(tx)+N((1-t)y)$

$\leq tN(x)+(1-t)N(y)$

Définition :

- On appelle distance associée à N l'application $d : \begin{array}{l} E\times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto N(x-y) \end{array}$

Elle vérifie les propriétés, pour tous $x,y,z \in E$:

(1) $d(x,y) \geq 0$

(2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(3) $d(x,y)=d(y,x)$

(4) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

- On notera dans la suite $N(x)=\|x\|$.

Définition :

- On appelle boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r \geq 0$ (E étant un $\mathbb{K}$-ev normé –"evn") l'ensemble $B(x,r)=\{x \in E, d(x,y)<r\}$.

On appelle boule fermée de même centre et même rayon l'ensemble $\overline{B}(x,r)=\{x \in E, d(x,y) \leq r\}$

On appelle enfin sphère (toujours même centre, même rayon) l'ensemble $S(x,r)=\{x \in E, d(x,y)=r\}$

- Soit A une partie de l'evn E ; on dit que A est bornée lorsqu'elle est contenue dans une boule fermée de E.

Ainsi, A est bornée $\Leftrightarrow \exists x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, A \subset \overline{B}(x,r)$

- Soit A une partie de l'evn E. Alors :

A est bornée $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, A \subset \overline{B}(x,r)$

Démonstration :

$\Leftarrow$… (E étant non vide, on a le choix)

$\Rightarrow$: Supposons que A est bornée. Soit $x \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $A \subset \overline{B}(x,r)$.

Soit maintenant $x' \in E$. Pour tout $y \in A$, on a :

$N(y-x) \leq r$

Et $N(y-x') \leq N(y-x)+N(x-x')$

Donc $N(y-x') \leq r+N(x-x')$. Ainsi, $A \subset \overline{B}(x, r+N(x-x'))$

Définition :

On dit qu'une application f d'un ensemble X dans un evn E est bornée lorsque la partie $f(X)$ est une partie bornée de E. C'est-à-dire :

f est bornée $\Leftrightarrow \exists x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall a \in X, d(f(a), x) \leq r$

Exemples :

- Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $N_1 : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i| \end{array}$. Alors N_1 est une norme sur E.
- Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $N_2 : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{array}$. Alors N_2 est une norme sur E.
- Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $N_\infty : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots x_n) \mapsto \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \end{array}$. Alors N_∞ est une norme sur E.
- Soient a, b avec $a < b$ deux réels, $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$. L'application $N_1 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt \end{array}$ est une norme sur E.

Démonstration :

- Positivité : $\forall f \in E, \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$
- Séparation : soit $f \in E$, supposons que $N_1(f) = 0$

La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est positive, continue sur $[a,b]$ et $\int_a^b |f(t)| dt = 0$.

Donc $f = 0$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$.

Alors $N_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = \int_a^b |\lambda| |f(t)| dt = |\lambda| N_1(f)$

- Soit $(f, g) \in E^2$

$N_1(f+g) = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| + |g(t)| dt \leq N_1(f) + N_1(g)$

- Dans $E = C([a,b], \mathbb{R})$:

$N_2 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \end{array}$ est une norme.

- Toujours dans $E = C([a,b], \mathbb{R})$, $N_\infty : f \mapsto \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

B) Suites dans un espace vectoriel normé

Définition :

Soit E un evn, $u \in E^{\mathbb{N}}$

- On dit que u est bornée lorsque $u(\mathbb{N})$ est bornée.
- On dit que u admet une limite $l \in E$ lorsque :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon$

Proposition :

Soit E un evn, $u \in E^{\mathbb{N}}$.

(1) u converge vers $l \in E$ si et seulement si $(\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2) u est bornée si et seulement si $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.

(3) Si u converge, alors u est bornée.

(4) Si u admet une limite l, alors celle-ci est unique.

Démonstration :

Les trois premiers sont des conséquences de la définition.

Pour le (4) : Soient $l, l' \in E$. Supposons que u converge vers l et l'.

Posons $\varepsilon = \|l - l'\|$.

Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow \|u_n - l'\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour $k = \max(n_1, n_2)$, on a :

$\|l - l'\| \leq \|l - u_k\| + \|u_k - l'\|$, c'est-à-dire $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$. Or, $\varepsilon \geq 0$. Donc $\varepsilon = 0$ et $l = l'$.

Théorème :

L'ensemble $\mathfrak{C}$ des suites convergentes dans E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application $\begin{array}{l} \mathfrak{C} \to E \\ u \mapsto \lim u \end{array}$ est linéaire.

Démonstration :

- Déjà, la suite nulle est bien dans $\mathfrak{C}$.
- Soient $u, v \in \mathfrak{C}$, u_∞, v_∞ leurs limites et $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} \|u_n - u_\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|v_n - v_\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Alors, pour $n \geq n_0$, $\|(u_n + v_n) - (u_\infty + v_\infty)\| \leq \|u_n - u_\infty\| + \|v_n - v_\infty\| \leq \varepsilon$.

Donc $u + v$ converge vers $u_\infty + v_\infty$.

- Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers λ_∞.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers u_∞.

Alors $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda_\infty u_\infty$.

En effet : soit L un majorant $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} |\lambda_n - \lambda_\infty| < \varepsilon \\ \|u_n - u_\infty\| < \varepsilon \end{cases}$.

Donc, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|\lambda_n u_n - \lambda_\infty u_\infty\| &\leq \|\lambda_n u_n - \lambda_n u_\infty\| + \|\lambda_n u_\infty - \lambda_\infty u_\infty\| \\ &\leq |\lambda_n| \|u_n - u_\infty\| + |\lambda_n - \lambda_\infty| \|u_\infty\| \\ &< L\varepsilon + \varepsilon\|u_\infty\| = (L + \|u_\infty\|)\varepsilon \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème :

Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ sont deux suites dont l'une est bornée et l'autre de limite nulle, $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

En effet :

Supposons $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Soit $L \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| \leq L$.

Alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n\| < \dfrac{\varepsilon}{L}$

Donc $n \geq n_0 \Rightarrow \|\lambda_n u_n\| = |\lambda_n| \|u_n\| \leq \varepsilon$.

Exemples :

- Avec $E = \mathbb{R}^n$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

Alors une suite $[(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)})]_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x_1^\infty, x_2^\infty, \dots x_n^\infty)$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

- Avec $E = C([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1$

Soit $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle dans $(E, \| \ \|_1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \dfrac{1}{n+1}$.

Donc $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Attention : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ponctuellement vers 0 :

$$\begin{cases} \text{si } x \neq 1, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{mais si } x = 1, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge t'elle dans $(E, \| \ \|_\infty)$?

On a $\|f_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[0;1]} |x^n| = 1$

Donc déjà $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

Supposons qu'elle en a une, disons $g \in E$.

Alors, pour $x < 1$, $|f_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\forall x > 1, g(x) = \lim f_n(x) = 0$

Et de plus $g(1) = \lim f_n(1) = 1$.

Donc g n'est pas continue en 1 ; il y a donc contradiction.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

Remarque :

La convergence uniforme (pour $\| \ \|_\infty$) implique la convergence ponctuelle :

$\left(\|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \dots, |f_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$

C) Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition :

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une injection croissante $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_{\varphi(n)}$.

Remarque :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_n=u_{\varphi(n)}$,

Et si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_n=v_{\psi(n)}$,

Alors $w_n=u_{\varphi\circ\psi(n)}$.

Théorème :

- Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée
- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente, et tend vers la même limite.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in E$ si et seulement si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers cette même limite *l*.

Définition :

On dit que $a\in E$ est une valeur d'adhérence de $u\in E^{\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de *u* de limite *a*.

Théorème :

Soient $a\in E$, $u\in E^{\mathbb{N}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) *a* est valeur d'adhérence de *u*.

(2) $\forall\varepsilon>0,\forall n\in\mathbb{N},\exists p\geq n,\|u_p-a\|\leq\varepsilon$

Démonstration :

$(1)\Rightarrow(2)$: Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $a=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{\varphi(n)}$

Déjà, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq n$.

Soient alors $\varepsilon>0$ et $n\in\mathbb{N}$. Il existe alors $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq n_0\Rightarrow\|u_{\varphi(k)}-a\|\leq\varepsilon$

Posons $p=\max(\varphi(n),\varphi(n_0))$, $m=\max(n,n_0)$ (ainsi, $\varphi(m)=p$)

Alors $p\geq\varphi(n)\geq n$, et $m\geq n_0$, donc $\|u_p-a\|=\|u_{\varphi(m)}-a\|\leq\varepsilon$.

$(2)\Rightarrow(1)$: On construit φ par récurrence :

- On pose $\varphi(0)=0$
- Soit $n\geq 0$, supposons que $\varphi(n)$ est construit.

On pose $\varepsilon=\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Il existe donc $p\geq\varphi(n)+1$ tel que $\|u_p-a\|\leq\varepsilon$.

On pose alors $\varphi(n+1)=\min\left\{p\in\mathbb{N}, p\geq\varphi(n)+1\text{ et }\|u_p-a\|\leq\varepsilon\right\}$

L'application ainsi construite est strictement croissante, et, pour $n\geq 1$, $\|u_{\varphi(n)}-a\|\leq\dfrac{1}{2^n}$

Donc *a* est une valeur d'adhérence de *u*.

Théorème :

Une condition nécessaire mais non suffisante pour que $u \in E^{\mathbb{N}}$ soit convergente est qu'elle admette une unique valeur d'adhérence.

La condition n'est pas suffisante. Par exemple : $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \equiv 0[2] \\ n \text{ si } n \equiv 1[2] \end{cases}$

III Topologie des espaces vectoriels normés

A) Voisinages

Dans toute la suite, on fixe $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

Définition :

Soit $a \in E$, V une partie de E. On dit que V est un voisinage de a lorsqu'il existe une boule ouverte de centre a contenue dans V.

On note alors $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Proposition :

Soit $a \in E$.

(V1) E est un voisinage de a, $\varnothing$ n'en est pas un.

(V2) Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.

(V3) Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

Démonstration :

(V1) : Par exemple, $B(a,1) \subset E$

Si $B(a,r) \subset \varnothing$ pour un certain $r > 0$, alors en particulier $a \in \varnothing$, ce qui est impossible.

(V2) : Si V_1, V_2 sont deux voisinages de a, il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a, r_1) \subset V_1$ et $B(a, r_2) \subset V_2$. Donc $B(a, \min(r_1, r_2)) \subset V_1 \cap V_2$.

On peut ensuite facilement conclure par récurrence.

(V3) : Si $V \subset W$ et si $B(a,r) \subset V$, alors $B(a,r) \subset W$

Définition, proposition :

Soit A une partie de E, et $a \in A$. On appelle voisinage de a dans A la trace sur A d'un voisinage de a dans E, c'est-à-dire, pour $V \subset A$:

$V \in V_A(a) \Leftrightarrow \exists W \in V(a), W \cap A = V$ (1)

$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(a,r) \cap A \subset V$ (2)

(Où on a noté $V_A(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans A)

Démonstration :

$(1) \Rightarrow (2)$: Soit $V \subset A$. Supposons qu'il existe $W \in V(a)$ tel que $W \cap A = V$

Alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset W$. Donc $B(a,r) \cap A \subset W \cap A = V$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Soit $V \subset A$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \cap A \subset V$.

Alors, si on pose $W = B(a,r) \cup V$, on aura :

$W \cap A = (B(a,r) \cup V) \cap A = \underbrace{(B(a,r) \cap A)}_{\subset V} \cup \underbrace{V \cap A}_{=V} = V$

D'où l'équivalence.

