Chapitre 7 : Etude et réduction des endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne ici un corps commutatif quelconque.

I Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

A) Définition

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, E étant un $\mathbb{K}$-ev.

Equation aux éléments propres de u :
$u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{v} \in E \setminus \{0\}$.

On appelle valeur propre (abréviation vp) tout $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ vérifiant $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. On appelle vecteur propre (abr. $\vec{v}p$) de u tout $\vec{v}$ non nul tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Attention : $\vec{0}$ n'est pas vecteur propre.

Proposition :
Si $\vec{v}$ est $\vec{v}p$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

En effet, si $\lambda\vec{v} = \mu\vec{v}$, alors $\lambda = \mu$ car $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Définition :
Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifient $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, on dira que :
(i) λ est *la* valeur propre associée à $\vec{v}$
(ii) $\vec{v}$ est *un* vecteur propre associé à λ.

Proposition :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :
(i) λ est vp de u.
(ii) $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$

Définition :
Si λ est vp de u, le sous-espace vectoriel $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ s'appelle sous-espace propre de u associé à la vp λ.

On a alors $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{\vec{v}p \text{ associées à } u\} \cup \{0\}$.

Notation : $E(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On appelle éléments propres (valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre) de A les éléments propres de l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ $u_A : \begin{array}{l} M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array}$.

On parle aussi de vecteurs colonnes propres (vcp) :

$X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est vcp de A associé à la vp $\lambda \in \mathbb{K}$ si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$.

Théorème, définition (polynôme caractéristique d'une matrice carrée) :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

La matrice $A - XI_n$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$ vérifie :

$\det(A - XI_n) = (-1)^n (X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \ldots + \alpha_0) \in \mathbb{K}[X]$,

où $\alpha_0 = (-1)^n \det A$ et $\alpha_{n-1} = -\mathrm{Tr}(A)$.

Le polynôme $\det(A - XI_n)$ s'appelle polynôme caractéristique de A, noté χ_A (étude plus loin dans le chapitre)

Démonstration :

$A - XI_n \in M_n(\mathbb{K}[X])$, ses coefficients sont $(A - XI_n)_{i,j} = A_{i,j} - X\delta_{i,j}$.

Donc $\det(A - XI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma(X)$ où $P_\sigma = \prod_{i=1}^{n} (A - XI_n)_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)}$

Chaque P_σ est dans $\mathbb{K}_n[X]$, donc $\det(A - XI_n) \in \mathbb{K}_n[X]$.

On a de plus $\deg P_\sigma = n$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], \sigma(i) = i$, c'est-à-dire $\sigma = \mathrm{Id}$.

(En effet, sinon $\prod_{i=1}^{n} (A_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)})$ est de degré $\leq n - 1$).

On a ainsi un seul P_σ de degré n, à savoir $P_{\mathrm{Id}} = \prod_{i=1}^{n} (A_{i,i} - X)$, et on voit alors que le terme dominant de $\det(A - XI_n)$ est $(-1)^n$.

De plus, on ne peut pas avoir $\deg P_\sigma = n - 1$, car si $\sigma(i) = i$ pour $n - 1$ valeurs de i entre 1 et n, alors c'est pareil pour la dernière, et $\sigma = \mathrm{Id}$.

Ainsi, le coefficient de X^{n-1} dans χ_A vient uniquement de celui de P_{Id}, et $P_{\mathrm{Id}} = (-X)^n + (-X)^{n-1}(A_{1,1} + \ldots + A_{n,n}) + \ldots$

Pour la constante :

Lemme : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

En effet, développer $\det(A - \lambda I_n)$ ou développer $\det(A - XI_n)$ puis remplacer X par λ revient au même.

Ainsi, la constante de χ_A vaut $\chi_A(0) = \det(A)$.

Théorème (usage de χ_A)

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de χ_A.

Démonstration :

Voir lemme dans la démonstration du théorème précédent : λ est vp de A si et seulement si $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Lien entre matrices et endomorphismes :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Soit $\mathfrak{B}=(e_1,...e_n)$ une base de E et $A=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)\in M_n(\mathbb{K})$.

Théorème :

(1) λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de A.

(2) Pour tout $\vec{v}\in E\setminus\{0\}$, $\vec{v}$ est vecteur propre de u si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\vec{v})\in M_{n,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}$ est vecteur propre de A.

Démonstration :

Soient $\vec{v}\in E$, $\lambda\in\mathbb{K}$. On note $A=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$, $X=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\vec{v})$.

On a alors l'équivalence :

$$\begin{cases} u(\vec{v})=\lambda\vec{v} \\ \vec{v}\neq\vec{0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\times X=\lambda X \\ X\neq 0\end{cases}$$

C) Spectre et valeur spectrale

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$.

On dit que $\lambda\in\mathbb{K}$ est valeur spectrale de u si $u-\lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas un automorphisme de E. Il y a deux types de valeurs spectrales :

- Les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $u-\lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (c'est-à-dire les vp de u)
- Les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $u-\lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas surjectif.

En dimension finie, toute valeur spectrale est valeur propre.

Mais c'est faux en dimension infinie :

Exemple :

On considère l'application $M:\begin{array}{l}\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X] \\ \quad P\mapsto XP\end{array}$.

Alors tout réel est valeur spectrale de M mais M n'a pas de valeur propre.

En effet, soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors $M-\lambda\mathrm{Id}$ n'est pas surjective, donc λ est valeur spectrale : pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $(M-\lambda\mathrm{Id})(P)=XP-\lambda P=(X-\lambda)P$. Ainsi, $1\notin\mathrm{Im}(M-\lambda\mathrm{Id})$ (par exemple)

Mais $M-\lambda\mathrm{Id}$ est injectif, donc λ n'est pas valeur propre (en effet, si $(X-\lambda)P=0$, alors $P=0$)

On appelle spectre l'ensemble des valeurs spectrales d'une matrice ou d'un endomorphisme, noté $\mathrm{sp}(A)$ ou $\mathrm{sp}(u)$.

