Chapitre 2 : Séries numériques

On fixe dans ce chapitre le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

A) Suites et séries

Définition :

On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de suites de $\mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On appelle u_n le n-ième terme général de la série et S_n la n-ième somme partielle.

Remarque 1 :

La donnée du terme général u_n suffit à déterminer la suite, qu'on notera alors $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Remarque 2 :

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite définie à partir d'un rang n_0, on notera $\sum_{n\geq n_0} u_n$ la série de terme général $v_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_0 \\ u_n \text{ si } n \geq n_0 \end{cases}$

La n-ième somme partielle vaut alors $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$.

Proposition :

L'ensemble des séries à termes dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel par les lois :

$$\lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \mu \sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} \lambda u_n + \mu v_n \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } (u, v) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$$

On notera cet ensemble $S(\mathbb{K})$

Démonstration :

$S(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$, noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2 &\to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u,S) &\mapsto \left(S_n - \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

B) Séries convergentes

Définition :

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, à termes dans $\mathbb{K}$, est convergente lorsque la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On notera alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Attention : la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que pour une série convergente.

Remarque :

On notera $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la somme d'une série convergente $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Théorème :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ on la même nature, et si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$$

Démonstration :

Soient S_n et S'_n les n-ièmes sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Pour $n \geq n_0$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + S'_n.$$

Donc les deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on la même nature, et si elles convergent, on a alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \lim_{n\to+\infty} S'_n$.

Définition :

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente, on appelle n-ième reste de Cauchy de la série le scalaire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1 :

Le reste de Cauchy, lorsqu'il existe, tend vers 0

En effet :

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente, soit S_n sa n-ième somme partielle, et S sa somme. On alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$.

Comme $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$, on a bien $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple :

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

La série est donc convergente, de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$

Le n-ième terme de Cauchy vaut alors $\dfrac{1}{n+1}$.

Proposition :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors u converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n - u_{n+1}$ converge, et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_{n+1} = u_0 - \lim_{n\to+\infty} u_n$

Démonstration :

$\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$.

Attention :

On ne peut pas écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - u_{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1}$

(voir exemple précédent par exemple)

Théorème :

L'ensemble $S_C(\mathbb{K})$ des séries convergentes à termes dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $S(\mathbb{K})$. L'application $\begin{array}{l} S_C(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ \sum_{n\geq 0} u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Démonstration :

Résulte du théorème équivalent sur les suites :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$, d'où, par passage à limite si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

C) Grossière divergence

Théorème :

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Démonstration :

Pour tout $n\in \mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k-\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=0$.

Conséquence :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite ne tendant pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ diverge. On dit dans ce cas que la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ est grossièrement divergente.

Exemples :

- Série grossièrement divergente :

$\sum_{n\geq 0}(-1)^n$

- Série non grossièrement divergente mais divergente :

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

Idée :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\times\frac{1}{4}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\times\frac{1}{8}}+\ldots$$

Plus formellement :

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}=\sum_{m=0}^{n-1}\underbrace{\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}\right)}_{2^m\text{ termes}}$$

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc :

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\geq\sum_{m=0}^{n-1}2^m\times\frac{1}{2^{m+1}}\geq n\times\frac{2^m}{2^{m+1}}\geq\frac{n}{2}$$

Donc $S_{2^m-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. De plus, $u_n\geq 0$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

D) Critère de Cauchy – convergence absolue

Théorème (critère de Cauchy) :

Si $\sum_{n\geq 0}u_n$ est une série de $\mathbb{K}$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge est :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,n\geq n_0\Rightarrow\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|\leq\varepsilon$$

Démonstration :

Cette condition équivaut à :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2, n\geq n_0\Rightarrow\left|S_{n+p}-S_n\right|\leq\varepsilon \text{ (où } S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k\text{)}$$

C'est-à-dire à « $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy », ce qui équivaut dans $\mathbb{K}$ à dire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque :

On note souvent $R_{n,p}=\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k$ le « reste partiel » de la série.

Théorème 2 :

Si $\sum_{n\geq 0}u_n$ est une série de $\mathbb{K}$, alors une condition suffisante pour que $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge est que $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge.

Démonstration :

Si $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge, alors par critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\left.\begin{matrix}n\geq n_0\\ p\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|\leq\varepsilon$. Donc $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge.

Définition :

Si la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ est absolument convergente.

Si $\sum_{n\geq 0}u_n$ est convergente, mais pas absolument, on dit alors qu'elle est semi-convergente.

II Séries à termes réels positif

A) Théorème fondamental

Théorème :

Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série à termes réels positifs. Alors la série converge si et seulement si il existe $M\geq 0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=0}^{n}u_k\leq M$.

Démonstration :

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc converge si et seulement si elle est majorée.

Corollaire :

Si $\sum_{n\geq 0}u_n$ est une série à termes réels positifs divergente, alors $\sum_{k=0}^{n}u_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

B) Critères de comparaison

Théorème (comparaison) :

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont à termes réels positifs, si $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leq v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration :

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leq v_n$ et que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Il existe alors M tel que $\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$. Or, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est croissante.

Donc elle converge, et par passage à la limite, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Conséquence 1 :

Avec les notations précédentes, et pour $n_0\in\mathbb{N}$,

Si $\forall n\geq n_0, u_n\leq v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

En effet, les séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ ont même nature.

Conséquence 2 :

Avec les notations du théorème, et pour $n_0\in\mathbb{N}$, si $\forall n\geq n_0, u_n\leq v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

C'est la contraposée de la première conséquence.

Théorème (domination) :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$, et $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ une série à termes réels positifs.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, et si $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ et $A\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall n\geq n_0, |u_n|\leq A\alpha_n$.

Si de plus $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} A\alpha_n$ converge, et donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Corollaire :

Avec les notations du théorème,

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, et si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ diverge.

Le théorème reste valable en remplaçant O par o.

