Chapitre 6 : Algèbre linéaire

I Catégorie des $\mathbb{K}$-ev

On considère un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque
Voir cours de sup pour les différentes définitions…

A) Combinaisons linéaires quelconques

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires (de $\mathbb{K}$) à support fini.

On pose $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = \sum_{i\in \operatorname{supp}(\alpha_i)}\lambda_i v_i$: combinaison linéaire des v_i.

Cas particuliers :

Combinaison linéaire triviale : $\forall i\in I, \lambda_i = 0$

Combinaison linéaire nulle : $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0$.

Remarque : si une combinaison linéaire est triviale, alors elle est nulle.

B) Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille

Théorème, définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A une partie de E.

(1) L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A est un espace vectoriel, appelé espace vectoriel engendré par A, noté $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$.

(2) $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A (au sens de l'inclusion)

(3) $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Définition :

On dit que A est génératrice lorsque $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(A) = E$.

C) Famille ou partie libre

Définition :

La famille $(v_i)_{i\in I}$ est dite libre lorsque la combinaison linéaire triviale est la seule combinaison linéaire nulle, c'est-à-dire :

Pour tout $(\lambda_i)_{i\in I}\in \mathbb{K}^I$ à support fini, $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i\in I, \lambda_i = 0$.

Elle est dite liée sinon, c'est-à-dire lorsqu'il existe $(\lambda_i)_{i\in I}\in \mathbb{K}^I$ famille de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0$.

Théorème :
(1) Toute sous famille d'une famille libre est libre
(2) Une famille est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Démonstration :

(1) Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille libre de *E*, et soit *J* une partie de *I*.

Soit $(\mu_i)_{i\in J}\in \mathbb{K}^J$ à support fini, supposons que $\sum_{i\in J}\mu_i v_i = 0$.

On pose, pour $i\in I$, $\lambda_i = \begin{cases}\mu_i \text{ si } i\in J\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Alors $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à support fini, et $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = \sum_{i\in J}\mu_i v_i = 0$.

Donc $\forall i\in I, \lambda_i = 0$. Donc $\forall i\in J, \mu_i = 0$.

Donc $(v_i)_{i\in J}$ est libre.

(2) Un premier sens découle déjà du (1).

Pour l'autre, montrons la contraposée :

Supposons $(v_i)_{i\in I}$ liée. Alors il existe $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$ à support fini non tous nuls tel que $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0$. Si on prend $J = \operatorname{supp}(\lambda)$, alors *J* est fini, et $\sum_{i\in J}\lambda_i v_i = 0$.

D) Base

C'est une famille $\mathfrak{F}$ libre et génératrice, ou une famille de *E* telle que tout élément *x* de *E* s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathfrak{F}$.

Exemples :

- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ car tout polynôme s'écrit de manière unique $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ où $\operatorname{supp}(a)$ est fini.
- Famille orthogonale pour un produit scalaire :

Soit $E = \{f\in C(\mathbb{R},\mathbb{C}), \forall x\in\mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)\}$.

Pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose $e_k : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{ikt}\end{array}$.

Proposition :

$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre dans *E*.

Déjà, $\forall (k,l)\in\mathbb{Z}^2, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(t)\overline{e_l(t)}dt = S_{k,l}$ est un produit scalaire, et $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de complexes à support fini, supposons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k e_k = 0$.

Alors $\forall l\in\mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k e_k(t)\right)\overline{e}_l(t)dt = 0$

Donc $\forall l\in\mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_k\int_0^{2\pi} e_k(t)\overline{e}_l(t)dt = \lambda_l = 0$

Donc $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre.

- Application aux équations différentielles linéaires

Rappel :

Résolution de $(D): y''+ay'+by=0$, $a,b\in\mathbb{C}$

Equation caractéristique : $(*)$ $r^2+ar+b=0$

(Condition nécessaire et suffisante pour que $t\mapsto e^{rt}$ soit solution)

1[er] cas : Si $\Delta=a^2-4b\neq 0$, alors l'ensemble des solutions de D est $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{t\mapsto e^{r_1t}, t\mapsto e^{r_2t}\}$ où r_1 et r_2 sont les racines de $(*)$.

2[ème] cas : si $\Delta=0$, l'ensemble des solutions de D est $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{t\mapsto e^{rt}, t\mapsto te^{rt}\}$ où r est racine de $(*)$.

Avec second membre exponentiel et polynôme :

$$y''+ay'+by=f(t)=\sum_{j=1}^{n}e^{\alpha_j t}P_j(t) \text{ où } \alpha_j\in\mathbb{C},\ P_j\in\mathbb{C}[X].$$

On cherche une solution particulière en superposant (= en ajoutant) des solutions particulières des équations $(D_j): y''+ay'+by=e^{\alpha_j t}P_j(t)$:

Si α_j est racine de multiplicité m ($m=0,1,2$) de $(*)$, alors D_j a une solution de la forme $t\mapsto t^mQ_i(t)e^{\alpha_i t}$ où Q_i est de même degré que P_i.

Théorème :

La famille des applications $t\mapsto t^m e^{\alpha . t}, n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{C}$ est libre dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

L'espace engendré par cette famille s'appelle l'espace des exponentielles polynômes.

Démonstration :

Cas particulier :

Déjà, la famille $f_\alpha: t\mapsto e^{\alpha . t}$ est libre.

En effet, vérifions que toute sous-famille finie G de $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est libre.

Par récurrence sur $\mathrm{card}(G)=p$.

- Pour $p=0$ ok.
- Pour $p=1$ ok car $\forall\lambda\in\mathbb{C}, f_\alpha\neq 0$
- Soit $p\in\mathbb{N}$, supposons que toute sous-famille G de cardinal p est libre.