Dans l'exemple précédent, on a $\mathrm{sp}(M)=\mathbb{R}$.

Note : en dimension finie, $\mathrm{sp}(u)$ est aussi l'ensemble des valeurs propres de u.

D) Indépendance de sous-espaces vectoriels propres

Théorème :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$:

- Toute famille de $\vec{v}p$ associés à des vp deux à deux distinctes est libre.

- Autrement dit, si $F_1,\dots F_p$ sont des sous-espaces propres deux à deux distincts, alors la somme $F_1+\dots+F_p$ est directe.

Démonstration :

(1) Soient $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_p$ non nuls tels que $\forall i\in [\![1,n]\!], u(\vec{v}_i)=\lambda_i\vec{v}_i$, les λ_i étant deux à deux distincts.

Supposons que $\sum_{j=1}^{p} x_j\vec{v}_j=\vec{0}$. Montrons par récurrence sur p que $\forall j\in [\![1,p]\!], x_j=0$

- Si $p=1$: si $x_1\vec{v}_1=\vec{0}$, alors $x_1=0$ car $\vec{v}_1\neq\vec{0}$.
- Supposons la propriété vraie pour $p-1$ vecteurs propres ($p\in\mathbb{N}^*$), et considérons le cas de p vecteurs propres :

Si on a $\sum_{j=1}^{p} x_j\vec{v}_j=\vec{0}$ (1), alors $\sum_{j=1}^{p} x_j u(\vec{v}_j)=\vec{0}$ (2).

Donc ($\lambda_p(1)-(2)$) $\sum_{j=1}^{p} x_j(\lambda_p-\lambda_j)\vec{v}_j=\sum_{j=1}^{p-1} x_j(\lambda_p-\lambda_j)\vec{v}_j=\vec{0}$

D'où, par hypothèse de récurrence $\forall j\leq p-1, x_j\underbrace{(\lambda_p-\lambda_j)}_{\neq 0}=0$.

Donc $\forall j\leq p-1, x_j=0$, puis $x_p=0$, ce qui achève la récurrence et montre le premier résultat.

(2) Soit Soient $\vec{X}_1,\dots\vec{X}_p$ tels que $\forall i\in [\![1,p]\!], \vec{X}_i\in F_i$.

Supposons que $\vec{X}_1+\dots+\vec{X}_p=\vec{0}$.

Alors $\forall i\in [\![1,p]\!], \vec{X}_i=\vec{0}$, car sinon les $\vec{X}_i$ non nuls seraient des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes et formant une famille liée, ce qui est impossible d'après (1).

Exemple :

$E=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$u=D: f\mapsto f'$. Alors $u\in L_{\mathbb{C}}(E)$

Pour $\lambda\in\mathbb{C}$, $\varphi_\lambda : t\mapsto e^{\lambda t}$ est vecteur propre (non nul) de u associé à λ.

Donc $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est libre.

En dimension finie :

Corollaire :

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n a au plus n valeurs propres distinctes.

En effet, si $\lambda_1,\dots\lambda_p$ dont p valeurs propres distinctes de u, alors en prenant pour $i\in [\![1,p]\!]$ $\vec{v}_i$ un vecteur propre associé à λ_i, la famille $(\vec{v}_1,\dots\vec{v}_p)$ est libre, et donc $p\leq n$.

Remarque :

Autre démonstration :

On prend $\mathfrak{B}$ une base de E, $A=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$.

Alors l'ensemble des valeurs propres de u est aussi l'ensemble des valeurs propres de A, qui est l'ensemble des zéros de χ_A, et donc de cardinal $\leq n$ (car $\deg\chi_A=n$)

E) Exemples

- Géométrique :

Les projecteurs :

Soit p un projecteur (on suppose $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{Id}$)

Eléments propres : les valeurs propres de p sont 0 et 1, et les espaces propres sont $E_0(p) = \ker p$ et $E_1(p) = \ker(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p$.

Démonstration :

Soit p un projecteur sur F parallèlement à G, avec $F \oplus G = E$. (et $F, G \neq \{0\}$)

On résout $p(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ pour $\vec{v} \neq \vec{0}$.

On a $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$, où $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \in G$.

Alors $p(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{f} = \lambda(\vec{f} + \vec{g}) \Leftrightarrow \vec{f} = \lambda\vec{f}$ et $\lambda\vec{g} = \vec{0}$.

Discussion :

Si $\lambda = 0$, $p(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{g} \in G$. Donc 0 est vp d'espace propre associé G.

Si $\lambda = 1$, $p(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{f} \in F$. Donc 1 est vp d'espace propre associé F.

Sinon, $p(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{f} = \vec{g} = \vec{0}$, et λ n'est pas valeur propre.

- Exemple matriciel :

Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe :

Lemme (matrice à diagonale dominante) :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!], |A_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}|$.

Alors A est inversible.

En effet :

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, supposons que $AX = 0$.

Alors $X = 0$. En effet, supposons que $X \neq 0$; soit alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|X_{i_0}|$ soit maximal.

Alors $(AX)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} A_{i_0,j} X_j = 0$.

Donc $|A_{i_0,i_0} X_{i_0}| = \left| -\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}} A_{i_0,j} X_j \right| \leq \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}} |A_{i_0,j} X_j| \leq (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |A_{i_0,j}|) |X_{i_0}|$.

Soit, en simplifiant par $|X_{i_0}| > 0$, on obtient une contradiction.

Donc $X = 0$, et A est inversible.

Théorème (de localisation) :

Soit A une matrice complexe, et $(A_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}}$ ses coefficients.

Alors $\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(A_{i,i}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}|)$. ($\overline{D}(z, r) = \{x \in \mathbb{C}, |x - z| \leq r\}$)

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $B = A - \lambda I_n$; on a ainsi $B_{i,j} = A_{i,j} - \lambda\delta_{i,j}$.

Donc si $\forall i \in [\![1,n]\!], \underbrace{|A_{i,i}-\lambda|}_{B_{i,i}} > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \underbrace{|A_{i,j}|}_{B_{i,j}}$, alors B est inversible donc λ n'est pas valeur propre de A.