B) Ouverts et fermés

Définition :

On appelle ouvert de E toute partie O de E qui est voisinage de chacun de ses points.

On note $O(E)$ l'ensemble des ouverts de E.

Si $O \subset E$, $O \in O(E) \Leftrightarrow \forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \subset O$

Proposition :

L'ensemble des ouverts de E vérifie les propriétés suivantes :

(O1) E est un ouvert, $\varnothing$ est un ouvert.

(O2) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert

(O3) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

(O2) : Montrons le pour deux ouverts Ω_1, Ω_2

Si $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est vide, alors $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est ouvert. Sinon :

Soit $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Montrons que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in V(x)$

Comme Ω_1 est ouvert, c'est un voisinage de x. De même, Ω_2 est un voisinage de x. Donc $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est un voisinage de x.

(O3) Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts.

Notons $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Pour $x \in \Omega$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{i_0}$.

Alors $\Omega_{i_0} \subset \Omega$, et Ω_{i_0} est un voisinage de x, donc Ω en est aussi un.

Théorème :

Toute boule ouverte est ouverte.

Démonstration :

Soient $x \in E$, $r > 0$. Montrons que $B(x,r)$ est ouverte.

Soit $y \in B(x,r)$. On pose $r' = \|x - y\|$.

Alors $B(y, r - r') \subset B(x,r)$. En effet :

Soit $z \in B(y, r - r')$. Alors $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r - r' + r' = r$, donc $z \in B(x,r)$, d'où l'inclusion. Donc $B(x,r)$ est un voisinage de y, et donc de tous ses points.

Définition :

On appelle fermé de E tout complémentaire d'un ouvert de E. On note $F(E)$ l'ensemble des fermés de E.

Proposition :

L'ensemble des fermés de E vérifie les propriétés :

(F1) E et $\varnothing$ sont fermés.

(F2) Toute réunion finie de fermés est fermée

(F3) Toue intersection de fermés est fermée.

Démonstration : il suffit de passer au complémentaire.

Théorème :

Toute boule fermée est un fermé.

Soit $x \in E$, $r > 0$. On va montrer que $C_E\overline{B}(x,r)$ est ouvert.

Soit $y \in C_E\overline{B}(x,r)$.

On pose $r' = \|y - x\| > r$

Montrons qu'alors $B(y, r - r') \subset C_E\overline{B}(x,r)$

Soit $z \in B(y, r - r')$. Alors $d(z,x) + d(z,y) \geq d(x,y)$

Donc $d(z,x) \geq d(x,y) - d(z,y) > r' - (r' - r) = r$

Corollaire :

Toute sphère est fermée.

En effet, $S(x,r) = \overline{B}(x,r) \cap C_E(B(x,r))$, et est donc une intersection de fermés.

Définition (topologie induite sur une partie de *E*)

Soit *A* une partie de *E*, *X* une partie de *A*.

- On dit que *X* est un ouvert de *A* lorsque *X* est voisinage dans *A* de chacun de ses points. On note alors $O(A)$ l'ensemble des ouverts de *A*.
- On dit que *X* est un fermé de *A* si son complémentaire dans *A* est un ouvert. On note alors $F(A)$ l'ensemble des fermés de *A*.

Théorème :

Soit *A* une partie de *E*. Les ouverts de *A* sont les traces sur *A* des ouverts de *E*, c'est-à-dire, pour $X \subset A$:

$X \in O(A) \Leftrightarrow \exists O \in O(E), X = O \cap A$

Démonstration :

$\Leftarrow$: Soit $O \in O(E)$, supposons que $X = O \cap A$.

Soit $x \in X$. Montrons que $X \in V_A(x)$.

Comme $x \in O$, $O \in V(x)$. Donc $O \cap A \in V_A(x)$.

$\Rightarrow$: Soit $X \in O(A)$. Alors, pour tout $x \in X$, on a $X \in V_A(x)$, donc il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A \subset X$.

Posons alors $O = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x)$. C'est une réunion d'ouverts, donc un ouvert.

Par ailleurs, $O \cap A = \left(\bigcup_{x \in X} B(x, r_x)\right) \cap A = \bigcup_{x \in X} \left(B(x, r_x) \cap A\right) \subset X$.

Pour $x \in X$, $x \in B(x, r_x) \subset O$. De plus, $x \in A$ (car $X \subset A$). Donc $X \subset O \cap A$.

Donc $X = O \cap A$.

Conséquence :

Soit *A* une partie de *E*. Les fermés de *A* sont les traces sur *A* des fermés de *E*.

Démonstration :

Si $X \subset E$, alors $(C_E X) \cap A = C_A(X \cap A)$

C) Adhérence, intérieur, frontière

Définition :

Soit *X* une partie de *E*, et $x \in E$.

- Le point x est dit adhérent à X si tout voisinage de x coupe X.

On appelle adhérence de X l'ensemble des point adhérents à X, qu'on note $\overline{X}$. Ainsi :

$$x \in \overline{X} \Leftrightarrow \forall V \in V(x), V \cap X \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap X \neq \varnothing$$

- On dit que le point x est intérieur à X si X est voisinage de x. On appelle intérieur de X l'ensemble des points intérieurs à X, qu'on note $\overset{\circ}{X}$.
- On note frontière de X l'ensemble $\overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \partial X$.

Théorème :

(1) $C_E(\overline{X}) = \overset{\circ}{C_E}(X)$, $C_E(\overset{\circ}{X}) = \overline{C_E(X)}$
(2) L'adhérence de X est le plus petit fermé contenant X.
(3) L'intérieur de X est le plus grand ouvert contenu dans X.
(4) La frontière de X est un fermé.
(5) X est ouvert $\Leftrightarrow X = \overset{\circ}{X}$; X est fermé $\Leftrightarrow X = \overline{X}$.