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{p+1}\in\mathbb{C}$ distincts.

Supposons que $\sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j f_{\alpha_j}=0$ pour $(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_{p+1})\in\mathbb{C}^{p+1}$

Alors $\forall t\in\mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j e^{\alpha_j t}=0$

Donc $\forall t\in\mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j e^{(\alpha_j-\alpha_{p+1})t}=0$

Donc en dérivant $\forall t\in\mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p}\lambda_j(\alpha_j-\alpha_{p+1})e^{(\alpha_j-\alpha_{p+1})t}=0$

Donc, par hypothèse de récurrence appliquée à $(\lambda_j(\alpha_j-\alpha_{p+1}))_{j\in[\![1,p]\!]}$, on a :

$\forall j\in[\![1,p]\!], \lambda_j(\alpha_j-\alpha_{p+1})=0$. Donc $\forall j\in[\![1,p]\!], \lambda_j=0$, puis $\lambda_{p+1}=0$

Cas général :

On pose $f_{\alpha,n} : t \mapsto t^n e^{\alpha.t}$.

Une combinaison linéaire non triviale des $f_{\alpha,n}$ s'écrit $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{r} P_j(t) e^{\alpha_j t}$.

Montrons par récurrence sur $p = \sum_{j=1}^{r} \deg P_j$ qu'une telle somme n'est pas nulle.

- Si $\sum_{j=1}^{r} \deg P_j = 0$, on est ramené au cas précédent.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que si $\sum_{j=1}^{r} \deg P_j \leq p$, alors $\sum_{j=1}^{r} P_j(t) e^{\alpha_j t} \neq 0$.

Si maintenant $\sum_{j=1}^{r} \deg P_j = p+1$:

Supposons que $\sum_{j=1}^{r} P_j(t) e^{\alpha_j t} = 0$.

On peut supposer par exemple que $\deg P_r \geq 1$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, 0 = \varphi(t) e^{-\alpha_r t} = \sum_{j=1}^{r} P_j(t) e^{(\alpha_j - \alpha_r)t} = \sum_{j=1}^{r} P_j(t) e^{\beta_j t}$.

En dérivant, $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{r} (P'_j(t) + \beta_j P_j(t)) e^{\beta_j t} = 0$.

Ainsi, comme $\beta_r = 0$, si on pose $Q_j = P'_j + \beta_j P_j$, on obtient :

$$\deg Q_j \leq \begin{cases} \deg P_j \text{ si } j < r \\ \deg P_j - 1 \text{ si } j = r \end{cases}$$

Donc par hypothèse de récurrence (on a ainsi $\sum_{j=1}^{r} \deg Q_j \leq p$), on a :

$\forall j \in [\![1, r]\!], Q_j = 0$

Donc en particulier $P_r = \text{cte}$, ce qui est impossible car $\deg P_r \geq 1$.

E) Familles de polynômes

Utilisation du degré : Proposition (hors programme) :

Soit $A \subset \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

(1) si $\deg_{/A} : A \to \mathbb{N}$ est injective, alors A est libre.

(2) Si $\deg_{/A} : A \to \mathbb{N}$ est surjective, alors A est génératrice.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Proposition :} \\ \text{Soient } P_0, P_1, \ldots P_n \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } \forall i, \mathrm{val}(P_i) = i \text{ (c'est-à-dire } X^i \mid P_i \text{ et } X^{i+1} \nmid P_i, \\ \text{ou encore 0 est racine de multiplicité } i \text{ de } P_i\text{). Alors } (P_0, P_1, \ldots P_n) \text{ est libre.}\end{array}}$$

Cas particulier :

Pour $n \geq 1$ fixé, on pose $B_p = X^p (1-X)^p$ (polynôme de Bernstein)

Alors $(B_0, \ldots B_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration :
La famille est libre :

Si $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j = 0$, alors en remplaçant X par 0 on obtient $\lambda_0 = 0$.

Comme 0 est racine d'ordre i de P_i, on a $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P'_j(0) = \lambda_1$, donc $\lambda_1 = 0$…

F) Application linéaire

Comment définir une application linéaire de E dans F ?
A l'aide d'une base de E :

Théorème :
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E (éventuellement infinie)
Soit $(v_i)_{i\in I} \in F^I$. Alors il existe une unique application linéaire de E dans F telle que $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$.

Remarques :
- Si $(e_i)_{i\in I}$ est supposée seulement génératrice, il y a au plus une application linéaire :

Si f et g conviennent, alors :
$\forall i \in I, e_i \in \ker(f-g)$, donc $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I}) \subset \ker(f-g)$.
Donc $f = g$ (car $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I}) = E$).

Pour l'existence d'une application linéaire, il faut que si il y a une relation de liaison entre les e_i, il y ait la même entre les v_i.
- Si $(e_i)_{i\in I}$ est supposée libre, il existe au moins une application linéaire :

Si on note $E' = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$, il existe alors une unique application linéaire f' de E' dans F telle que $\forall i \in I, f'(e_i) = v_i$.

On peut de plus prolonger f' à E de manière linéaire si et seulement si E' admet un supplémentaire dans E, ce qui est toujours vrai si on admet l'axiome du choix.

Compléments :
Base télescopique :

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire que $\mathbb{K}$ est un sous–corps de $\mathbb{L}$)
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{L}$-ev (en particulier, $\cdot : \mathbb{L} \times E \to E$)
Proposition :
La restriction du produit externe à $\mathbb{K} \times E$ munit E d'une structure de $\mathbb{K}$-ev. On note $E_{\mathbb{L}}$ le $\mathbb{L}$-ev initial, $E_{\mathbb{K}}$ l'espace vectoriel $(E,+,\cdot_{/\mathbb{K}\times E})$ en tant que $\mathbb{K}$-ev.