Remarque : on a le même résultat avec ${}^tA$: $\mathrm{sp}({}^tA) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \overline{D}(A_{j,j}, \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |A_{j,i}|)$.

($\mathrm{sp}({}^tA) = \mathrm{sp}(A)$ car $A-\lambda I_n$ est inversible $\Leftrightarrow {}^t(A-\lambda I_n) = {}^tA - \lambda I_n$ est inversible)

Matrice compagnon :

Soit $P = X^n - (a_0 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}) \in \mathbb{K}_n[X]$, et $A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

On cherche les valeurs propres de A_P. Equation aux éléments propres :

$A_P V = \lambda V$, où $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$A_P V = \lambda V \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_0 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ x_1 \underbrace{(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n)}_{-P(\lambda)} = 0 \end{cases}$$

Si $P(\lambda) \neq 0$, l'équation $A_P V = \lambda V$ n'a que la solution nulle, et λ n'est donc pas valeur propre. Si $P(\lambda) = 0$, l'ensemble des solutions est $\mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ de dimension 1.

Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de A_P est l'ensemble des racines de P, et les espaces propres sont les droites $\mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ de dimension 1.

De plus, $\chi_{A_P} = \begin{vmatrix} -X & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$.

En faisant la transformation $C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 + \ldots + X^{n-1}C_n$, on obtient :

$$\chi_{A_P} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & -X & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ \alpha & \cdots & \cdots & a_{n-1}-X \end{vmatrix}, \text{ où } \alpha = -P.$$

Ainsi, $\chi_{A_P} = (-1)^n P$ (En développant selon la première colonne).

Ceci montre que tout polynôme $(-X)^n+...$ est polynôme caractéristique d'au moins une matrice.

Application :

On suppose $P=X^n-a_0-...-a_{n-1}X^{n-1}$. Alors pour toute racine z de P, on a :

Soit $|z|\leq 1$, soit $|z-a_{n-1}|\leq \sum_{k=0}^{n-2}|a_k|$.

Matrices stochastiques, bistochastiques :

On dit que $A\in M_n(\mathbb{R})$ est stochastique *si ses coefficients sont positifs* et si $\forall i\in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$.

A est dite bistochastique si A et ${}^tA$ sont stochastiques :

$\forall i\in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}=1$

Proposition :

Soit $U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

(1) Alors $A\in M_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si A est à coefficients positifs et $AU=U$ c'est-à-dire si et seulement si U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Soit A stochastique :

(2) Alors $\mathrm{sp}(A)\subset \overline{D}(0,1)$, et $1\in \mathrm{sp}(A)$.

(3) Les ensembles des matrices stochastiques et bistochastiques sont compacts, convexes et stables par produit.

Démonstration :

(1) : $AU=U \Leftrightarrow \forall i\in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$

(2) : Soit $\lambda\in \mathrm{sp}(A)$. D'après le théorème de localisation, il existe $i\in [\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda-a_{i,i}|\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i,j}|$.

Alors $|\lambda|\leq |a_{i,i}|+|\lambda-a_{i,i}|\leq \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=1$ (A est à coefficients positifs)

(3) : Soient A, B stochastiques.

Alors AB est à coefficients positifs, et $(AB)U=A(BU)=AU=U$.

Pour bistochastique, on applique ce qui précède à A, B, ${}^tA$, ${}^tB$.

D'où déjà la stabilité par produit.

- Si A et B sont stochastiques, alors pour $\lambda\in[0;1]$, $(1-\lambda)A+\lambda B$ est stochastique : $((1-\lambda)A+\lambda B)U=(1-\lambda)U+\lambda U=U$.
- Compacité :

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\|=\max_{i,j\in[\![1,n]\!]}|a_{i,j}|$.

Alors pour toute matrice stochastique, $\|A\|\leq 1$. Donc l'ensemble des matrices stochastiques est borné.

Soient $\begin{array}{l} L_{i,j} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto A_{i,j} \end{array}$ et $\begin{array}{l} \lambda_i : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \end{array}$, formes linéaires continues (car en dimension finie)

Alors l'ensemble des matrices stochastiques est $\bigcap_{i,j\in[\![1,n]\!]} L_{i,j}^{-1}([0,+\infty[) \cap \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i^{-1}(\{1\})$, qui est une intersection finie de fermés donc un fermé.

Donc l'ensemble des matrices stochastiques est compact.

On fait pareil pour les matrices bistochastiques.

- Exemples analytiques :

Opérateurs différentiels linéaires (dans le cadre de fonctions de classe C^∞).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $E = C^\infty(I,\mathbb{C})$.

Pour $j \in [\![0, p-1]\!]$, soient $a_j : I \to \mathbb{C} \in E$.

On pose $u = D^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j D^j$ l'endomorphisme de E défini par :

$\forall f \in E, u(f) = f^{(p)} + \sum_{j=0}^{p-1} a_j f^{(j)}$.

Proposition :

Tout complexe λ est valeur propre de *u*, et les sous-espaces propres sont tous de dimension *p*.

Ceci découle du théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires (plus tard) :

Soient $a_0,\dots a_{p-1} : I \to \mathbb{C}$, continues. Alors l'ensemble des $y : E \to \mathbb{C}$ tels que $\forall x \in I, y^{(p)}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(x) y^{(j)}(x)$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension *p*.

En effet (pour le fait que ça en découle), on a l'équivalence :

$$u(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in I, f^{(p)}(x) = -\sum_{j=0}^{p-1} a_j(x) f^{(j)}(x) + (\lambda - a_0) f(x)$$

Comme les $-a_j$ et $\lambda - a_0$ sont continues pour tout λ, l'ensemble des solutions est un $\mathbb{C}$-ev de dimension *p*.