Théorème (équivalence) :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une suite à termes dans $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geq 0} v_n$ à termes réels positifs.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ ont même nature.

Démonstration :

Posons, pour $n\in\mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$

Il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0$, $\forall n\geq n_0, |w_n| \leq \frac{1}{2}u_n$.

Donc, pour $n\geq n_0$, $0\leq \frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ ont même nature.

Théorème (comparaison logarithmique) :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs, et $n_0\in\mathbb{N}$.

Si $\forall n\geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Démonstration :

Si $\forall n\geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors par récurrence immédiate $\forall n\geq n_0, \frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}$.

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, d'où le résultat.

Corollaire :

Avec les notations du théorème,

Si $\forall n\geq n_0, \frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}$ et si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

C) Suites géométriques, règle de d'Alembert

Rappel :

Calcul des sommes partielles.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $k\neq 1$. Alors $\sum_{n=p}^{q} u_n = \frac{u_p - u_{q+1}}{1-k}$.

Théorème :

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. La série $\sum_{n\geq 0} k^n$ converge si et seulement si $k<1$.

Théorème :

Soit $z\in\mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$, et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration (du deuxième théorème) :

- Si $z=1$, alors $\sum_{k=0}^{n} z^k = n+1$, donc la série diverge.
- Sinon, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

Ainsi, si $|z|>1$, la série ne converge pas car $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \to +\infty$.

Si $|z|<1$, la série converge, de somme $\frac{1}{1-z}$

Si $|z|=1$, $z=e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (car $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$)

Autre méthode : Si $|z|=1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n|=1$, donc $\sum_{n\geq 0} z^n$ est grossièrement divergente.

Théorème :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

(1) S'il existe $k \in]0;1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

(2) S'il existe $k \in [1;+\infty[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Démonstration :

(1) C'est le théorème de comparaison logarithmique avec $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} k^n$.

(2) Son corollaire avec $\sum_{n\geq 0} k^n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Théorème (règle de d'Alembert) :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes réels strictement positifs, supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ où $l \in [0;+\infty]$.

(1) Si $l \in [0;1[$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(2) Si $l \in]1;+\infty]$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

(3) Si $l=1$, le théorème ne permet pas de conclure.

Démonstration :

(1) Si $l<1$, soit alors $k \in]l,1[$.

Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge d'après le théorème précédent.

(2) Si $l>1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

(3) Exemple des séries de Riemann :

Si $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a toujours $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1$, mais suivant le choix de α, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ou diverge.

Exemple :

La série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$ est absolument convergente.

- Si $z = 0$ ok…
- Si $z \neq 0$, alors soit $u_n = \left|\dfrac{z^n}{n!}\right| > 0$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{z^n}\right| = \dfrac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série converge bien absolument.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note alors $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

D) Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on étudie la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$

- Si $\alpha \leq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n^\alpha} \geq 1$, donc la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$:

On va utiliser la décroissance de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq \dfrac{1}{t^\alpha} \leq f(n)$.

Donc $\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} \dfrac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt$.

C'est-à-dire $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \dfrac{1}{t^\alpha} dt \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.

D'où $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \dfrac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{n} \dfrac{1}{t^\alpha} dt + \dfrac{1}{1^\alpha}$

On est ainsi ramené à l'étude de $I_n = \int_1^n \dfrac{1}{t^\alpha} dt$

Si $\alpha = 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \ln n$ donc $I_n \to +\infty$, soit $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \to +\infty$

Si $\alpha < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \to +\infty$

Si $\alpha > 1$, $I_n = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha}$, et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Ainsi :

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est :

Convergente si $\alpha > 1$, divergente si $0 < \alpha \leq 1$, grossièrement divergente si $\alpha \leq 0$.

Théorème :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels positifs.

(1) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(2) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Théorème (règle de Riemann ou « $n^\alpha u_n$ ») :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une suite à termes réels positifs.

(1) S'il existe $\alpha > 1$ et $l \in [0,+\infty[$ tels que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(2) S'il existe $\alpha \leq 1$ et $l \in]0,+\infty[$ tels que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Démonstration :

Si $n^\alpha u_n \to l$ pour $\alpha > 1$ et $l \in [0,+\infty[$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (car $n^\alpha u_n$ est bornée et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive)

Même chose si $\alpha \leq 1$, on a $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ (même raison)

Exemple :

Séries de Bertrand :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 2} u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

- Cas 1 : $\alpha < 1$

Soit $\alpha' \in]\alpha, 1[$.

Alors $n^{\alpha'} u_n = \frac{n^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

- Cas 2 : $\alpha > 1$.

Soit $\alpha' \in]1, \alpha[$.

Alors $n^{\alpha'} u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln^\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

- Cas 3 : $\alpha=1$.

Si $\beta\le 0$, alors $nu_n=\ln^{-\beta} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases}+\infty \text{ si } \beta<0\\ 1 \text{ si } \beta=0\end{cases}$, et $\sum_{n\ge2} u_n$ diverge.

Si $\beta>0$:

On étudie $\sum_{n\ge2}\frac{1}{n\ln^\beta n}$

Soit $f:\begin{array}{l}[2;+\infty[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto t\ln^\beta t\end{array}$. Alors f est de classe C^∞.

Pour $t\in[2,+\infty[$, $f'(t)=\frac{-\ln\beta-\beta\ln^{\beta-1}t}{t^2\ln^{2\beta}t}\le 0$. Donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

Pour $n\ge 2$ et $t\in[n,n+1]$, on a : $f(n+1)\le f(t)\le f(n)$,

Donc $f(n+1)\le\int_n^{n+1} f(t)\le f(n)$.

Or, $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{n\ln^\beta n}{(n+1)\ln^\beta(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Donc $\frac{1}{f(n)}\int_n^{n+1} f(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, soit $\int_n^{n+1} f(t)\underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$.

Donc les séries $\sum_{n\ge2}\frac{1}{n\ln^\beta n}$ et $\sum_{n\ge2}\int_n^{n+1}\frac{1}{t\ln^\beta t}dt$ on la même nature.