Exemple : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, ou un $\mathbb{Q}$-ev.

Théorème :
Soit $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{L}$-base de $E_{\mathbb{L}}$
Soit $(e_j)_{j\in J}$ une $\mathbb{K}$-base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{L}$.
Alors $(e_j \cdot \vec{v}_i)_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$ est une $\mathbb{K}$-base de $E_{\mathbb{K}}$, appelée base télescopique.

Conséquence :

Si E est de $\mathbb{L}$-dimension finie, et $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$-dimension finie, alors E est de $\mathbb{K}$-dimension finie, et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

Cas particulier :

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, alors $\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E$, et si $(v_1,...v_n)$ est une $\mathbb{C}$-base de E, alors $(v_1,...v_n, iv_1,...iv_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de E.

Démonstration (du théorème) :

Montrons que $(e_j \cdot \vec{v}_i)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ est libre :

Soit $(e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k})_{k\in[\![1,p]\!]}$ une sous famille finie de $(e_j \cdot \vec{v}_i)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$.

Soient $\lambda_1,...\lambda_p \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k} = 0$.

Quitte à agrandir la famille des $e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k}$, on peut supposer qu'elle est de la forme $(e_j \cdot \vec{v}_i)_{\substack{i\in I_0\\ j\in J_0}}$ (où on a alors $I_0 = \{i \in I, \exists k \in [\![1,p]\!], i = i_k\}$, idem pour J_0 et $p = \# J_0 \times \# I_0$)

On a ainsi $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k} = \sum_{\substack{i\in I_0\\ j\in J_0}} \lambda_{i,j} e_j \cdot \vec{v}_i$ (où $\lambda_{i,j} = \lambda_k$, k étant tel que $i = i_k$, $j = j_k$)

Donc $\sum_{i\in I_0} \underbrace{(\sum_{j\in J_0} \lambda_{i,j} e_j)}_{\in \mathbb{L}} \cdot \vec{v}_i = 0$

Donc comme $(\vec{v}_{i_k})_{k\in[\![1,p]\!]}$ est libre, on a :

$\forall i \in I_0, \sum_{j\in J_0} \lambda_{i,j} e_j = 0$.

D'où, comme $(e_{j_k})_{k\in[\![1,p]\!]}$ est libre : $\forall i \in I_0, \forall j \in J_0, \lambda_{i,j} = 0$

Donc $(e_j \cdot \vec{v}_i)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ est bien libre.

Soit maintenant $\vec{v} \in E$.

Il existe une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{L}$ à support fini telle que $\vec{v} = \sum_{i\in I} \mu_i \vec{v}_i$.

Comme $\forall i \in I, \mu_i \in \mathbb{L}$, il existe alors pour tout $i \in I$ une famille $(\lambda_{i,j})_{j\in J}$ de $\mathbb{K}$ à support fini telle que $\mu_i = \sum_{j\in J} \lambda_{i,j} e_j$.

Alors le support de $(\lambda_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ est fini :

En effet, si $\lambda_{i,j} \neq 0$, alors $\mu_i \neq 0$ (car $(e_j)_{j\in J}$ est $\mathbb{K}$-libre).

Il y a donc un nombre fini de valeurs de i possibles.

Pour chacun de ces i, il y a un nombre fini de valeurs de j possibles, donc $(\lambda_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ est à support fini.

Et on a enfin : $\vec{v} = \sum_{i\in I} \mu_i \vec{v}_i = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} (\lambda_{i,j} e_j) \cdot \vec{v}_i = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \lambda_{i,j} e_j \cdot \vec{v}_i$.

Donc la famille est génératrice.

C'est donc bien une base.

Exemples :

On considère trois corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$. On suppose que toutes les dimensions sont finies. Alors $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M} = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{M} \times \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.

(i) Soit $P = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$:

En effet, sinon il aurait un facteur de degré 1, disons $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]$.

On aurait alors $P(\alpha) = 0$, soit $\alpha^3 = 2$, ce qui est impossible (pour $\alpha \in \mathbb{Q}$)

(ii) Soit $\mathbb{L} = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$

Alors L est une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{C}$ de dimension 3 :

$(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est libre (d'après le résultat de *i*), et génératrice par définition.

(iii)Ainsi, $\mathbb{L}$ est un sous–corps de $\mathbb{C}$.

(iv)On cherche tous les sous–corps de $\mathbb{L}$:

Il y a $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{L}$, et c'est tout :

Soit $\mathbb{K}$ un sous–corps de $\mathbb{L}$. Alors $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$.

On a de plus $\underbrace{\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}}_{=3} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$

Donc soit $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{L}$, soit $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L} = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

II Dimension

A) Théorèmes fondamentaux

- Théorème de la dimension :

Si un espace vectoriel *E* admet une famille génératrice finie, alors il admet une base finie, et toutes ses bases ont même cardinal appelé dimension de *E*.

- Théorème de la base incomplète :

Soit *V* un système libre de *E*, *G* une famille génératrice de *E*.

Alors il existe $H \subset G$ tel que $V \cup H$ soit une base de *E*.

B) Théorème(s) du rang

- Version géométrique :

Soient *E* et *F* deux espaces vectoriels, $f : E \to F \in L(E, F)$.

Soit S un supplémentaire de $\ker f$ dans *E*. Alors $f_{/S} : S \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.

- Version numérique :

On suppose *E* de dimension finie.

Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

- Version matricielle :

On suppose *E*, *F* de dimensions finies *p* et *n*.