Exemple :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Trouver les valeurs propres et les fonctions propres (c'est-à-dire les vecteurs propres de $C^\infty(I,\mathbb{C})$) de $\begin{array}{l} D : C^\infty(I,\mathbb{C}) \to C^\infty(I,\mathbb{C}) \\ f \mapsto g \text{ tel que } \forall x \in I, g(x) = x f'(x) \end{array}$.

Equation aux éléments propres :

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C^\infty(I,\mathbb{C})$, supposons que $\forall x \in I, x f'(x) = \lambda f(x)$.

Si $0 \notin I$, on a $f'(x) = \dfrac{\lambda}{x} f(x)$, donc la solution générale est $f(x) = K e^{\lambda \ln|x|} = K|x|^\lambda$

Ce sont toutes des fonctions de classe C^∞, donc l'ensemble des valeurs propres de D est $\mathbb{C}$, et E_λ est de dimension 1 (c'est $\mathrm{Vect}(x \mapsto |x|^\lambda)$)

Si maintenant $0\in I$:
Si $0=\inf I$ (ou $\sup I$ de façon symétrique) :
$x\mapsto x^{\lambda}$ est elle de classe C^{∞} sur I ?
Oui si et seulement si $\lambda\in\mathbb{N}$, et donc l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{N}$.
Remarque :
Si $n<\lambda<n+1$ pour $n\in\mathbb{N}$, alors pour $x>0$, $f^{(n+1)}(x)=(\lambda-n-1)...(\lambda)x^{\lambda-n-1}$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=+\infty$, et f n'est pas de classe C^{∞}.
Si $\lambda\in\mathbb{C}$, pour $n>\mathrm{Re}(\lambda)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|f^{(n)}(x)\right|=+\infty$.
Si maintenant $0\in\mathring{I}$, on fait pareil.
Attention : il y a un problème de raccordement en 0 :
On coupe I en deux : $\begin{cases} I_1=I\cap\mathbb{R}_+^* \\ I_2=I\cap\mathbb{R}_-^* \end{cases}$
Si $D(f)=\lambda f$, on trouve deux constantes K_1, K_2 telles que :
$(*)\begin{cases} \forall x\in I_1, f(x)=K_1x^{\lambda} \\ \forall x\in I_2, f(x)=K_2|x|^{\lambda} \end{cases}$
Comme $f_{/I_1\cup\{0\}}$ est de classe C^{∞}, $\lambda\in\mathbb{N}$.
Ainsi, tout entier est valeur propre car $x\mapsto x^{\lambda}$ est fonction propre associée.
Détermination de $\ker(D-\lambda\mathrm{Id})$ (pour $\lambda\in\mathbb{N}$)
f définie par $(*)$ doit se raccorder de façon C^{∞} en 0.
C'est possible si et seulement si $K_1=(-1)^{\lambda}K_2$

F) Diagonalisabilité et diagonalisation en dimension finie

On considère un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n finie, $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, $A\in M_n(\mathbb{K})$.

1) Définition

Un endomorphisme $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$ est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2) Caractérisation

Théorème :
Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, $\dim_{\mathbb{K}} E=n<+\infty$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) u est diagonalisable
(2) Il existe une base $\mathfrak{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.
(3) E est la somme (directe forcément) des sous-espaces propres de u.
(4) La somme des dimensions des espaces propres de u est égale à n.

Démonstration :

$(1)\Rightarrow(2)$: Si la matrice de u dans $\mathfrak{B}=(v_1,...v_n)$ est

$$M_{\mathfrak{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}, \text{ on a alors } \forall i\in[\![1,n]\!], u(v_i)=\lambda_i v_i$$

$(2)\Rightarrow(3)$: Soient $F_1,...F_p$ *les* sous-espaces propres de u.

Alors $\sum_{i=1}^{p}F_i$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\bigcup_{i=1}^{p}F_i)$. Comme $\bigcup_{i=1}^{p}F_i$ contient une base de E (d'après 2), on a bien $\sum_{i=1}^{p}F_i=E$.

$(3)\Rightarrow(4)$: Si $E=F_1\oplus...\oplus F_p$ où $F_1,...F_p$ sont les sous-espaces propres de u, alors $\dim_{\mathbb{K}}E=n=\sum_{i=1}^{p}F_i$.

$(4)\Rightarrow(1)$: Si $\dim_{\mathbb{K}}E=\sum_{i=1}^{p}F_i$, comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a $E=F_1\oplus...\oplus F_p$. Soit, pour $i\in[\![1,p]\!]$, $\mathfrak{B}_i$ une base de F_i.

Alors $\mathfrak{B}=\bigcup_{i=1}^{p}\mathfrak{B}_i$ est une base de E, et comme tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathfrak{B}$ est dans l'un des F_i, $i\in[\![1,p]\!]$, la matrice de u dans $\mathfrak{B}$ est diagonale.

3) Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1,..\lambda_p$ deux à deux distinctes. On note $F_i=\ker(u-\lambda_i\mathrm{Id})$. On appelle i-ème projecteur spectral de u le projecteur sur F_i parallèlement à $G_i=\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}F_j$.

Exemple :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, projecteur sur F parallèlement à G où $F\oplus G=E$ et $F,G\neq\{0\}$.

On a :

$\mathrm{sp}(u)=\{0,1\}$, $\ker(u-0\mathrm{Id})=G$, $\ker(u-\mathrm{Id})=F$.

Donc u est diagonalisable car $E=F\oplus G$.

Les projecteurs spectraux de u sont :

u, projeté sur F parallèlement à G,

et $\mathrm{Id}-u$, projeté sur G parallèlement à F.

Théorème :

Sous les hypothèses de la définition, on note π_i le projecteur sur F_i parallèlement à G_i.