Démonstration :

(1) $\subset$: Soit $x \in C_E(\overline{X})$.

Il existe alors $V \in V(x)$ tel que $V \cap X = \varnothing$

Alors $V \subset C_E(X)$. Donc $C_E(X) \in V(x)$, c'est-à-dire $x \in \overset{\circ}{C_E}(X)$.

$\supset$: on fait la même chose dans l'autre sens.

La deuxième égalité découle de la première :

On a $C_E(\overline{C_E(X)}) = \overbrace{C_E(C_E(X))}^{\circ}$ (égalité précédente avec $C_E(X)$),

C'est-à-dire $C_E(\overline{C_E(X)}) = \overset{\circ}{X}$, donc $\overline{C_E(X)} = C_E(\overset{\circ}{X})$ (passage au complémentaire)

(2) : Montrons que $\overline{X}$ est un fermé, que $X \subset \overline{X}$, et que, pour F fermé de E, $X \subset F \Rightarrow \overline{X} \subset F$.

Posons $A = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset X}} F$. Alors A est fermé (car intersection de fermés), et contient X.

Montrons que $A = \overline{X}$.

Soit $x \in \overline{X}$. Montrons que pour F fermé contenant X, $x \in F$.

Supposons qu'au contraire $x \notin F$; Alors $C_E F$ (qui est un ouvert et contient x) est un voisinage de x ne rencontrant pas X (puisqu'il ne rencontre déjà pas F), ce qui est impossible. Donc $x \in F$. D'où déjà l'inclusion $\overline{X} \subset A$, car A est fermé et contient X.

Soit $x \in A$. Supposons que $x \notin \overline{X}$. Alors il existe un voisinage de x ne rencontrant pas X, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap X = \varnothing$. Alors $F = C_E B(x,r)$ est un fermé, et il contient X. Donc $A \subset F$, et donc $x \notin A$, ce qui est contradictoire puisqu'on a pris x dans A. Donc $x \in \overline{X}$. D'où l'autre inclusion, et l'égalité.

D'où le résultat.

(3) : Il suffit de passer au complémentaire :

Pour tout A ouvert inclus dans X, on a :

$A \subset X$. Donc $C_E(X) \subset C_E(A)$. Donc $\overline{C_E(X)} \subset C_E(A)$ car $C_E(A)$ est fermé.

C'est-à-dire d'après les formules précédentes $C_E(\overset{\circ}{X}) \subset C_E(A)$, donc $A \subset \overset{\circ}{X}$.

Ensuite, $\overset{\circ}{X}$ est ouvert, puisque $C_E(\overset{\circ}{X}) = \overline{C_E(X)}$ est fermé.

(4) On a en effet $\partial X = \overline{X} \cap C_E(\overset{\circ}{X}) = \overline{X} \cap \overline{C_E(X)}$, intersection de fermés.

Le (5) découle aisément de (2) et (3).

Propriétés :

(1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

(2) $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{B} \\ \mathring{A} \subset \mathring{B} \end{cases}$

(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

(4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overbrace{A \cup B}^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Démonstration :

(1) $\overline{A}$ est fermé, donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(2) Si $A \subset B$, alors $A \subset \overline{B}$. Or, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant *A*, donc $\overline{A} \subset \overline{B}$ puisque $\overline{B}$ est fermé.

(3) $\subset$:

$A \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, et $B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Comme $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\supset$:

$A \subset A \cup B$. Donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.

De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

D'où l'égalité, l'autre égalité s'obtenant par passage au complémentaire en utilisant les égalités du théorème précédent :

$C_E(\overline{C_E(A) \cup C_E(B)}) = \overbrace{C_E(C_E(A) \cup C_E(B))}^{\circ} = \overbrace{A \cap B}^{\circ}$

Et $C_E(\overline{C_E(A)} \cup \overline{C_E(B)}) = C_E(\overline{C_E(A)}) \cap C_E(\overline{C_E(B)}) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

(4) On a $A \cap B \subset A$.

Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$.

De même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.

Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Pour l'autre : il suffit encore de passer au complémentaire.

Remarque :

En général, on n'a pas $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

Par exemple :

Avec $E = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$ et $B =]0;1]$

On a $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$, mais $\overline{A \cap B} = \varnothing$.

Théorème : Caractérisation séquentielle de l'adhérence :

Soient $X \subset E$ et $x \in E$

Alors $x \in \overline{X}$ si et seulement si existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers *x*.

Démonstration :

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers *x*.

Alors pour $r > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < r$.

Donc $x_{n_0} \in X \cap B(x,r)$, donc $X \cap B(x,r) \neq \varnothing$.

Donc x est adhérent à $\overline{X}$.

- Soit $x \in \overline{X}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(x,\frac{1}{2^n}) \neq \varnothing$.

Soit donc x_n un point de cet ensemble.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\|x_n - x\| < \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

Définition :

Soient $X \subset E$, $X \in E$.

On appelle distance de x à X le réel $d(x,X) = \inf\{d(x,y), y \in X\}$.

Théorème :

Pour $x \in E$, $X \subset E$, x est adhérent à X si et seulement si $d(x,X) = 0$.

Démonstration :

$$d(x,X)=0 \Leftrightarrow \forall r>0, \exists y \in X, d(x,y)<r$$
$$\Leftrightarrow \forall r>0, B(x,r)\cap X = \varnothing$$

Remarque :

On a bien sûr les définitions naturelles d'adhérence, intérieur, frontière relativement à une partie.