Alors il existe une base $\mathfrak{B}_E$ de *E* et une base $\mathfrak{B}_F$ de *F* tels que :

$\operatorname{mat}_{(\mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)} f = \begin{pmatrix} I_r & 0_{M_{r,p-r}} \\ 0_{M_{n-r,r}} & 0_{M_{n-r,p-r}} \end{pmatrix}$, où *r* est le rang de *f*.

Démonstration (dernière version) :

Soit S un supplémentaire de $\ker f$ et $(e_1,\dots e_r)$ une base de S complétée en une base $\mathfrak{B}_E=(e_1,\dots e_p)$ de E où $(e_{r+1},\dots e_p)$ est une base de $\ker f$.

Alors $(f_1,\dots f_r)=(f(e_1),\dots f(e_r))$ est libre, c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

On complète $(f_1,\dots f_r)$ en une base $\mathfrak{B}_F$ de F.

Par construction, on a bien $\operatorname{mat}_{(\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}_F)} f=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C) Méthodes de calcul

(1) détermination d'une base
(2) Paramétrage isomorphique
(3) Paramétrage épimorphique (morphisme surjectif) :
Si $u:E\to F$ est un morphisme surjectif, alors $\dim F=\dim E+\dim\ker u$.

D) Exemples

On suppose ici les espaces de dimension finie :
(a) Espaces munis d'une base canonique (c'est-à-dire une base qui définit l'espace)
Exemples :
$\mathbb{K}^n,\mathbb{K}_n[X],\mathbb{K}[X],M_{n,p}(\mathbb{K})$
(b) $\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$, une base étant $((v_i,0),(0,w_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$
(c) $\dim L_{\mathbb{K}}(E,F)=\dim E\times\dim F$.
(d) On veut $\dim_{\mathbb{R}} H$ où
$H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y+z+t=0 \text{ et } 2x-y-t=0 \text{ et } x+4y+3z+4t=0\}$

Méthode du pivot : $\operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A}=2$; donc $\dim_{\mathbb{R}} H=\dim\ker A=2$

(Le noyau d'une matrice A, c'est le noyau de l'application $\begin{array}{c} M_{n,1}(\mathbb{K})\to M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X\mapsto AX \end{array}$)

Autre méthode :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-t=0 \\ x+4y+3z+4t=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3y-2z-3t=0 \\ 3y+2z+3t=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{-1}{3}z \\ y=-t-\frac{2}{3}z \end{cases}$$

Donc $H=\{(\frac{-1}{3}z,-t-\frac{2}{3}z,z,t),(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$.

III Sommes, sommes directes de sous-espaces vectoriels

A) Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels

- Définition :

Soit E un espace vectoriel, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
$\sum_{i\in I} F_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i\in I} F_i$.

Théorème :
Soit H un sous-espace vectoriel de E.
Alors $H = \sum_{i\in I} F_i$ si et seulement si ces deux conditions sont réalisées :

(i) $\forall i \in I, F_i \subset H$

(ii) $\forall h \in H, \exists (v_i)_{i\in I}$ à support fini, $\forall i \in I, v_i \in F_i$ et $h = \sum_{i\in I} v_i$. C'est-à-dire que tout élément de H est somme d'un nombre fini d'éléments des F_i.

- Cas d'une famille finie de sous-espaces vectoriels, application linéaire associée

Soient $F_1,\dots F_p$ p sous-espaces vectoriels de E.

On note $\psi : \begin{array}{l} F_1 \times \dots \times F_p \to E \\ (v_1,\dots v_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} v_i \end{array}$.

Proposition :

ψ est une application linéaire d'image $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

NB : ψ reflète les propriétés du système des F_i.

- Somme directe d'une famille finie :

Définition :

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est dite directe lorsque ψ est injective. On note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Théorème :
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe

(2) ψ est injective

(3) Tout élément $\vec{v}$ de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \vec{f_i}$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], \vec{f_i} \in F_i$.

- Cas de la dimension finie :

Formule de Grassmann :
Théorème :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, E étant de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration :

Soit $\psi : \begin{array}{l} F\times G \to E \\ (f,g)\mapsto f+g \end{array}$.

Alors ψ est linéaire, $\operatorname{Im}\psi = F+G$, $\ker\psi = \{(f,-f), f\in F\cap G\}$.

Pour $\ker\psi$: Si $f,g\in\ker\psi$, alors $f+g=0$, donc $\underbrace{f}_{\in F} = \underbrace{-g}_{\in G}$.

Donc $f\in F\cap G$ et $(f,g)=(f,-f)$.

Réciproquement, si $f\in F\cap G$, $(f,-f)\in\ker\psi$.

Enfin, d'après le théorème du rang :

$\underbrace{\dim F\times G}_{=\dim F+\dim G} = \dim(F+G)+\dim(F\cap G)$.

Théorème : caractérisation d'une somme directe en dimension finie :

$\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si $\sum_{i=1}^{p}\dim F_i = \dim\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Démonstration :

$\Rightarrow$: ψ est un isomorphisme entre $F_1\times\ldots\times F_p$ et $\sum_{i=1}^{p} F_i$, donc les deux espaces ont la même dimension.

$\Leftarrow$: supposons que $\sum_{i=1}^{p}\dim F_i = \dim\sum_{i=1}^{p} F_i$. Alors $\psi : F_1\times\ldots\times F_p \to \sum_{i=1}^{p} F_i$ est linéaire, surjective entre deux espaces de même dimension, donc ψ est bijective, et $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

Proposition :

Si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, et si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\mathfrak{B}_i$ est une base de F_i, alors $\bigcup_{i\in[\![1,p]\!]}\mathfrak{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Démonstration :

Soient $\mathfrak{B}_1,\ldots\mathfrak{B}_p$ des bases de $F_1,\ldots F_p$.