Alors :

(1) $\pi_1 + ... + \pi_p = \mathrm{Id}_E$

(2) $\forall i \neq j, \pi_i \circ \pi_j = 0$

(3) $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j$ (remarque : $F_j = \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$)

(4) Plus généralement : $\forall m \in \mathbb{N}, u^m = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^m \pi_j$,

Et pour tout $P = a_0 + ... + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$a_0 \mathrm{Id}_E + ... + a_d u^d = \widetilde{P}(u) = \sum_{j=1}^{p} P(\lambda_j) \pi_j$

Inversement, s'il existe des projecteurs $\pi_i, i = 1..p$ vérifiant :

$\sum_{j=1}^{p} \pi_j = \mathrm{Id}_E$, $\forall i \neq j, \pi_i \circ \pi_j = 0$ et $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j$, alors u est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les $\lambda_i, i \in [\![1, p]\!]$.

Si de plus les λ_i sont deux à deux distincts, les projecteurs spectraux de u sont les $\pi_i, i \in [\![1, p]\!]$.

Démonstration :

(2) On a pour $i, j \in [\![1, p]\!]$ avec $i \neq j$: $\mathrm{Im}\,\pi_j = F_j \subset \ker \pi_i = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} F_k$

Donc $\pi_i \circ \pi_j = 0$.

(1), (3) : Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et $x \in F_i$, on a $\mathrm{Id}(x) = x$, et :

$\pi_j(x) = \begin{cases} x \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Donc $\sum_{j=1}^{p} \pi_j(x) = x = \mathrm{Id}_E(x)$.

Et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j(x) = \lambda_i x = u(x)$ (par définition de $F_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$)

D'où le résultat puisque $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j$ et u, $\sum_{j=1}^{p} \pi_j$ et Id_E, coïncident sur tous les F_i, donc sur $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$.

(4) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k \pi_j$

Pour $k = 0,1$, le résultat a déjà été montré.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $u^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k \pi_j$.

Alors $u^{k+1} = u \circ u^k = \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k \pi_j\right) = \sum_{i,j=1}^{p} \lambda_j \lambda_i^k \underbrace{\pi_j \circ \pi_i}_{\delta_{i,j}\pi_i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{k+1} \pi_j$

Ce qui achève la récurrence ; puis, par combinaison linéaire, on a $\forall P \in \mathbb{K}[X], \widetilde{P}(u) = \sum_{j=1}^{p} P(\lambda_j)\pi_j$.

Pour la réciproque :

Supposons que $\forall i, j \in [\![1, p]\!], \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}\pi_i$, $\sum_{j=1}^{p} \pi_j = \mathrm{Id}_E$ et $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j$.

Il faut montrer que *u* est diagonalisable et que si les λ_i sont deux à deux distincts, les projecteurs spectraux de *u* sont les π_i .

Posons pour $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = \mathrm{Im}\,\pi_i$.

Comme π_i est un projecteur, on a $\forall x \in F_i, \pi_i(x) = x$

De plus, pour $i, j \in [\![1, p]\!]$ avec $j \neq i$ et $x \in F_i$, $\pi_j(x) = \underbrace{\pi_j \circ \pi_i}_{=0}(x) = 0$.

Ainsi, pour $i \in [\![1, p]\!]$: $\forall x \in F_i, u(x) = \lambda_i \pi_i(x) = \lambda_i x$.

Donc tout vecteur non nul de F_i est propre pour *u*.

Or, pour tout $y \in E$, $y = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(y) \in \sum_{i=1}^{p} F_i$.

Ainsi, l'ensemble des vecteurs propres de *u* engendre *E*, donc *u* est diagonalisable.

On cherche maintenant les vecteurs propres et valeurs propres :

Equation aux éléments propres : $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ pour $\vec{x} \neq \vec{0}$.

On a $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(\vec{x})$ et $u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i(\vec{x})$.

De plus, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe. En effet, si $f_1 + ... + f_p = \vec{0}$ pour $(f_1, ... f_p) \in F_1 \times ... \times F_p$, alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\vec{0} = \pi_k(f_1 + ... + f_p) = f_k$ car $\pi_k(f_i) = \vec{0}$ si $i \neq k$.

Donc $u(x) = \lambda x$ équivaut à $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda \pi_i(\vec{x})$, c'est-à-dire par unicité de la décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, $\forall i \in [\![1, p]\!], (\lambda_i - \lambda)\pi_i(x) = 0 \ (*)$.

Discussion :

- Si $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda \neq \lambda_i$, alors $\forall i \in [\![1, p]\!], \pi_i(x) = 0$. Donc $u(x) = \lambda x$ équivaut à $x = 0$, donc $\lambda \notin \mathrm{sp}(u)$.
- Si les λ_i sont distincts deux à deux, et si $\lambda = \lambda_{i_0}$ pour $i_0 \in [\![1, p]\!]$, $(*)$ équivaut à $\forall i \neq i_0, \pi_i(x) = 0$, c'est-à-dire à $x = \pi_{i_0}(x) \in F_{i_0}$.

Autrement dit, λ_{i_0} est valeur propre de *u* et le sous-espace propre associé est F_{i_0} . Ainsi, les π_i sont les projecteurs spectraux de *u*.

Remarque : si les λ_i ne sont pas tous distincts, u est diagonalisable, ses valeurs propres sont les λ_i mais les sous-espaces propres ne sont pas les F_i, mais les $E_\lambda(u) = \bigoplus_{\substack{i \text{ tel que} \\ \lambda_i=\lambda}} F_i$.

4) Cas des matrices

Définition :

$A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que D soit diagonale, où $D = P^{-1}AP$.

Théorème (lien entre matrices et endomorphismes) :

(1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme $u_A : \begin{array}{l} M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto A \times X \end{array}$ est diagonalisable.

(2) Pour un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, une base $\mathfrak{B}$ de E, et en posant $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$:

- u est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable
- $\mathrm{sp}(u) = \mathrm{sp}(A)$
- $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$ est valeur propre de u associée à $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\vec{v})$ est vecteur propre de A associé à λ.

Démonstration :

Déjà, il suffit d'établir (2) : avec $A = \mathrm{mat}_{\text{cano}}(u)$, on a $(2) \Rightarrow (1)$.

Montrons alors (2) :

- Si u est diagonalisable, il existe $\mathfrak{B}'$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}'}(u) = D$ est diagonale.