On étudie alors $S_n=\int_2^{n+1}\frac{1}{t\ln^\beta t}dt$.

On a : $S_n=\int_2^{n+1}\frac{1}{t\ln^\beta t}dt=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{1}{u^\beta}du$

Ainsi, si $\beta\le1$, $S_n\to+\infty$, et si $\beta>1$, S_n est bornée.

Conclusion :

La série $\sum_{n\ge2}\frac{1}{n^\alpha\ln^\beta n}$ converge si $\begin{cases}\alpha>1\\ \text{ou } \alpha=1 \text{ et } \beta>1\end{cases}$ et diverge si $\begin{cases}\alpha<1\\ \text{ou } \alpha=1 \text{ et } \beta\le1\end{cases}$

III Sommation des relations de comparaison

A) Domination, prépondérance

Théorème :

Soit $\sum_{n\ge0}\alpha_n$ une série à termes réels positifs, et $\sum_{n\ge0}u_n$ une série de $\mathbb{K}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$.

(1) Si la série $\sum_{n\ge0}\alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\ge0}u_n$ converge, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k\right)$,

c'est-à-dire $R_n(u)\underset{n\to+\infty}{=}O(R_n(\alpha))$

(2) Si la série $\sum_{n\ge0}\alpha_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n}u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)$, ou $S_n(u)\underset{n\to+\infty}{=}O(S_n(\alpha))$.

Démonstration :

(1) On sait déjà qu'alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

Par ailleurs, il existe $A>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geq n_0$, $|u_n|\leq A\alpha_n$.

Donc, pour $n\geq n_0$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right|\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}|u_k|\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} A\alpha_k$,

c'est-à-dire $\forall n\geq n_0, |R_n(u)|\leq AR_n(\alpha)$, donc $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(R_n(\alpha))$.

(2) Il existe toujours $A>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geq n_0$, $|u_n|\leq A\alpha_n$.

Donc, pour $n>n_0$:

$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|\leq \sum_{k=0}^{n_0}|u_k|+\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k|\leq \sum_{k=0}^{n_0}|u_k|+A\sum_{k=n_0+1}^{n}\alpha_k$.

Comme $\sum_{n\geq n_0+1}\alpha_n$ diverge, il existe $n_1>n_0$ tel que $\sum_{k=0}^{n_0}|u_k|\leq A\sum_{k=n_0+1}^{n_1}\alpha_k$

Ainsi, pour $n\geq n_1$, $|S_n(u)|\leq 2AS_n(\alpha)$.

Donc $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(S_n(\alpha))$

Théorème :

Soit $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ une série à termes réels positifs, $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$.

(1) Si $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, et $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(\alpha))$

(2) Si $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ diverge, alors $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} o(S_n(\alpha))$

Démonstration :

Même que précédemment en remplaçant « $\exists A>0$ » par « $\forall\varepsilon>0$ ».

B) Equivalence

Théorème :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries de $\mathbb{K}$ dont l'une au moins est à termes réels positifs et telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Alors ces séries sont de même nature, et :

(1) Si elles convergent, $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$

(2) Si elles divergent, $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(v)$.

Démonstration :

Supposons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs. Alors $v_n-u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Donc :

(1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n-v_n$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ aussi.

De plus, $\underbrace{R_n(v-u)}_{R_n(v)-R_n(u)} \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(u))$

Donc $R_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)$

(2) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $S_n(v-u) \underset{n\to+\infty}{=} o(S_n(u))$.

Donc $S_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(u)$, et $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Application : lemme de Césaro :

Théorème :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$ qui converge vers l, alors la suite $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers l.

Démonstration :

On compare $\sum_{n\geq 0} u_n - l$ et $\sum_{n\geq 0} 1$:

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}, 1\geq 0 \\ u_n - l = o(1) \\ \sum_{n\geq 0} 1 \text{ diverge} \end{cases}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n}(u_k - l) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$

Soit $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - l \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

Théorème :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle tendant vers $+\infty$, alors $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$.

Démonstration :

Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0$, $u_n \geq 0$. Alors :

$$\begin{cases} \forall n\geq n_0, u_n\geq 0 \\ 1 = o(u_n) \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$, d'où $1 \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

C) Comportement asymptotique des séries de Riemann

Soit $\alpha > 0$. Alors $f : \underset{t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}}{[1,+\infty[\to \mathbb{R}}$ est décroissante.

Donc $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha}$. Comme $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-1)^\alpha}$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt$

Ces deux suites $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont à termes réels positifs. D'où :

- Si $\alpha < 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

- Si $\alpha = 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$
- Si $\alpha > 1$, les séries convergent, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$

Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

IV Comparaison d'une série et d'une intégrale

A) Cas d'une fonction positive décroissante

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

On veut comparer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1)$

Donc $0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$.

La série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est donc à termes positifs, et $S_n(w) = \sum_{k=1}^{n} w_k \leq \sum_{k=1}^{n} \big(f(k-1) - f(k)\big)$

Soit $S_n(w) \leq f(0) - f(n) \leq f(0)$

Donc $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge, et de plus $\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_0^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} f(n)$.

D'où le théorème :
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.
Alors :

(1) La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ (définie pour $n \geq 1$) converge.

(2) La série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge si et seulement si *f* est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est-à-dire que la suite $\left(\int_0^n |f(t)|dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge), et dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

B) Cas d'une fonction de classe C^1.

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que *f'* soit intégrable sur $[0,+\infty[$.

Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

On a alors :

$$w_n = [(t-n+1)f(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)dt - f(n) = -\int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)dt$$

Donc $|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt$

Et $\sum_{k=1}^n |w_k| \leq \int_0^n |f'(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} |f'(t)|dt$.

Donc la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est absolument convergente.

D'où le théorème :

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que *f'* soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Alors :

(1) La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ (définie pour $n\in\mathbb{N}^*$) converge absolument.