Si $A \subset E, X \subset A$, alors $\overline{X}^A = \overline{X} \cap A$, mais $\overset{\circ}{X}^A \neq \overset{\circ}{X} \cap A$

Exemples :

- Si $X = \{a\}$, alors $\overline{X} = \{a\}$ et $\overset{\circ}{X} = \varnothing$ (si $\dim E \neq 0$)
- Pour $x \in E$ et $r > 0$, on a :

$\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$, $(\overline{B}(x,r))^{\circ} = B(x,r)$, $\partial(B(x,r)) = S(x,r)$

- Soit $X = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Alors $\overline{X} = X \cup \{\lim u\}$.

Démonstration :

Soient $x \in E$, $r > 0$.

- Montrons que $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$:

Déjà, $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$, puisque $\overline{B}(x,r)$ est fermé et contient $B(x,r)$.

Soit maintenant $y \in \overline{B}(x,r)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x + (1-\frac{1}{2^n})(y-x)$. Alors $\|y_n - x\| = (1-\frac{1}{2^n})\underbrace{\|y-x\|}_{\leq r} < r$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in B(x,r)$, et de plus $\|y - y_n\| = \frac{1}{2^n}\|y-x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$. Donc $y \in \overline{B(x,r)}$.

- Montrons que $(\overline{B}(x,r))^{\circ} = B(x,r)$:

Déjà, on a $B(x,r) \subset (\overline{B}(x,r))^{\circ}$ puisque $B(x,r)$ est ouvert et est inclus dans $\overline{B}(x,r)$

On va montrer que si $\overline{B}(x,r)$ est un voisinage de $y \in E$, alors $\|y-x\| < r$.

Si $E = \{0\}$, le résultat est évident. Sinon, soit $y \neq x$ un point intérieur à $\overline{B}(x,r)$.

Il existe alors $r' > 0$ tel que $B(y,r') \subset \overline{B}(x,r)$.

En particulier, $z = y + \frac{r'}{2\|y-x\|}(y-x) \in B(y,r')$

Alors $\|z-x\| = \left\|\left(1+\frac{r'}{2\|y-x\|}\right)(y-x)\right\| = \left|1+\frac{r'}{2\|y-x\|}\right|\|y-x\| = \|y-x\| + \frac{r'}{2}$

Or, $\|z-x\| \leq r$.

Donc $\|y-x\| + \frac{r'}{2} \leq r$, soit $\|y-x\| < r$

- Montrons que $\overline{X} = X \cup \{\lim u\}$

Disons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers *l*. Alors déjà $l \in \overline{X}$ car il existe une suite (*u* !!) à valeurs dans *X* qui converge vers *l*. Donc déjà $X \cup \{\lim u\} \subset \overline{X}$.

Soit maintenant $y \notin X \cup \{l\}$, notons $r = \|y-l\|$.

Il existe déjà $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - l\| < \frac{r}{2}$.

Donc pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - y\| \geq \|y-l\| - \|u_n - l\| \geq \frac{r}{2}$.

Soit maintenant $r' = \min\limits_{n<n_0}\|y-u_n\|$.

Alors $r' > 0$ et $r > 0$.

De plus, $d(y,X) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\|y-u_n\| \geq \min(\frac{r}{2}, r') > 0$

Donc $y \notin \overline{X}$, d'où $\overline{X} = X \cup \{l\}$.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On note $VA(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

Alors $VA(u) = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n, n \geq p\}}$.

Démonstration :

Soit $\alpha \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n, n \geq p\}}$.

Soient $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Comme $\alpha \in \overline{\{u_n, n \geq N\}}$, on a $B(\alpha,\varepsilon) \cap \{u_n, n \geq N\} \neq \varnothing$

Il existe donc $\exists p \geq N$ tel que $u_p \in B(\alpha,\varepsilon)$, soit $\|u_p - \alpha\| < \varepsilon$.

Donc α est une valeur d'adhérence de *u*.

Soit maintenant α une valeur d'adhérence de *u*.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, B(\alpha,\varepsilon) \cap \{u_n, n \geq N\} \neq \varnothing$,

c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \in \overline{\{u_n, n \geq N\}}$, soit $\alpha \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n, n \geq p\}}$

D'où l'autre inclusion et l'égalité.

D) Parties denses

Définition :

On dit que $X \subset E$ est dense dans *E* lorsque $\overline{X} = E$.

Si *A* est une partie de *E*, on dit qu'une partie *X* de *A* est dense dans *A* si $A \subset \overline{X}$.

Exemple :

Soit X une partie dénombrable d'un $\mathbb{R}$-ev E non nul.

Alors $C_E X$ est dense dans E.

En effet :

Soient $x \in E$ et $r > 0$. Montrons déjà que $B(x,r)$ n'est pas dénombrable.

Comme E est non nul, $E \setminus \{x\}$ ne l'est pas. On peut donc prendre $y \in E \setminus \{x\}$.

Soit $f : \underset{t \mapsto x + t\frac{r}{\|y\|}y}{[0;1[\to B(x,r)}$. On a, pour $t \in [0;1[$, $\|f(t) - x\| = \left\| t\frac{r}{\|y\|}y \right\| = t.r < r$. De plus, f est injective, et $[0;1[$ n'est pas dénombrable.

Donc $B(x,r)$ n'est pas dénombrable (ni fini)

Ainsi, $B(x,r) \not\subset X$. Donc $B(x,r) \cap C_E X \neq \varnothing$

Donc $x \in \overline{C_E X}$.

Exemples :

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{C}, \exists Q \in \mathbb{Q}[X], Q(x) = 0\}$. Un complexe qui est racine d'un polynôme à coefficients rationnels est dit algébrique.

Théorème :

Soient $A \subset E$ et $X \subset A$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que X soit dense dans A est que tout ouvert non vide de A rencontre X.

Démonstration :

Condition nécessaire :

Supposons que X est dense dans A.

Soit Ω un ouvert non vide de A, et $x \in \Omega$.

Il existe alors $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A \subset \Omega$.