Mais alors $D = P^{-1}AP$, P étant la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$.

Donc A est diagonalisable.

- Réciproquement, si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

Soit $\mathfrak{B}'$ une base de E telle que la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ soit P.

Alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}'}(u) = P^{-1}AP = D$. Donc u est diagonalisable.

5) Pratique de la diagonalisation

Définition :

Diagonaliser un endomorphisme, c'est trouver une base de vecteurs propres.

Diagonaliser une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, c'est trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Problème :

Pour chaque valeur propre λ de u, on détermine une base $\mathfrak{B}_\lambda$ de l'espace propre $E_\lambda(u)$. Alors $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathfrak{B}_\lambda$ est libre.

Il y a alors deux cas :

Soit $\# \bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathfrak{B}_\lambda = \dim E$, et u est donc diagonalisable, $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathfrak{B}_\lambda$ étant une base de vecteurs propres.

Soit $\# \bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathfrak{B}_\lambda < \dim E$, et u n'est pas diagonalisable.

NB : pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, considérer l'endomorphisme u_A de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque :

Parfois (surtout en dimensions petites 2, 3, 4), on a intérêt à commencer par calculer le polynôme caractéristique.

On verra plus tard aussi le théorème spectral :

Toute matrice symétrique réelle est (orthogonalement) diagonalisable.

6) Exemples

- Tout projecteur est diagonalisable
- Si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, toute symétrie est diagonalisable.
- Exercice : soit $p \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_p[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

On pose $u : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto (X^2-1)P' + n(X-1)P \end{array}$.

Pour quelles valeurs de p u est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$?

Quelles sont alors ses valeurs propres, vecteurs propres ;
u est-il diagonalisable ?

Déjà, u est linéaire

Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

Alors $\deg(u(P)) \leq p+1$, et le coefficient de X^{p+1} vaut $a_p(p-n)$

Ainsi, $u \in L(E)$ si et seulement si $p = n$.

Equation aux éléments propres :

$u(P) = \lambda P \Leftrightarrow (X^2-1)P' = (nX - \lambda - n)P \quad (e)$

Résolution de l'équation différentielle :

On pose $I =]-1;1[$.

Sur I, $(e) \Leftrightarrow P'(x) = \dfrac{nx+\lambda-n}{x^2-1} P(x)$.

Calcul d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{nx+\lambda-n}{x^2-1}$:

$\dfrac{nx+\lambda-n}{x^2-1} = 0 + \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

On a $a = \dfrac{R(1)}{Q'(1)} = \dfrac{\lambda}{2}$ et $b = \dfrac{R(-1)}{Q'(-1)} = n - \dfrac{\lambda}{2}$ (où $R = nX - \lambda - n$, $Q = X^2 - 1$)

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \dfrac{nx+\lambda-n}{x^2-1}$ est $x \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\ln|x-1| + (n - \dfrac{\lambda}{2})\ln|x+1|$.

La solution générale sur I de (e) est donc :

$P = K|x-1|^{\lambda/2}|x+1|^{n-\lambda/2}$.

Comme $P\in \mathbb{R}_n[X]$,

- Si $\frac{\lambda}{2}$ et $n-\frac{\lambda}{2}$ sont entiers, alors λ s'écrit $\lambda=2p, p\in [\![0,n]\!]$.

Ainsi, la solution générale sur I de (e) est :

$P=K(1-X)^p(X+1)^{n-p}$.

Inversement, si $P=K(1-X)^p(X+1)^{n-p}$, alors P vérifie (e) sur $\mathbb{R}$, puisqu'il le vérifie sur I qui est infini (et P est un polynôme)

- Si $\frac{\lambda}{2}\notin \mathbb{N}$ ou $n-\frac{\lambda}{2}\notin \mathbb{N}$, alors $P=K\left|X-1\right|^{\lambda/2}\left|X+1\right|^{n-\lambda/2}$ est polynomial si et seulement si $K=0$, et dans ce cas λ n'est pas valeur propre.
- Ainsi, $\mathrm{sp}(u)\subset\{0,2,...2n\}$.

Réciproquement, si $\lambda=2p, p\in[\![1,n]\!]$, alors $L_p=(X-1)^p(X+1)^{n-p}$ vérifie bien $u(L_p)=\lambda L_p$.

Donc λ est valeur propre de u et $\mathrm{vect}(L_p)\subset E_\lambda(u)$.

Enfin, $E_\lambda(u)$ est de dimension 1 car $\dim \mathbb{R}_n[X]=n+1$ et on a $n+1$ valeurs propres distinctes.

Comme $\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)\subset \mathbb{R}_n[X]$, on a donc $n+1\geq \sum_{\lambda\in\{0,...2n\}} \underbrace{\dim E_\lambda(u)}_{\geq 1}$

Et donc $n+1=\sum_{\lambda\in\{0,...2n\}}\dim E_\lambda(u)$, soit $\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)=\mathbb{R}_n[X]$

Conclusion : les valeurs propres de u sont $\{0,2,...2n\}$, et $E_\lambda(u)=\mathrm{Vect}(L_p)$.

Donc u est diagonale dans la base $(L_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$.

- On considère la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0)\\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ (0) & & 1 & 0\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R}).$$

Alors A est orthogonalement diagonalisable car symétrique réelle.
Equation aux éléments propres :

$AX=\lambda X$, $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

$$\Leftrightarrow (S):\begin{cases} x_2=\lambda x_1\\ x_1+x_3=\lambda x_2\\ \vdots\\ x_{n-2}+x_n=\lambda x_{n-1}\\ x_{n-1}=\lambda x_n\end{cases}$$

Idée : utiliser les suites récurrentes linéaires :
On pose $x_0=x_{n+1}=0$

Ainsi, $AX=\lambda X \Leftrightarrow \forall i\in[\![2,n]\!], x_{i-2}+x_i=\lambda x_{i-1}$ $(*)$.

Equation caractéristique : $X^2-\lambda X+1=0$ (E)

$\Delta=\lambda^2-4$.