(2) Si de plus *f* est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge, et dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$

C) Exemple : la constante d'Euler

Soit $f: \begin{array}{l}[0,+\infty[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \frac{1}{1+t}\end{array}$, positive, continue et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{1+t}dt - \frac{1}{1+n}$

Et $\sum_{k=1}^n w_k = \int_0^n \frac{1}{1+t}dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + 1$.

On pose alors $\gamma = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} w_k$

On a $0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \leq f(0) = 1$

Donc $\gamma \in [0;1]$, et :

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)}$.

Valeur approchée : $\gamma = 0{,}577$.

V Exemples de séries semi-convergentes

A) Cas des séries alternées – critère de Leibniz

Définition :

On appelle série alternée toute série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ telle que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant.

Si ce signe est positif, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$, et si ce signe est négatif, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$.

Théorème (critère spécial des séries alternées) :
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée.
Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, alors la série converge.

Démonstration :

On suppose par exemple que $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n u_n \geq 0$.

On étudie la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, ou plutôt $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

- $S_{2n} - S_{2n+2} = -u_{2n+1} - u_{2n+2} = |u_{2n+1}| - |u_{2n+2}| \geq 0$.

Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- $S_{2n+1} - S_{2n+3} = -u_{2n+2} - u_{2n+3} = |u_{2n+3}| - |u_{2n+2}| \leq 0$.

Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}|$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n} \geq S_{2n+1}$, et $S_{2n} - S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes, et convergent vers une même limite S.

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S.

Exemple :

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Information sur la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ (toujours avec $(-1)^n u_n \geq 0$) :

- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, S \in [(S_n, S_{n+1})]$

($[(x,y)]$ signifie $[\min(x,y), \max(x,y)]$)

- $\forall n\in \mathbb{N}, |R_n| = |S - S_n| \leq |S_n - S_{n+1}| \leq |u_{n+1}|$
- $S \geq S_1 = |u_0| - |u_1| \geq 0$. Donc S est du signe de u_0.

(Dans le cas d'une série tronquée, S est du signe du premier terme)

Remarque :
La réciproque du théorème est fausse :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \text{ si } n \equiv 0[2] \\ -\frac{1}{n^3} \text{ si } n \equiv 1[2] \end{cases}$$

$\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente, mais ne vérifie pas le critère de Leibniz.

B) Exemples d'utilisation de groupements de termes

Exemple 1 :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+z}$ où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Méthode 1 :

On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Alors $v_n = \dfrac{1}{2n+z} - \dfrac{1}{2n+1+z} = \dfrac{1}{(2n+z)(2n+1+z)}$

Ainsi, $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente.

Soit $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Alors $V_n = U_{2n+1}$, donc $U_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} V$

De plus, $U_{2n} = U_{2n+1} - u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} V$.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Méthode 2 :

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + u_{n+1}$.

Alors $|w_n| = \left| \dfrac{1}{(n+z)(n+1+z)} \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge, disons vers W.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k + u_{k+1}) = 2\sum_{k=0}^{n} u_k - u_0 + u_{n+1}$

Donc $U_n = \dfrac{1}{2}(w_n + u_0 - u_{n+1})$, et $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}(W + u_0)$.

Exemple 2 :

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} n\right) \times \dfrac{1}{n}$.

On a : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)=\begin{cases}1 \text{ si } n\equiv 0[3]\\ \frac{-1}{2} \text{ sinon}\end{cases}$

On pose alors $v_n=u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}$ pour $n\geq 1$

Ainsi,

$$v_n=\frac{1}{3n}-\frac{1/2}{3n+1}-\frac{1/2}{3n+2}=\frac{1}{3n}\left(1-\frac{1/2}{1+\frac{1}{3n}}-\frac{1/2}{1+\frac{2}{3n}}\right)$$

$$=\frac{1}{3n}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\sum_{n\geq 0}v_n$ converge, et on vérifie qu'alors $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge…

C) Exploitation de développements limités

Exemple 1 :

$\sum_{n\geq 0}u_n$ où $u_n=\frac{(-1)^n}{n+z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Rappel :

Pour une variable complexe *u*,

$\frac{1}{1+u}=1-u+\underset{u\to 0}{o}(|u|)$ (en effet, $\frac{1}{1+u}=1-u+\frac{u^2}{1+u}$)

Donc $u_n=\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{z}{n}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n}$ converge (critère de Leibniz), ainsi que la série $\sum_{n\geq 0}u_n-\frac{(-1)^n}{n}$ (Domination)

Donc $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge.

Exemple 2 :

$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$. On pose $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$.

Déjà, pour $n\geq 1$, $\sqrt{n}>(-1)^n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Pour $n\geq 1$, on a :

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Donc $\sum_{n\geq 1}u_n$ diverge (car sinon $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ convergerait aussi)

Attention : on a pourtant $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, terme général d'une série convergente.

En général, si on a deux suites u et v telles que $|u_n| \sim |v_n|$ et $|v_n|$ est décroissante, on n'a pas pour autant $|u_n|$ décroissante, même à partir d'un certain rang.

D) Transformation d'Abel (hors–programme)

Idée : Intégration par parties discrète.
On cherche à calculer $\sum a_k b_k$.

On pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n+1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} B_k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{p} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_{n+1} B_n + a_{p+1} B_p$$

$$= \left[a_{p+1} B_p - a_{n+1} B_n \right] - \sum_{k=n+1}^{p} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

Application : Théorème d'Abel.
Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle, et $(b_k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right)_{n\geq 0}$ soit bornée. Alors la série $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ converge.

Démonstration :
On va vérifier le critère de Cauchy.

Posons $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, et $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq M$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq |a_{n+p+1} B_{n+p}| + |a_{n+1} B_n| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k| |B_k|$$

$$\leq (a_{n+p+1} + a_{n+1}) M + M \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k - a_{k+1}}_{= a_{n+1} - a_{n+p+1}}$$

C'est-à-dire $|R_{n,p}| \leq 2M a_{n+1}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, 2M a_{n+1} \leq \varepsilon$.