Comme X est dense dans A, on a $X \cap B(x,r) \neq \varnothing$

Or, $X \cap B(x,r) = X \cap (B(x,r) \cap A) \subset X \cap \Omega$

Donc $X \cap \Omega \neq \varnothing$.

Condition suffisante :

Supposons que $\forall \Omega \in O(A) \setminus \{\varnothing\}, X \cap \Omega \neq \varnothing$.

Soient alors $X \in A$ et $r > 0$. $B(x,r)$ est un ouvert non vide, donc rencontre X. Donc $x \in \overline{X}$. Donc $A \subset \overline{X}$.

IV Propriétés de la borne supérieure et topologie de $\mathbb{R}$.

Rappel :

Toute partie X non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant, appelé sa borne supérieure et noté $\sup X$.

Toute partie X non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand majorant, appelé sa borne inférieure et noté $\inf X$.

Caractérisation :
Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, x \le a \\ \forall \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a] \cap X \ne \varnothing \end{cases}$$

$$a = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, x \ge a \\ \forall \varepsilon > 0, [a, a+\varepsilon[\cap X \ne \varnothing \end{cases}$$

A) Théorème de Bolzano–Weierstrass

- Si u est une suite réelle croissante et majorée, alors u converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- Si u est une suite réelle décroissante et minorée, alors u converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- Si u et v sont deux suites adjacentes (u décroissante, v croissante et $u-v \ge 0$ de limite nulle), alors u et v convergent vers la même limite.

Théorème des segments emboîtés :
Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segment de $\mathbb{R}$, décroissante au sens de l'inclusion, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un segment non vide.
Si de plus la longueur de K_n tend vers 0, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un singleton.
Démonstration :
Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $K_n = [a_n, b_n]$.
Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
Soit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$.
Alors $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x \ge a_n \\ x \le b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \sup a_n \\ x \le \inf b_n \end{cases} \Leftrightarrow a \le x \le b$.

Théorème de Bolzano–Weierstrass :
Toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit bornée, a et b des réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a \le u_n \le b$.
On construit une suite K_n de segments de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{p \in \mathbb{N}, u_p \in K_n\}$ soit infini :

- On pose $K_0 = [a,b]$. Alors $A_0 = \mathbb{N}$, infini.
- Si on a construit K_n de sorte que A_n soit infini, disons $K_n = [a_n, b_n]$:

On pose $J_n = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$, $J'_n = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$
et $B_n = \{p \in \mathbb{N}, u_p \in J_n\}$, $B'_n = \{p \in \mathbb{N}, u_p \in J'_n\}$.
Alors $K_n = J_n \cup J'_n$ et $A_n = B_n \cup B'_n$.
Comme A_n est infini, l'un au moins entre B_n et B'_n l'est.
Si B_n est infini, on pose $K_{n+1} = J_n$ et $A_{n+1} = B_n$, sinon on pose $K_{n+1} = J'_n$ et $A_{n+1} = B'_n$. Donc par construction A_{n+1} est infini.

On vérifie immédiatement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, l(K_n)=\dfrac{b-a}{2^n}$.

Par ailleurs, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments emboîtés de $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers 0. Soit alors l l'unique élément de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Montrons que l est valeur d'adhérence de u.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe alors $n\in\mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b-a}{2^n}<\varepsilon$.

Alors $K_n\subset B(l,\varepsilon)$.

De plus, A_n est infini.

Donc $\forall p\in\mathbb{N}, \exists q\geq p, q\in A_n$

C'est-à-dire $\forall p\in\mathbb{N}, \exists q\geq p, \|u_p-l\|<\varepsilon$.

Corollaire :

Si X est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, alors toute suite de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X. On dit dans ce cas que X est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence l, qui est nécessairement dans $\overline{X}=X$.

Corollaire 2 :

Toute suite complexe bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

B) Suites de Cauchy

Définition :

Soit E un evn, et $u\in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est de Cauchy lorsque :

$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall(n,p)\in\mathbb{N}^2, \left(p\geq n_0 \text{ et } q\geq n_0 \Rightarrow \|u_p-u_q\|<\varepsilon\right)$

Ou encore : $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \forall p\in\mathbb{N}, \|u_{n+p}-u_n\|<\varepsilon$

Proposition :

Toute suite convergente de E est de Cauchy.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $l\in E$.

Soit $\varepsilon>0$. Alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0, \|u_n-l\|\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tels que $p\geq n_0$ et $q\geq n_0$, on a :

$\|u_p-u_q\|\leq\|u_p-l\|+\|u_p-l\|\leq\varepsilon$

Proposition :

Toute suite de Cauchy dans E est bornée.

Démonstration :

Posons $\varepsilon=1$. Il existe alors $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $q\geq n_0, p\geq n_0 \Rightarrow \|u_p-u_q\|\leq\varepsilon$

Donc, pour $p \geq n_0$, $\|u_p - u_{n_0}\| \leq \varepsilon$, soit $\|u_p\| \leq \varepsilon + \|u_{n_0}\|$.

Posons $M = \max\left(\|u_{n_0}\| + 1, \max_{n<n_0}\|u_n\|\right)$.

Ainsi, par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

Théorème (Critère de Cauchy) :
Toute suite *complexe* est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Démonstration :
Un premier sens a déjà été montré.
Pour l'autre : soit u une suite complexe de Cauchy.
Alors u est bornée, donc admet une valeur d'adhérence l.
Montrons que $u \to l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n_0, q \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs, il existe $p \geq n_0$ tel que $\|u_p - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour $q \geq n_0$, $\|u_q - l\| \leq \|u_p - u_q\| + \|u_p - l\| \leq \varepsilon$.

C) Parties denses de $\mathbb{R}$.

Proposition :
Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
On a l'équivalence :
X est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow X$ coupe tout *intervalle* ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration :

$\Rightarrow$: c'est un cas particulier d'un théorème précédent, étant donné qu'un intervalle ouvert est aussi une partie ouverte.