Pour $|\lambda|<2$ (d'après le théorème de localisation, les valeurs propres sont de module ≤ 2)

On pose $\theta=\text{Arccos}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\in\left]0,\pi\right[$.

Les racines de (E) sont $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$.

Les suites vérifiant (*) sont donc de la forme $x_n=\alpha e^{in\theta}+\beta e^{-in\theta}$.

Or, $x_0=\alpha+\beta=0$, donc $\beta=-\alpha$, puis $x_{n+1}=\alpha(e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta})=0$, donc $2i\alpha\sin((n+1)\theta)=0$.

Discussion :

- Si $\sin((n+1)\theta)\neq 0$, alors $\alpha=0$, donc la seule solution du système est $X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Donc λ n'est pas valeur propre.
- Sinon :

$\sin((n+1)\theta)=0\Leftrightarrow\theta=\frac{k\pi}{n+1},k\in[\![1,n]\!]$.

Donc $(S)\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{C},\forall j\in[\![1,n]\!],x_j=2i\alpha\sin j\theta$

Ainsi, $\lambda=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ est valeur propre, et l'espace propre associé est engendré par $\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \sin 2\theta\\ \vdots\\ \sin n\theta\end{pmatrix}$ avec $\theta=\text{Arccos}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

On a donc trouvé n valeurs propres distinctes, et on n'a pas besoin d'étudier le cas $|\lambda|\geq 2$. Ainsi, $\text{sp}(A)=\left\{2\cos\frac{k\pi}{n+1},k\in[\![1,n]\!]\right\}$.

II Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

A) Cas général d'une $\mathbb{K}$-algèbre

1) Définition

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre unitaire. Pour $A_0\in A$ et $P=\sum_{j=0}^{d}\alpha_j X^j\in\mathbb{K}[X]$, on pose $\widetilde{P}(A_0)=\sum_{j=0}^{d}\alpha_j A_0^j$, où $A_0^0=1_A$, neutre pour $\times$ de A.

2) Morphisme d'évaluation

Proposition :

(1) L'application $\begin{aligned}Ev_{A_0}:\mathbb{K}[X]&\to A\\ P&\mapsto\widetilde{P}(A_0)\end{aligned}$ est un morphisme d'algèbres.

(2) Son image est la sous-algèbre de A engendrée par A_0, notée $\mathbb{K}[A_0]$.

Démonstration :

(1) Ev_{A_0} est linéaire…

Pour $P=\sum_{j=0}^{d}\alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$Ev_{A_0}(P\times X^n)=Ev_{A_0}\left(\sum_{j=0}^{d}\alpha_j X^{j+n}\right)=\sum_{j=0}^{d}\alpha_j A_0^{j+n}=Ev_{A_0}(P)\times Ev_{A_0}(X^n)$$

D'où le résultat pour $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ par linéarité.

(2)…

Remarque :

En général, Ev_{A_0} n'est pas surjectif car $\mathbb{K}[A_0]$ est toujours commutative

(Si $\varphi:(A,+,\times,\cdot)\to(A',+,\times,\cdot)$ est un morphisme d'algèbres où A est commutatif, alors $\varphi(A)$ est commutative)

3) Noyau du morphisme d'évaluation, polynômes annulateurs, polynôme minimal

Théorème :

$\ker Ev_{A_0}$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ (puisque Ev_{A_0} est en particulier un morphisme d'anneau).

On a en plus deux cas :

(1) Si Ev_{A_0} est injectif, alors $\begin{array}{l}\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[A_0]\\ P\mapsto\widetilde{P}(A_0)\end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. En particulier, $\{A_0^k, k\in\mathbb{N}\}$ est libre.

(2) Il existe un polynôme unitaire μ_0, appelé polynôme minimal de A_0 tel que $\ker Ev_{A_0}=\mu_0\mathbb{K}[X]$. Si on note de plus $d=\deg\mu_0$, on a $d\geq 1$ et $\{1_A,\dots A_0^{d-1}\}$ est une base de $\mathbb{K}[A_0]$.

Dans le premier cas, A_0 est dit transcendant ; dans le deuxième, A_0 est dit algébrique.

Remarque :

- Dans le deuxième cas, Ev_{A_0} se factorise par l'idéal $\mu_0\mathbb{K}[X]$ en un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\mathbb{K}[X]/\mu_0\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[A_0]$.
- Si $A_0,B_0\in A$ ont le même polynôme minimal μ, alors $\mathbb{K}[A_0]$ et $\mathbb{K}[B_0]$ sont isomorphes.

Démonstration (du théorème) :

$\ker Ev_{A_0}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc de la forme $\mu\mathbb{K}[X]$.

Si $\mu=0$, Ev_{A_0} est injectif et établit un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur son image à savoir $\mathbb{K}[A_0]$.

Si $\mu \neq 0$: il existe un unique μ_0 unitaire tel que $\ker Ev_{A_0} = \mu_0 \mathbb{K}[X]$, à savoir $\mu_0 = \dfrac{1}{\text{t.dominant}} \mu$.

On peut supposer que $\mu = \mu_0$. On pose $d = \deg \mu$.

Si $d = 0$, cela signifie que $\mu = 1$, c'est-à-dire $Ev_{A_0}(1) = 0$, ce qui est impossible car $Ev_{A_0}(1) = 1_A \neq 0$.

Montrons maintenant que $u = Ev_{A_0 / \mathbb{K}_{d-1}[X]}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Déjà, u est injectif :

$\ker u = \ker Ev_{A_0} \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mu \mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \{0\}$ car $\deg \mu = d$.

De plus, u est surjectif :

Soit $B = \widetilde{P}(A_0) \in \mathbb{K}[A_0]$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.

La division euclidienne de P par μ donne :

$B = R \times \mu + S$ où $\deg S \leq d - 1$.

Donc $B = \widetilde{P}(A_0) = \widetilde{R}(A_0) \times \widetilde{\mu}(A_0) + \widetilde{S}(A_0) = \widetilde{S}(A_0)$.