Donc, si $n \geq n_0$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $|R_{n,p}| \leq \varepsilon$.

Donc $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ converge.

On pouvait aussi simplement remarquer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_{p+1} B_p - a_1 B_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (a_k - a_{k+1}) B_k}_{\substack{=O(a_k - a_{k+1}) \text{ terme général} \\ \text{d'une série convergente}}}$$

VI Application

A) Développement décimal d'un réel

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

On appelle développement décimal de x toute suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(1) $d_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall n \geq 1, d_n \in [\![0,9]\!]$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = x$.

Remarque :

Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), alors $\forall n \geq 1, \dfrac{d_n}{10^n} \leq \dfrac{9}{10^n}$, donc la série converge bien.

Existence :

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = E(10^n x)$, et $\begin{cases} d_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = u_n - 10u_{n-1} \end{cases}$.

Alors :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \in \mathbb{N}$ …

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 10^n x < u_n + 1$,

Soit $10u_n \leq 10^{n+1} x < 10u_n + 10$

Donc $10u_n \leq u_{n+1} \leq 10u_n + 9$.

D'où $0 \leq d_{n+1} \leq 9$.

(2) Montrons par récurrence que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k}$.

- $u_0 = d_0$.

- Si $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_{n+1} = d_{n+1} + 10\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k} = d_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} d_k 10^{n+1-k}$$

Ce qui achève la récurrence.

Or, on a $u_n \leq 10^n x < u_n + 1$, donc $\dfrac{u_n}{10^n} \leq x < \dfrac{u_n}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$, soit $x - \dfrac{1}{10^n} < \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} \leq x$.

D'où $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ d'après le théorème des gendarmes.

Définition :

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est décimal s'il existe $(a,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{a}{10^n}$.

Etude de l'unicité :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ admettant deux développements décimaux $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $p = \min\{n \in \mathbb{N}, d_n \neq e_n\}$. On va supposer par exemple que $d_p < e_p$.

On a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e_n}{10^n}$

Donc $\sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{d_n}{10^n} = \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{e_n}{10^n}$, soit $\sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{d_n}{10^{n-p}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{e_n}{10^{n-p}}$

Donc $d_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{10^{n-p}} = e_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{e_n}{10^{n-p}}$ (E)

Or, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{10^{n-p}} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{9}{10^{n-p}} = \dfrac{9/10}{1-1/10} = 1$, et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{e_n}{10^{n-p}} \geq 0$, et $d_p \leq e_p - 1$.

D'après l'égalité (E), ces trois inégalités sont des égalités.

Donc $e_p = d_p + 1$, et $\forall n \geq p+1, \begin{cases} d_n = 9 \\ e_n = 0 \end{cases}$.

En particulier, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e_n}{10^n}$ est décimal, et on écrit :

$$\begin{cases} x = d_0, d_1 \ldots d_p 99\ldots \\ x = d_0, d_1 \ldots e_p 00\ldots \end{cases}$$

Réciproquement, tout nombre décimal admet exactement deux développements décimaux.

Définition :

On appelle développement décimal propre de $x \in \mathbb{R}^+$ son unique développement décimal qui n'est pas stationnaire à 9.

Remarque :

Si x admet un développement décimal stationnaire à 9, alors x est décimal.

Formule de Stirling :

On cherche un développement asymptotique de $\ln n! = \sum_{k=2}^{n} \ln k$.

On considère la fonction $f : \begin{array}{l} [1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln t \end{array}$.

C'est une fonction de classe C^1 (même C^∞), mais f' n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. On pose $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ pour $n \geq 2$.

On a : $\sum_{k=2}^{n} w_k = \int_1^n \ln t dt - \sum_{k=2}^{n} \ln k = n \ln n - n + 1 - \ln n!$.

Par ailleurs, en faisant une intégration par parties :

$w_n = [(t-n+1)f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} (n-t+1) f'(t)dt - f(n)$

$$w_n = -\int_{n-1}^{n} (n-t+1) f'(t)dt$$
$$= -\left[\frac{(t-n+1)^2}{2} f'(t)\right]_{n-1}^{n} + \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{2} f''(t)dt$$
$$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n} \frac{-(t-n+1)^2}{t^2} dt$$

On pose $x_n = \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{t^2} dt$.

Alors $0 \le x_n \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2} dt \le \frac{1}{(n-1)^2}$, donc $\sum_{n\ge 2} x_n$ converge.

Ainsi,

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \frac{-1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} x_k\right) = \frac{-1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 + \sum_{k=2}^{n} x_k\right)$$
$$= \frac{-1}{2}\left(\ln n + \gamma - 1 + o(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k + o(1)\right)$$

Donc $n\ln n - n + 1 - \ln n! = \frac{-1}{2}\left(\ln n + \gamma - 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k + o(1)\right)$

On pose $K = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} x_k$.

Donc $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + o(1)$

Soit : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K$.

Calcul de e^K : On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Alors, pour $n \ge 2$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$
$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Ainsi, $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{2n}e^K}{2^{2n}\left(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K\right)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{e^K\sqrt{2n}}$

Et $I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}\left(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K\right)^2}{\frac{(2n+1)^{2n+1}}{e^{2n+1}}\sqrt{2n+1}e^K} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{K+1}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} 2\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^K}{2\sqrt{2n}}$

Or, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $I_{2n}\geq I_{2n+1}\geq I_{2n+2}$, donc $\frac{\pi}{e^K\sqrt{2n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^K}{2\sqrt{2n}}$, c'est-à-dire $e^{2K}=2\pi$, ou $e^K=\sqrt{2\pi}$.

Ainsi, $\boxed{n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi.n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

B) Espaces $l^1(\mathbb{K})$ et $l^2(\mathbb{K})$.