$\Leftarrow$: Supposons que X coupe tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors X coupe toute boule ouverte de $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \overline{X}$. Donc X est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition :
Soit G un sous-groupe non vide de $(\mathbb{R},+)$, non nul.
Alors une, et une seule, de ces propriétés est vérifiée :
(1) G est dense dans $\mathbb{R}$.
(2) Il existe $a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$

Démonstration :
Posons $a = \inf G^+$ (où $G^+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$)
1[er] cas : $a > 0$.
Montrons déjà que $a \in G^+$:
Supposons que $a \notin G^+$.
Alors $[a,2a[\cap G^+ \neq \varnothing$ puisque $a = \inf G^+$.
Soit alors $x \in [a,2a[\cap G^+$.
Alors $x \neq a$. Soit alors $y \in [a,x[\cap G^+$ (qui est non vide puisque $a = \inf G^+$)
Ainsi, $x - y > 0$ et $x - y < a$ car $x, y \in [a,2a[$.
Enfin, $x - y \in G$ car G est un groupe et $x, y \in G$.

Donc $x-y\in G^+$ et $x-y<a$, ce qui est impossible car $a=\inf G^+$.

Donc $a\in G^+$.

Montrons qu'alors $G=a\mathbb{Z}$. Soit $x\in G$, et posons $p=\left[\dfrac{x}{a}\right]$.

Alors $p\leq \frac{x}{a}<p+1$, donc $pa\leq x<pa+a$.

Soit $0\leq x-pa<a$, donc $x-pa\in G$

Donc $x-pa=0$. Donc $x\in a\mathbb{Z}$.

Réciproquement, on a bien $a\mathbb{Z}\subset G$ puisque *G* contient *a* et est un groupe.

2ème cas : $a=0$.

Montrons qu'alors *G* rencontre tout intervalle ouvert.

Soient *x*, *y* deux réels avec $x<y$.

Montrons que $G\cap \left]x,y\right[\neq\varnothing$.

Déjà, $G^+\cap \left]0,y-x\right[\neq\varnothing$ car $0=\inf G^+$, $y-x>0$ et $0\notin G^+$.

Soit alors $b\in G^+\cap \left]0,y-x\right[$.

Alors $\left]\frac{x}{b},\frac{y}{b}\right[$ est un intervalle ouvert, de longueur $\frac{y-x}{b}>1$, donc contient un entier $p\in\mathbb{Z}$.

Donc $pb\in G\cap\left]x,y\right[$ (car $b\in G^+$ et *G* est un groupe donc $pb\in G$, et de plus par construction $pb\in\left]x,y\right[$ donc pb est dans l'intersection)

Donc *G* est dense dans $\mathbb{R}$.

Conséquence :

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient *a* et *b* deux réels avec *b* non nul. Alors $H=a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$. En effet :

- Supposons que $H=c\mathbb{Z}$ où $c\in\mathbb{R}^*$ (ainsi, *H* n'est pas dense dans $\mathbb{R}$)

Comme $a,b\in H$, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $a=pc$ et $b=qc$.

Comme $b\neq 0$, on a $q\neq 0$, et $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$.

- Supposons maintenant que $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$

Soit alors $x\in H$. Il existe $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $x=na+mb$.

Soit $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$. Ainsi, $x=b(n\frac{a}{b}+m)=b(n\frac{p}{q}+m)=\frac{b}{q}(np+mq)$

Donc $x\in\frac{b}{q}\mathbb{Z}$.

Donc $H\subset\frac{b}{q}\mathbb{Z}$. Donc *H* n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

D'où l'équivalence.

V Limites et continuité

Soient *E*, *F* des evn.

A) Limite d'une fonction en un point

Soit *A* une partie de *E*, $f:A\to E$, *a* un point adhérent à *A* et *b* un point de *F*.

Définition :

On dit que la fonction *f* admet le point *b* pour limite au point *a* lorsque, pour tout voisinage *V* de *b* dans *F*, il existe un voisinage *W* de *a* dans *E* tel que $W \cap A \subset f^{-1}(V)$

Ou encore lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in A, \|x-a\| \leq r \Rightarrow \|f(x)-b\| \leq \varepsilon$

Ou : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \overline{B}(a,r) \cap A \subset f^{-1}(\overline{B}(b,\varepsilon))$

Si $a \in A$, on dit alors que *f* est continue en *a*.

Théorème (caractérisation séquentielle des limites) :

La fonction *f* admet *b* pour limite en *a* si et seulement si l'image par *f* de toute suite de limite *a* est une suite de limite *b*.

Démonstration :

- Supposons que $f \underset{a}{\to} b$. Soit $u \in A^{\mathbb{N}}$, supposons que $u \underset{+\infty}{\to} a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $r > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x-a\| \leq r \Rightarrow \|f(x)-b\| \leq \varepsilon$.

Il existe aussi $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq r$.

Donc, si $n \geq n_0$, $\|u_n - a\| \leq r$, d'où $\|f(u_n) - a\| \leq \varepsilon$.

Donc $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

- Dans l'autre sens : montrons la contraposée.

Supposons que $\text{non}(f \underset{a}{\to} b)$.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $\forall r > 0, \exists x \in A, \|x-a\| \leq r \text{ et } \|f(x)-b\| > \varepsilon$.

Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ tel que $\|x_n - a\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|f(x_n) - a\| > \varepsilon$.

Alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $\text{non}(f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b)$.

Conséquences :

La limite de *f* en *a*, si elle existe, est unique.

Les théorèmes opératoires classiques sont vérifiés.

B) Relation de comparaison, développements limités

- Dans le cadre réel : voir cour de sup
- Dans le cadre général : plus tard.

C) Applications continues

Soit *A* une partie de *E*, et $f : A \to E$ une application.

Définition :

On dit que *f* est continue si *f* est continue en tout point de *A*.