Alors $\mathfrak{B}_1\times\{(0,..,0)\}\cup\{0\}\times\mathfrak{B}_2\times\{(0,\ldots0)\}\cup\ldots\cup\{(0,\ldots0)\}\times\mathfrak{B}_p$ est une base de $\prod_{i=1}^{p} F_i$.

Sont image par ψ est $\bigcup_{i=1}^{p}\mathfrak{B}_i$. Comme ψ, $\bigcup_{i=1}^{p}\mathfrak{B}_i$ est une base de $\operatorname{Im}\psi = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

B) Cas particulier de deux sous-espaces vectoriels

Proposition :

La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G est directe si et seulement si $F\cap G=\{0\}$.

Démonstration :

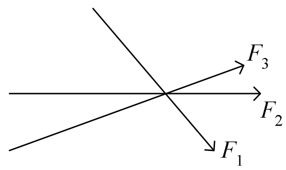
Soit $\psi : \begin{array}{l} F \times G \to F+G \\ (f,g) \mapsto f+g \end{array}$.

Alors $\ker\psi = \{(f,-f), f \in F \cap G\}$.

Donc $F+G$ est directe si et seulement si ψ est injective c'est-à-dire si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Attention ! pour p sous-espaces vectoriels ($p \geq 3$), l'énoncé est faux :

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$:



Remarque : $F_1 + ... + F_p$ si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $F_3 \cap (F_1 + F_2) = \{0\}$ et … et $F_p \cap (\sum_{i=1}^{p-1} F_i) = \{0\}$.

Théorème :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, où E est de dimension finie.

Alors deux des conditions suivantes entraînent la troisième :

(1) $F + G = E$

(2) $F \cap G = \{0\}$

(3) $\dim F + \dim G = \dim E$.

Dans ce cas, on a $E = F \oplus G$.

Définition : la dimension de tout supplémentaire de F dans E s'appelle la codimension de F, notée $\text{codim}(F)$. Ainsi, $\dim F + \text{codim}(F) = \dim E$.

C) Sous-espaces supplémentaires et projecteurs

Définition :

Soient $F_1,...F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

$F_1,...F_p$ sont supplémentaires lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, ou ce qui revient au même lorsque tout élément $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} f_i$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i \in F_i$.

Théorème :

On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Alors il existe $\pi_1,...\pi_p$ endomorphismes de E tels que $\pi_1 + ... + \pi_p = \text{Id}_E$ et $\forall i \in [\![1, p]\!], \text{Im}\,\pi_i = F_i$. De plus, pour tous i et j distincts, on a $\pi_i \circ \pi_j = 0$ et $\pi_i^2 = \pi_i$. Enfin, les π_i sont uniques.

Démonstration :

Existence :

Pour $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} f_i$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i \in F_i$, on pose $\pi_i(\vec{v}) = f_i$.

Alors :
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, π_i est une application (la décomposition est unique)
Les π_i sont linéaires, d'image incluse dans F_i.
De plus, pour $a \in F_i$, on a $\pi_i(a) = a$, donc $F_i \subset \mathrm{Im}\,\pi_i$, d'où $F_i = \mathrm{Im}\,\pi_i$.
Enfin, $\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{Id}_E$ car $\forall \vec{v} \in E, \vec{v} = \prod_{i=1}^{p} \pi_i(\vec{v})$.
Unicité :
On suppose que deux familles $(\pi_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(\pi'_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ vérifient les deux conditions.
Soit $\vec{v} \in E$. Alors $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\pi_i(\vec{v})}_{\in F_i} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\pi'_i(\vec{v})}_{\in F_i}$.
Donc par unicité de la décomposition, $\forall i \in [\![1,p]\!], \pi_i(\vec{v}) = \pi'_i(\vec{v})$.
Donc $\forall i \in [\![1,p]\!], \pi_i = \pi'_i$.
Soit $\vec{v} \in E$. Alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\pi_k(\vec{v}) \in E$, et donc :
$\underbrace{\pi_k(\vec{v})}_{\in F_k} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\pi_i \circ \pi_k(\vec{v})}_{\in F_i}$.
Donc par unicité de la décomposition, $\pi_i \circ \pi_k(\vec{v}) = 0$ si $i \neq k$, et $\pi_k^2(\vec{v}) = \pi_k(\vec{v})$.
D'où le résultat voulu pour les applications.

Etude réciproque :
Soient $\pi_1, \dots \pi_p$ des endomorphismes de E tels que :
$\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{Id}_E$, $\forall i \in [\![1,p]\!], \pi_i^2 = \pi_i$, $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \pi_i \circ \pi_j = 0$.
Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\,\pi_i$, et les π_i sont les projecteurs associés.

Démonstration :
On doit montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^{p} f_i$ où $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i \in \mathrm{Im}\,\pi_i$.
Existence de l'écriture : (*) $\forall \vec{v} \in E, \vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(\vec{v})$ (car $\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{Id}_E$)
Unicité : Il suffit de la montrer pour 0 (c'est-à-dire montrer l'injectivité de ψ)
Supposons que $0 = \sum_{i=1}^{p} f_i$ où $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i \in \mathrm{Im}\,\pi_i$.
Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on a alors $f_i = \pi_i(f_i)$.
En effet : il existe $g_i \in E$ tel que $f_i = \pi_i(g_i)$, donc $\pi_i(f_i) = \pi_i^2(g_i) = \pi_i(g_i) = f_i$.
Alors $0 = \pi_i(0) = \sum_{k=1}^{p} \pi_i \circ \pi_k(f_k) = \pi_i(f_i) = f_i$. Donc $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i = 0$.
Enfin, (*) montre que π_i est le projecteur sur F_i dans la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\,\pi_i$.