Théorème, définition :

On note $l^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge. Alors $l^1(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Si de plus on note $N_1 : \begin{array}{l} l^1(\mathbb{K})\to\mathbb{R} \\ u\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\end{array}$, alors N_1 est une norme sur le $\mathbb{K}$-ev $l^1(\mathbb{K})$.

Démonstration :

Déjà, $l^1(\mathbb{K})\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $0\in l^1(\mathbb{K})$, donc $l^1(\mathbb{K})\neq\varnothing$.

Soient maintenant $\lambda\in\mathbb{K}$, $u,v\in l^1(\mathbb{K})$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$\sum_{k=0}^{n}|\lambda u_k+v_k|\leq|\lambda|\sum_{k=0}^{n}|u_k|+\sum_{k=0}^{n}|v_k|\leq|\lambda|N_1(u)+N_2(u)$.

Donc $\sum_{n\geq 0}|\lambda u_n+v_n|$ converge, donc $\lambda u+v\in l^1(\mathbb{K})$.

De plus, $N_1(\lambda u)=\sum_{k=0}^{+\infty}|\lambda u_k|=|\lambda|N_1(u)$, et $N_1(u+v)=\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k+v_k|\leq N_1(u)+N_1(v)$.

Donc $l^1(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et de plus on a clairement $\forall u\in l^1(\mathbb{K}), N_1(u)\geq 0$.

Soit maintenant $u\in l^1(\mathbb{K})$, supposons que $N_1(u)=0$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=0$, donc N_1 est une norme sur $l^1(\mathbb{K})$.

Théorème, définition :

On note $l^2(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites u de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\geq 0}|u_n|^2$ soit convergente.

Alors $l^2(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

On note $\langle\cdot|\cdot\rangle : \begin{array}{l} l^2(\mathbb{K})\times l^2(\mathbb{K})\to\mathbb{K} \\ (u,v)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\bar{u}_n v_n\end{array}$

Alors $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire, et on note N_2 sa norme euclidienne associée.

(On verra plus tard ce qu'est un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-ev)

Démonstration (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ pour le produit scalaire) :

- Déjà, $l^2(\mathbb{K})$ est une partie non vide de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Soient $\lambda\in\mathbb{K}, u\in l^2(\mathbb{K})$. Alors clairement $\sum_{n\geq 0}|\lambda u_n|^2$ converge.
- Soient $u,v\in l^2(\mathbb{K})$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n+v_n|^2\leq |u_n|^2+2|u_n||v_n|+|v_n|^2\leq 2|u_n|^2+2|v_n|^2$

Donc $\sum_{n\geq 0}|u_n+v_n|^2$

- Ainsi, $l^2(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
- De plus, l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien définie et est un produit scalaire :

Soient $u,v\in l^2(\mathbb{R})$.

Alors $\sum_{n\geq 0}\overline{u}_n v_n$ converge :

$\sum_{k=0}^{n}|\overline{u}_k v_k|\leq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}|u_k|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}|v_k|^2$ (car pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha\beta\leq\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$)

Soit $\sum_{k=0}^{n}|\overline{u}_k v_k|\leq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|v_k|^2$

D'où la convergence. De plus, $\langle u|v\rangle\leq\frac{1}{2}\langle u|u\rangle+\frac{1}{2}\langle v|v\rangle\leq\frac{1}{2}(N_2(u)^2+N_2(v)^2)$

Elle est symétrique : $\sum_{k=0}^{+\infty}u_n v_n=\sum_{k=0}^{+\infty}v_n u_n$

Linéaire par rapport à la première variable : $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_n+v_n)w_n=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}u_n w_n+\sum_{k=0}^{+\infty}v_n w_n$

Positive : $\sum_{k=0}^{+\infty}u_n^2\geq 0$.

Définie positive : $\sum_{k=0}^{+\infty}u_n^2=0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}, u_n=0$.

Vocabulaire :

N_1 s'appelle la norme de la convergence en moyenne

N_2 s'appelle la norme de la convergence en moyenne quadratique.

L'espace $l^1(\mathbb{K})$ est appelé l'espace des suites sommables

L'espace $l^2(\mathbb{K})$ est appelé l'espace des suites de carré sommable

VII Familles sommables

Problème :

Soit I un ensemble, $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

Comment définir $\sum_{i\in I}\alpha_i$ avec de bonnes propriétés ?

A) Famille de réels positifs

Définition (sommabilité) :

Soit I un ensemble, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I, et, pour $J\in P_f(I)$, $s_J(\alpha)=\sum_{i\in J}\alpha_i$.

On dit que la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque $\{s_J(\alpha), J\in P_f(I)\}$ est majoré, et on pose alors $s_I(\alpha)=\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup_{J\in P_f(I)} s_J(\alpha)$

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose alors $\sum_{i\in I}\alpha_i=+\infty$.

Définition :

On appelle support de $(\alpha_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\operatorname{supp}(\alpha)=\{i\in I, \alpha_i\neq 0\}$.

Théorème :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs, alors :

$(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\alpha_i)_{i\in \operatorname{supp}(\alpha)}$ est sommable, et dans ce cas, $\sum_{i\in I}\alpha_i=\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}\alpha_i$.

Démonstration :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme S, alors pour tout $J\in P_f(\operatorname{supp}(\alpha))$, J est aussi une partie finie de I, donc $s_J(\alpha)=\sum_{i\in J}\alpha_i\leq S$.

D'où la sommabilité de $(\alpha_i)_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}$, et $\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}\alpha_i\leq S$.

Supposons maintenant que $(\alpha_i)_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}$ est sommable, de somme S.

Pour $J\subset I$ fini, $J\cap\operatorname{supp}(\alpha)$ est finie, et :

$$\sum_{i\in J}\alpha_i=\sum_{i\in J\cap\operatorname{supp}(\alpha)}\alpha_i+\sum_{i\in J\setminus\operatorname{supp}(\alpha)}\alpha_i=\sum_{i\in J\cap\operatorname{supp}(\alpha)}\alpha_i$$

Donc $\forall J\in P_f(I), \sum_{i\in J}\alpha_i\leq\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}\alpha_i=S$

Donc $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup_{J\in P_f(I)}\sum_{i\in J}\alpha_i\leq S$.