Théorème :

Si *X* est une partie dense de *A* et si *f* est continue, alors $f_{/X} = 0 \Rightarrow f = 0$.

Démonstration :

Supposons que $f_{/X} = 0$. Soit $a \in A$.

Comme $A \subset \overline{X}$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0$. Donc $f(a) = 0$.

Conséquence :

Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense de A, alors elles sont égales.

Théorème :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur A.

(2) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de A.

(3) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de A.

Démonstration :

$(1) \Rightarrow (2)$:

Soit f continue sur A.

Soit Ω un ouvert de F, et soit $a \in f^{-1}(\Omega)$. On note $b = f(a)$.

Comme f est continue en a, il existe un voisinage W de a tel que $W \cap A \subset f^{-1}(\Omega)$.

Or, $W \cap A \in V_A(a)$. Donc $f^{-1}(\Omega) \in V_A(a)$.

Comme c'est valable pour tout a, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de A.

$(2) \Rightarrow (1)$:

Soit $a \in A$, posons $b = f(a)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ est un ouvert de F.

Donc $f^{-1}(B(b,\varepsilon))$ est un ouvert de A contenant a.

Il existe donc $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A \subset f^{-1}(B(b,\varepsilon))$

C'est-à-dire $\forall x \in A, \|x-a\| < r \Rightarrow \|f(x)-b\| < \varepsilon$.

Enfin :

$(2) \Leftrightarrow \forall \Omega \in O(F), f^{-1}(\Omega) \in O(A)$

$\Leftrightarrow \forall X \in F(F), f^{-1}(C_F(X)) \in O(A)$

$\Leftrightarrow \forall X \in F(F), C_A(f^{-1}(X)) \in O(A)$

$\Leftrightarrow \forall X \in F(F), f^{-1}(X) \in F(A)$

$\Leftrightarrow (3)$

Théorème :

Si $f : A \to F$ est continue, alors son graphe G_f est un fermé de $A \times F$.

Note : On se donne sur $E \times F$ la norme $\|(x,y)\|_{E\times F} = \sup(\|x\|_E, \|y\|_F)$.

Démonstration :

Soit $\varphi : \begin{array}{l} A\times F \to F \\ (x,y) \mapsto y - f(x) \end{array}$. Montrons que φ est continue.

Soient $(x_0, y_0) \in A \times F$ et $\varepsilon > 0$.

Il existe alors $r > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x - x_0\| < r \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall (x,y) \in A \times F$,

$$\begin{aligned} \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leq \min(r, \tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \|(y-f(x))-(y_0-f(x_0))\| &\leq \|y-y_0\| + \|f(x)-f(x_0)\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc φ est continue.

Or, $G_F = \{(x,y), y = f(x)\} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Donc G_F est fermé, puisque c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Définition :

Soient A et B deux parties de E, et $f : A \to B$ une application. On dit que f est un homéomorphisme lorsque f est continue, bijective et lorsque f^{-1} est continue.

Remarque :

L'homéomorphisme f échange les ouverts (resp. les fermés) de A et B.

D) Théorème du point fixe

Soit A une partie de E, et $f : A \to E$ telle que $f(A) \subset A$, et soit $a \in A$.

Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Proposition :

Avec les notations précédentes, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A, alors sa limite est un point fixe de f.

Démonstration :

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ où $l \in A$, alors par continuité $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$, donc $l = f(l)$.

Dans la suite du chapitre, on supposera que $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème :

Si $f : A \to E$ vérifie les conditions :

(1) $f(A) \subset A$ fermée

(2) f est contractante ($\exists k \in \left]0;1\right[, \forall (x,y) \in A^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$)

(C'est-à-dire que f est k-lipschitzienne pour un $k < 1$)

Alors f possède un unique point fixe dans A.

De plus, tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

Démonstration :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k|u_{n+1} - u_n|$

D'où, par récurrence, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

Ainsi, u est de Cauchy. En effet :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors, pour $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} k^i |u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0| \frac{k^n - k^{n+p}}{1-k} \leq \frac{|u_1 - u_0|}{1-k} k^{n_0}$$

Ainsi, si on fixe $\varepsilon > 0$, on peut choisir n_0 tel que $\dfrac{|u_1 - u_0|}{1-k} k^{n_0} \leq \varepsilon$

Et on a alors, pour $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Comme la partie *A* est fermée, sa limite est dans *A*, qui est alors un point fixe de *f*.
D'où l'existence du point fixe.

- Soient *a* et *b* deux points de *A* fixes par *f*.

Alors $|a-b| = |f(a) - f(b)| \leq k|a-b|$.

Donc $(1-k)|a-b| \leq 0$, et comme $|a-b| \geq 0$ et $k < 1$, on a $|a-b| = 0$.

D'où l'unicité.

- Vitesse de la convergence :

On montre par récurrence que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$.

E) Etude générale des suites récurrentes

Soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie :
- Si *I* est stable par *f*
- Sinon, tout dépend de u_0 ; on peut cherche des sous–intervalles stables par *f*.
- Rechercher les points fixes de *f*.

On suppose *f* dérivable au point fixe *a* :

- Si $|f'(a)| < 1$, on a un point fixe attractif.

Si $1 > k > |f'(a)|$, il existe $V \in V_A(a)$ tel que $\forall x \in V, |f(x) - a| \leq k|x-a|$

- Si $|f'(a)| > 1$, on a un point fixe répulsif. $u \to a \Leftrightarrow u$ est stationnaire en *a*.
- Le cas $|f'(a)| = 1$ est un cas litigieux.
- Etudier la monotonie de *f* :
- Si *f* croît, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
- Si *f* décroît, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.
- Etudier le signe de $\varphi(x) = x - f(x)$.
- Si $\varphi \leq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît.
- Si $\varphi \geq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.
- Chercher une majoration ou une minoration de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.