D) Sommes directes et applications linéaires

Théorème :

Soient $E_1,\dots E_p$ supplémentaires dans un espace vectoriel E, et F un espace vectoriel. Alors l'application $A : \begin{array}{l} L_{\mathbb{K}}(E,F) \to \prod_{i=1}^{p} L_{\mathbb{K}}(E_i,F) \\ u \mapsto (u_{/E_1},\dots u_{/E_p}) \end{array}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que se donner $u \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$, c'est se donner p applications $u_i \in L_{\mathbb{K}}(E_i,F)$.

Démonstration :

Déjà, A est linéaire.

Construisons un isomorphisme réciproque :

Soient $\pi_1,\dots\pi_p$ les projecteurs relatifs à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Alors l'application $B : \begin{array}{l} \prod_{i=1}^{p} L_{\mathbb{K}}(E_i,F) \to L_{\mathbb{K}}(E,F) \\ (u_1,\dots u_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} u_i \circ \pi_i \end{array}$ est linéaire,

et $B \circ A = \mathrm{Id}_{L_{\mathbb{K}}(E,F)}$, $A \circ B = \mathrm{Id}_{\prod_{i=1}^{p} L_{\mathbb{K}}(E_i,F)}$.

Donc A est bijective, donc un isomorphisme.

IV Dualité

A) Forme linéaire et espace dual

- Définition :

Une forme linéaire sur E, c'est une application linéaire $E \to \mathbb{K}$.

On note $E^* = L_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$, espace dual de E (dual algébrique)

- Cas où E est de dimension finie :

On a $\dim E^* = \dim E$ (car $\dim L_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K}$)

Attention :

Il n'existe pas en général d'isomorphisme *naturel* entre E et E^*.

Si E n'est pas de dimension finie, E^* et E n'ont aucune raison d'être isomorphes.

Exemple :

$\mathbb{R}[X]^*$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.

Montrons pour cela que $\mathbb{R}[X]^*$ n'a pas une base dénombrable.

On va chercher une famille libre équipotente à $\mathbb{R}$:

- A tout réel a, on associe $\varphi_a : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a) \end{array}$.
- Alors $\varphi_a \in \mathbb{R}[X]^*$.
- $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre : soit $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de réels distincts.

Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_{a_i} = 0$, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{K}[X], \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P(a_i) = 0$.

On prend alors, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $P_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} X - a_j$, et on a alors $\lambda_i = 0$.

Donc la famille est libre.

Supposons maintenant que $\mathbb{K}[X]^*$ admet une base dénombrable $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\{a \in \mathbb{R}, \varphi_a \in \mathrm{Vect}(\psi_0, \dots \psi_N)\} = I_N$ est fini, de cardinal $\leq N+1$.

Donc $\{a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \varphi_a \in \mathrm{Vect}(\psi_0, \dots \psi_N)\}$ est fini ou dénombrable (c'est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$)

Or, $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base, donc toute forme linéaire φ_a est combinaison linéaire d'un nombre fini de ψ_k. Donc $\{a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \varphi_a \in \mathrm{Vect}(\psi_0, \dots \psi_N)\} = \mathbb{R}$, ce qui est impossible car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

B) Hyperplan (en dimension quelconque)

Théorème :

Soit *H* un sous-espace vectoriel de *E*. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\vec{v} \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

(ii) Il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \ker \varphi$.

Un sous-espace vectoriel qui vérifie ces conditions s'appelle un hyperplan de *E*. Une forme linéaire vérifiant (ii) s'appelle une équation de *H*.

Propriété : deux équations de *H* sont proportionnelles.

Démonstration :

$(i) \Rightarrow (ii)$: supposons que $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit π le projecteur sur $\mathbb{K}\vec{v}$ parallèlement à *H*.

Alors $\forall x \in E, \pi(x) = \varphi(x)\vec{v}$, où $\varphi(x) \in \mathbb{K}$.

Alors l'application φ ainsi définie est linéaire.

On a de plus $\pi(\vec{v}) = \vec{v}$, donc $\varphi(\vec{v}) = 1$, et donc $\varphi \neq 0$.

Enfin, $\ker \varphi = \ker \pi = H$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. On pose $H = \ker \varphi$.

Soit $\vec{v} \in E$ tel que $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, montrons qu'alors $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(\vec{v})}\vec{v}}_{\in \mathbb{K}\vec{v}} + \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\vec{v})}\vec{v}\right)}_{\in \ker \varphi}$.

Donc $E = H + \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit $x \in H \cap \mathbb{K}\vec{v}$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\vec{v}$. Donc, comme $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Donc $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Pour la propriété :

Soit $(\varphi, \psi) \in E^* \setminus \{0\}^2$ tel que $\ker \varphi = \ker \psi = H$.

Soit $\vec{v} \in E \setminus H$. Alors $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

On pose $\lambda = \frac{\varphi(\vec{v})}{\psi(\vec{v})}$. Alors φ et $\lambda\psi$ coïncident sur *H* (elles y sont nulles), et sur $E = \mathbb{K}\vec{v}$ (par définition de λ). Elles coïncident donc partout par linéarité.

Cas particulier :

Soit *E* de dimension finie. Alors *H* sous-espace vectoriel de *E* est un hyperplan si et seulement si $\dim H = \dim E - 1$.