Théorème :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\operatorname{supp}(\alpha)$ est un ensemble au plus dénombrable.

Démonstration :

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $J_n=\left\{i\in I, \alpha_i>\frac{S}{2^n}\right\}$ où S est la somme de $(\alpha_i)_{i\in I}$.

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, J_n est une partie finie de I, et $\#J_n<2^n$.

En effet, dans le cas contraire, J_n contiendrais une partie K de cardinal 2^n, et on aurait $\sum_{i\in K}\alpha_i>2^n.\frac{S}{2^n}=S$, ce qui est impossible car $S=\sup_{J\in P_f(I)}\sum_{i\in J}\alpha_i$.

De plus, pour $i \in I$, si $\alpha_i > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_i > \dfrac{S}{2^n}$.

Donc $\mathrm{supp}(\alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, donc $\mathrm{supp}(\alpha)$ est au plus dénombrable.

Remarque :
En pratique, on aura alors $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}^2$.

B) Familles dénombrables de réels positifs

Théorème :

Soient I un ensemble dénombrable, $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de I telles que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ (on notera $J_n \uparrow I$)

Alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, auquel cas $\sum_{i\in I} \alpha_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} \alpha_i$.

Démonstration :

Si $\sum_{i\in I} \alpha_i = S < +\infty$, alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{J_n}(\alpha) \le S$.

De plus, comme $J_n \subset J_{n+1}$, on a $s_{J_n}(\alpha) \le s_{J_{n+1}}(\alpha)$. Donc la suite $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} \alpha_i \le S$

Supposons maintenant que $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L.

Montrons déjà un lemme :

Soit $K \in P_f(I)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset J_n$.

En effet, pour tout $i \in K$, comme $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $i \in J_{n_i}$.

Posons alors $n = \max_{i\in K} n_i$. Pour tout $i \in K$, on a alors $n_i \le n$, donc $i \in J_{n_i} \subset J_n$.

Donc $K \subset J_n$.

Maintenant :

Soit $K \in P_f(I)$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset J_n$, et on a alors $s_K(\alpha) \le s_{J_n}(\alpha)$.

Comme $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $s_K(\alpha) \le L$, et $\sup_{K\in P_f(I)} s_K(\alpha) \le L < +\infty$.

Donc $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} \alpha_i \le L$.

Théorème :

Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de réels positifs, et $\varphi : \mathbb{N} \to I$ une bijection.

Alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\ge 0} \alpha_{\varphi(n)}$ converge, auquel cas $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{\varphi(n)}$.

Démonstration :

On applique le théorème précédent avec $J_n = \{\varphi(k), k \in [\![0,n]\!]\}$.

On a alors l'équivalence :

$$\begin{aligned}
(\alpha_i)_{i\in I} \text{ est sommable } &\Leftrightarrow \left(\sum_{i\in J_n}\alpha_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{\varphi(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\\
&\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}\alpha_{\varphi(n)} \text{ converge.}
\end{aligned}$$

Auquel cas $\displaystyle\sum_{i\in I}\alpha_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{\varphi(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{\varphi(n)}$.

Corollaire :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ une série à termes positifs, et $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une permutation de $\mathbb{N}$.

Alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\alpha_{\varphi(n)}$ converge, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{\varphi(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_i$$

Théorème :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, et si J est une partie de I, alors $(\alpha_i)_{i\in J}$ est sommable, et $\displaystyle\sum_{i\in J}\alpha_i \leq \sum_{i\in I}\alpha_i$.

Démonstration :

Pour tout $K\in P_f(J)$, on a $K\in P_f(I)$, donc $\displaystyle\sum_{i\in K}\alpha_i \leq \sum_{i\in I}\alpha_i$, puis en passant à la borne supérieure, $\displaystyle\sum_{i\in J}\alpha_i \leq \sum_{i\in I}\alpha_i$.

C) Familles sommables de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que cette famille est sommable lorsque $\displaystyle\sum_{i\in I}|u_i| < +\infty$.

Remarque :

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est alors à support au plus dénombrable, on supposera donc I dénombrable.

Théorème, définition :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de $\mathbb{K}$. Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties finies de I telle que $J_n \uparrow I$. Alors :

(1) La suite $(s_{J_n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(2) Sa limite ne dépend pas du choix de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on la note $\sum_{i\in I} u_i$.

(3) On a de plus $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|$.

Démonstration :

(1) Comme I est sommable, $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}^+$.

Donc la suite $(s_{J_n}(|u|))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et est alors de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, s_{J_{n+p}}(|u|) - s_{J_n}(|u|) \leq \varepsilon$.

Soient donc $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\left|s_{J_{n+p}}(u) - s_{J_n}(u)\right| = \left|\sum_{i\in J_{n+p}} u_i - \sum_{i\in J_n} u_i\right| = \left|\sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_n} u_i\right| \text{ car } J_n \subset J_{n+p}$$

$$\leq \sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_n} |u_i| = s_{J_{n+p}}(|u|) - s_{J_n}(|u|) \leq \varepsilon$$

Donc la suite $(s_{J_n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge.

(2) Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de parties finies telle que $K_n \uparrow I$.

On note $S = \lim_{n\to+\infty} s_{J_n}(u)$; montrons que $s_{K_n}(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$.

Soit $\varepsilon > 0$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, s_{J_{n+p}}(|u|) - s_{J_n}(|u|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

En particulier (calcul précédent), $\forall n \geq n_0, \left|S - s_{J_n}(u)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après le lemme vu au sous–paragraphe précédent, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, J_{n_0} \subset K_n$.