C) Formes bilinéaires de dualité

Théorème, définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, E^* son dual. Alors l'application $\begin{array}{l} <,>: E^*\times E \to \mathbb{K} \\ (\varphi,\vec{v}) \mapsto \varphi(\vec{v}) \end{array}$ est bilinéaire.

Cette application s'appelle forme bilinéaire de dualité.

Dans toute la suite, E est un espace de dimension finie n.

Théorème :

Si E est de dimension finie, $<,>$ est une dualité parfaite, c'est-à-dire qu'elle a les propriétés fondamentales du produit scalaire, à savoir :

(1) Pour $f \in E^*$, $f \neq 0$ si et seulement si il existe $\vec{v} \in E$ tel que $< f, \vec{v} > \neq 0$.

(2) Pour $\vec{v} \in E$, $\vec{v} \neq 0$ si et seulement si il existe $\varphi \in E^*$ telle que $< \varphi, \vec{v} > \neq 0$.

Démonstration :

(1) C'est la « définition » d'une fonction nulle

(2) Soit $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$.

Soit H un supplémentaire dans E de $\mathbb{K}\vec{v}$.

Alors H est un hyperplan (car de dimension $n-1$)

Il existe donc $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker\varphi$. Comme $\vec{v} \notin H$, on a $\varphi(\vec{v}) \neq \vec{0}$, c'est-à-dire $< \varphi, \vec{v} > \neq 0$.

D) Formes linéaires coordonnées et bases duales

Soit $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ une base de E.

Alors tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Théorème :

Avec les notations précédentes, on pose pour $x \in E$, $\varphi_i(x) = x_i$ ($i \in [\![1, n]\!]$). Alors :

(1) $\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi_i \in E^*$

(2) $(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ est une base de E^*. On a : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$

(3) $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x > e_i$; $\forall \psi \in E^*, \psi = \sum_{i=1}^{n} < \psi, e_i > \varphi_i$.

Définition :

$(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ s'appelle la base duale de $(e_1, \ldots e_n)$.

Elle est usuellement notée $(e_1^*, \ldots e_n^*)$.

Attention !

Cette notation peut laisser penser qu'il existe une application $\begin{array}{l} u: E \to E^* \\ \quad e \mapsto e^* \end{array}$ telle que si $(e_1, \ldots e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \ldots u(e_n))$ est la base duale, ce qui est faux ; en fait, e_1^* dépend de *toute* la base $(e_1, \ldots e_n)$ et il en est de même pour les autres.

Exemple :

Dans $E=\mathbb{R}^2$, (e_1,e_2) la base canonique.

La base duale de (e_1,e_2) est (φ_1,φ_2), avec $\varphi_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x\end{array}$, $\varphi_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto y\end{array}$.

Nouvelle base : $v_1=e_1$, $v_2=e_1+e_2$.

Base duale de (v_1,v_2) :

On a $(x,y)=xe_1+ye_2=xv_1+y(v_2-v_1)=(x-y)v_1+yv_2$.

La base duale de (v_1,v_2) est donc (ψ_1,ψ_2) avec $\psi_1(x,y)=x-y$, $\psi_2(x,y)=y$.

Démonstration du théorème :

(i) Clair.

(ii) Montrons que $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ est libre.

Soient $\lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{K}$, supposons que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i=0$.

Soit $j\in[\![1,n]\!]$. Pour $x=e_j$, on a $\forall i\in[\![1,n]\!],\varphi_i(e_j)=\delta_{i,j}$, donc $\lambda_j=0$.

(iii)Formule pour x : c'est la définition des φ_i.

Soit $\psi\in E^*$. On note $\theta=\sum_{i=1}^{n}<\psi,e_i>\varphi_i$.

On a alors, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\theta(e_k)=\sum_{j=1}^{n}\psi(e_j).\varphi_j(e_k)=\psi(e_k)$.

Donc θ et ψ coïncident sur une base, donc sont égales.

Théorème :

Pour toute base $\mathfrak{B}^*$ de E^*, il existe une unique base $\mathfrak{B}$ de E dont $\mathfrak{B}^*$ est la base duale.

Démonstration :

Soit $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ une base de E^*. On cherche $(e_1,\dots e_n)$ base de E telle que $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\varphi_i(e_j)=\delta_{i,j}$. Alors on aura $\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E,\varphi_k(x)=x_k$, c'est-à-dire que $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ sera la base duale de $(e_1,\dots e_n)$.

Soit $\theta : \begin{array}{l}E\to\mathbb{K}^n\\ \vec{v}\mapsto(\varphi_1(\vec{v}),\dots\varphi_n(\vec{v}))\end{array}$. On va montrer que θ est un isomorphisme.

Déjà, $\dim E=\dim\mathbb{K}^n$.

Soit $\vec{v}\in\ker\theta$. Alors $\forall i\in[\![1,n]\!],\varphi_i(\vec{v})=0$. Mais comme $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ est une base de E^*, on a par combinaison linéaire $\forall\psi\in E^*,\psi(\vec{v})=0$, donc $\vec{v}=0$ (dualité parfaite)

Donc θ est injective, donc bijective.

Ainsi, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il existe un unique $x_k\in E$ tel que $\theta(e_k)=(0,\dots,\underset{k}{1},\dots0)$.

Définition :

Si $\mathfrak{B}^*$ est la base duale de $\mathfrak{B}$, on dit aussi que $\mathfrak{B}$ est la base antéduale de $\mathfrak{B}^*$.

E) Orthogonalité

Définition :

Soit A une partie de E.

On appelle orthogonal de A dans E^* la partie ${}^{\perp}A$ de E^* définie par :

${}^{\perp}A=\{\varphi\in E^*,\forall a\in A,<\varphi,a>=0\}$.

L'orthogonal d'une partie B de E^* dans E est la partie $B^{\perp}$ de E définie par :

$B^{\perp}=\{x\in E,\forall \varphi\in B,<\varphi,x>=0\}=\bigcap_{\varphi\in B}\ker\varphi$

Propriété :

(1) Soit $A\subset A'\subset E$.

Alors ${}^{\perp}A$ est un sous-espace vectoriel de E^*, et on a de plus :

${}^{\perp}\varnothing=E^*\supset {}^{\perp}A\supset {}^{\perp}A'\supset {}^{\perp}E=\{0\}$

(2) Analogue pour E^*.

Théorème :

(a) Soit A une partie de E.

(1) On a ${}^{\perp}A={}^{\perp}\mathrm{Vect}(A)$

(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim F+\dim{}^{\perp}F=\dim E$, et $({}^{\perp}F)^{\perp}=F$.

(b) De même dans E^*.

Corollaire :

Soient $\varphi_1,\dots\varphi_p$ p formes linéaires sur E, et $\psi\in E^*$. Alors ψ est combinaison linéaire des φ_i si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{p}\ker\varphi_i\subset\ker\psi$.

Démonstration :

(a)

(1) Déjà, $A\subset\mathrm{Vect}(A)$, donc ${}^{\perp}\mathrm{Vect}(A)\subset{}^{\perp}A$.

Soit $\varphi\in{}^{\perp}A$. Alors $\forall a\in A,\varphi(a)=0$, donc $\forall a\in\mathrm{Vect}(A),\varphi(a)=0$, donc $\varphi\in{}^{\perp}\mathrm{Vect}(A)$, d'où l'autre inclusion et l'égalité

(2) Soit $(e_1,\dots e_p)$ une base de F, qu'on complète en une base $(e_1,\dots e_n)$ de E.

Soit $(e_1^*,\dots e_n^*)$ sa base duale. Alors $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*\in{}^{\perp}F$ si et seulement si $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\varphi(e_j)=0$ (car ${}^{\perp}F={}^{\perp}\{e_1,\dots e_p\}$)

Or, $\forall k\in[\![1,n]\!]\lambda_k=<\varphi,e_k>=\varphi(e_k)$.

Donc $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*\in{}^{\perp}F$ si et seulement si $\forall k\in[\![1,p]\!]\lambda_k=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi\in\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*,\dots e_n^*)$.

Donc ${}^{\perp}F=\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*,\dots e_n^*)$, d'où $\dim{}^{\perp}F=n-p$.

(L'autre égalité sera montrée après)

(b) : Analogue :

Pour $B \subset E^*$, $B^\perp = (\text{Vect}(B))^\perp$.

Soit F_* un sous-espace vectoriel de E^*, $(\varphi_1,...\varphi_n)$ une base de E^* telle que $(\varphi_1,...\varphi_p)$ soit une base de F_*.

Soit $(e_1,...e_n)$ la base de E antéduale de $(\varphi_1,...\varphi_p)$.

Soit $\vec{v} \in E$; alors $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F_*^\perp$ si et seulement si $\forall j \in [\![1, p]\!], \varphi_j(\vec{v}) = 0$ (car $F_*^\perp = \{\varphi_1,...\varphi_p\}^\perp$)

Or, $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \varphi_k(\vec{v})$. Donc $\vec{v} \in F_*^\perp$ si et seulement si :

$\forall i \in [\![1, p]\!], x_i = 0$.

Donc $F_*^\perp = \text{Vect}(e_{p+1},...e_n)$.

(a) (2) : Déjà, $F \subset ({}^\perp F)^\perp$ car si on prend $f \in F$ et $\varphi \in {}^\perp F$, alors $<\varphi, f> = 0$.

De plus, $\dim({}^\perp F)^\perp = n - \dim {}^\perp F = \dim F$, d'où l'égalité.

Pour le corollaire :

Si $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1,...\varphi_p)$, ψ s'écrit $\psi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i$, donc $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

Réciproquement, supposons que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

Alors $\{\varphi_1,...\varphi_p\}^\perp \subset \{\psi\}^\perp$, soit $\text{Vect}(\varphi_1,...\varphi_p)^\perp \subset \text{Vect}(\psi)^\perp$.

Et donc ${}^\perp(\text{Vect}(\varphi_1,...\varphi_p)^\perp) \supset {}^\perp(\text{Vect}(\psi)^\perp)$, c'est-à-dire $\mathbb{K}.\psi \subset \text{Vect}(\varphi_1,...\varphi_p)$.

F) Application aux sous-espaces vectoriels

- Représentation des familles génératrices :

Si $(v_1,...v_p)$ engendre F, alors $F = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$, c'est-à-dire que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^p &\to F \\ (\lambda_1,...\lambda_p) &\mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \end{aligned}$$

est un paramétrage surjectif. On a alors $\dim F = \text{rg}(v_1,...v_p)$.

- Mode de représentation par équations linéaires :

Soient F un sous-espace vectoriel de E, $\varphi_1,..\varphi_p \in E^*$.

On dit que $\varphi_1,..\varphi_p$ est un système d'équations de F lorsque :

$\forall v \in E, \left(v \in F \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!], \varphi_j(v) = 0\right)$

C'est-à-dire lorsque $F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$, ou encore lorsque $F = \{\varphi_1,...\varphi_p\}^\perp$.

Dans ce cas, on a $\dim F = \dim E - \text{rg}(\varphi_1,...\varphi_p)$.

En effet, $\text{rg}(\varphi_1,...\varphi_p) = \dim(\text{Vect}(\varphi_1,...\varphi_p)) = \dim {}^\perp F$.