De plus, pour $n \geq n_1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset J_{n_0+p}$

D'où $\left|s_{K_n}(u) - S\right| \leq \left|s_{K_n}(u) - s_{J_{n_0}}(u)\right| + \left|s_{J_{n_0}}(u) - S\right| \leq \sum_{i\in K_n\setminus J_{n_0}} |u_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_{n_0}} |u_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Ainsi, on a trouvé $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1 \left|s_{K_n}(u) - S\right| \leq \varepsilon$

(3) : conséquence du calcul précédent :

$\left|s_{J_n}(u)\right| \leq s_{J_n}(|u|)$ et, par passage à la limite, $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|$

Théorème :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de $\mathbb{K}$, et $\varphi : \mathbb{N} \to I$ une bijection.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et si c'est le cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Démonstration :

Il suffit de prendre $J_n = \varphi([\![0, n]\!])$ dans le théorème précédent.

Corollaire :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$, et si φ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ l'est, et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Théorème :

Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Démonstration :

Soit $J \subset I$ et $(u_i)_{i\in I}$ sommable.

Alors (dernier théorème du B)) :

$\sum_{i\in J} |u_i| \leq \sum_{i\in I} |u_i|$, donc $(u_i)_{i\in J}$ est sommable (car $\sum_{i\in J} |u_i|$ est majoré donc converge)

Théorème (sommation par paquet – hors programme) :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, et $I = \bigcup_{k\in K} J_k$ une partition de I indexée par un ensemble K.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

- Pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in J_k}$ est sommable.
- Et $(\sum_{i\in J_k} |u_i|)_{k\in K}$ est sommable,

Auquel cas $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in J_k} u_i$.

D) Familles sommables indexées par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de $\mathbb{K}$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_{-n}$ sont absolument convergentes, auquel cas $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k$.

Démonstration :

On applique le théorème de sommation par paquets à $K = \{0;1\}$, $J_0 = \mathbb{N}$ $J_1 = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

D'où on tire l'équivalence.

Attention :

Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $u_n = \sin n$ n'est pas sommable, mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=-n}^{n} u_k = 0$.

Théorème (Fubini) :

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de $\mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ est absolument convergente, et, en posant $s_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, la série $\sum_{n \geq 0} s_n$ est convergente.

(3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ est absolument convergente, et, en posant $\sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, la série $\sum_{p \geq 0} \sigma_p$ est convergente.

De plus, si ces propositions sont vérifiées, $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$.

Démonstration :
C'est un cas particulier du théorème de sommation par paquets.

Exemple d'application :

Pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, et on pose $\xi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (fonction Zêta de Riemann). Pour $p \geq 2$, on pose $u_p = \xi(p) - 1$. La série $\sum_{p \geq 2} u_p$ converge t'elle ?

Etude :

Si la série converge, alors la famille $\left(\frac{1}{n^p} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ p \geq 2}}$ est sommable.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} u_p = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1/n^2}{1 - 1/n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1$$

Maintenant :

Pour tout $n \geq 2$, la série de terme général $\frac{1}{n^p}$ converge, et $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n(n-1)}$.

De plus, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge vers 1.

Donc d'après le théorème de Fubini, $\left(\frac{1}{n^p} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ p \geq 2}}$ est sommable, et les calculs vus dans l'étude on bien un sens ; donc la série $\sum_{p \geq 2} \xi(p) - 1$ est convergente.

E) Produit de Cauchy

Définition :

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle produit de Cauchy de u et v la suite w définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q) \in \mathbb{N}^2}} u_p v_q$$

On note alors $w = u * v$.

Théorème :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série $\sum_{n\geq 0}(u*v)_n$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u*v)_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right) \text{ ou : } \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{p+q=n\\(p,q)\in\mathbb{N}^2}}u_pv_q=\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)$$

Démonstration :

On étudie la sommabilité de $(u_pv_q)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\p\in\mathbb{N}}}$:

- Pour $p\in\mathbb{N}$, $\sum_{q\geq 0}u_pv_q$ est absolument convergente, et $\sum_{q=0}^{+\infty}|u_pv_q|=|u_p|\sum_{q=0}^{+\infty}|v_q|$.

De plus, la série $\sum_{p\geq 0}\left(|u_p|\sum_{q=0}^{+\infty}|v_q|\right)$ est convergente, de somme $\sum_{p=0}^{+\infty}|u_p|\times\sum_{q=0}^{+\infty}|v_q|$

Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_pv_q=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_pv_q\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\left(\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)=\left(\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\right)$$

- Calculons maintenant cette somme au moyen de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathbb{N}^2$ définie par $J_n=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2, p+q\leq n\}$. On a alors $J_n\uparrow\mathbb{N}^2$.

Donc $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_pv_q=\lim_{n\to+\infty}\sum_{(p,q)\in J_n}u_pv_q=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k}u_pv_q\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(u*v)_n$

Donc déjà $\sum_{n\geq 0}(u*v)_n$ converge.

- Par le même raisonnement, on a $\underbrace{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}|u_pv_q|}_{\text{fini}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k}|u_pv_q|\geq\sum_{k=0}^{n}|(u*v)_k|$

Donc $\sum_{n\geq 0}(u*v)_n$ est absolument convergente.

Exemple : $\exp:(\mathbb{C},+)\to(\mathbb{C}^*,\times)$ est un morphisme de groupes :

- $\exp(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{0^n}{n!}=1$
- Soient $a,b\in\mathbb{C}$.

Les séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$ où $u_n=\dfrac{a^n}{n!}$ et $v_n=\dfrac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes.

Donc $\sum_{n\geq 0}w_n$ où $w=u*v$ est absolument convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$.

Or, pour $n\in\mathbb{N}, w_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}\dfrac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n!}C_n^ka^kb^{n-k}=\dfrac{1}{n!}(a+b)^n$.

Donc par passage à la limite, $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

- De plus, pour $a\in\mathbb{C}$, on a :

$\exp(a)\times\exp(-a)=\exp(0)=1$, donc $\exp(a)\neq 0$.

Ainsi, $\exp(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}^*$, et $\exp$ est bien un morphisme.