Donc $B = u(S)$.

Donc u est un isomorphisme, et $\dim \mathbb{K}[A_0] = d$.

B) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

- On prend pour A l'une des algèbres $A = (L_{\mathbb{K}}(E), +, \circ, \cdot)$, $1_A = \mathrm{Id}_E$ ou $A = (M_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, $1_A = I_n$.

Soit $P = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$

Pour $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

$\widetilde{P}(u) = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_d u^d$, $\widetilde{P}(A) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_d A^d$.

On appelle polynôme annulateur de u / de A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\widetilde{P}(u) = 0 \in L_{\mathbb{K}}(E)$ / $\widetilde{P}(A) = 0 \in M_n(\mathbb{K})$.

Le morphisme d'évaluation est ici le morphisme d'algèbres :

$P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \widetilde{P}(u) / \widetilde{P}(A) \in L_{\mathbb{K}}(E) / M_n(\mathbb{K})$

- Propriétés particulières :

Proposition :

- En dimension $n \geq 2$, le morphisme n'est jamais surjectif.
- En dimension $n < +\infty$, il n'est jamais injectif.

Démonstration :

Si $\dim E \geq 2$, $(L_{\mathbb{K}}(E), +, \circ, \cdot)$ n'est pas commutative.

Si $\dim E = n < +\infty$, alors $Ev_u : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \widetilde{P}(u) \in L_{\mathbb{K}}(E)$ n'est pas injectif car $\{u^n = Ev_u(X^n)\}$ n'est pas libre, car infinie dans un espace de dimension finie.

Idem pour $M_n(\mathbb{K})$.

- Cas de la dimension finie :

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ avec $\dim_{\mathbb{K}} E = n < +\infty$ (ou $u \in M_n(\mathbb{K})$)

On sait que $Ev_u : P \mapsto \widetilde{P}(u)$ n'est pas injectif.

Donc $\ker Ev_u$ est un idéal, de la forme $\mu.\mathbb{K}[X]$, où μ est unitaire de degré ≥ 1.

Alors μ est le polynôme minimal de *u* (noté $\min(u)$ ou $\min_u$)

L'idéal $\mu.\mathbb{K}[X] = \ker Ev_u$ est l'idéal annulateur, c'est l'ensemble des polynômes annulateurs de *u*.

Remarque :

$\min(u)$ est le polynôme unitaire annulateur de plus petit degré.

C) Exemple

- Projecteurs :

$u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ (E quelconque) est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ est annulateur de *u*.

En effet, *u* est un projecteur si et seulement si $u \circ u - u = 0$.

Polynôme minimal ?

Déjà, c'est un polynôme unitaire divisant $X^2 - X$.

- Soit $\min(u) = X$ et $u = 0$,
- Soit $\min(u) = X - 1$ et $u = \mathrm{Id}_E$
- Soit $\min(u) = X^2 - X$, et *u* n'est ni nul ni l'identité.

- Dérivation de $\mathbb{K}[X]$: $D : P \mapsto P'$ (en caractéristique 0)

Soit $P = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$; ainsi $\widetilde{P}(D) \in L_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$.

Pour $M \in \mathbb{K}[X]$:

$\widetilde{P}(D)(M) = \alpha_0 M + \alpha_1 M' + ... + \alpha_d M^{(d)}$.

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors $\widetilde{P}(D) \neq 0_{L_{\mathbb{K}}(E)}$.

En effet, pour $M = X^d$:

$\widetilde{P}(D)(M) = \alpha_0 X^d + d\alpha_1 X^{d-1} + ... + \alpha_d d!$

Donc $\widetilde{P}(D)(M) = 0 \Leftrightarrow \forall j \in [\![0, d]\!], d \times ... \times (d - j + 1)\alpha_j = 0 \Leftrightarrow P = 0$

(car on est en caractéristique 0)

- $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$, c'est-à-dire X^p est annulateur de *u*.

Propriété :

u est nilpotent si et seulement si il admet un polynôme minimal de la forme X^r ; *r* s'appelle alors l'indice de nilpotence de *u*.

Même définition et propriété pour les matrices carrées.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ est nilpotente (matrice de Jordan)}$$

On a : $A^n = 0$, et $A^{n-1} \neq 0$. En effet, A est la matrice dans la base canonique de $u : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ (x_1,\dots x_n) \mapsto (x_2,\dots x_{n-1},0) \end{array}$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, A^j est la matrice dans la base canonique de $u^j : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ (x_1,\dots x_n) \mapsto (x_{j+1},\dots x_{n-1},0,\dots 0) \end{array}$.

Comme $u^{n-1}(x_1,\dots x_n) = (x_n,0\dots,0)$, on a $u^{n-1} \neq 0$, et $u^n = 0$.

$\Delta : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$, $\mathbb{K}$ étant de caractéristique p non nulle, est nilpotente.

En effet, $\Delta^p(X^k) = k \times (k-1)\dots(k-p+1)X^{k-p} = 0$:

Si $k \leq p-1$, ok

Si $k \geq 1$, alors l'un des p entiers consécutifs $k,\dots,(k-p+1)$ est multiple de p.

D) Réduction de Jordan des nilpotents en dimension finie

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, nilpotent.

Alors :

(1) $u^n = 0$

(2) Si r est l'indice de nilpotence, on a $\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \dots \subsetneq \ker u^r = E$

(3) $d_k = \dim \ker u^k$ est concave (et croissante) : $\forall k \in \mathbb{N}^*, d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$

Démonstration :

(1) Soit r l'indice de nilpotence.

Alors $u^r = 0$, et $u^{r-1} \neq 0$. Soit $v \in E$ tel que $u^{r-1}(v) \neq 0$.

Alors $(v, u(v) \dots u^{r-1}(v))$ est libre.

En effet : soient $\lambda_0,\dots\lambda_{r-1} \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i(v) = 0$.

Alors en appliquant u^{r-1}, il reste $\lambda_0 u^{r-1}(v) = 0$, donc $\lambda_0 = 0$, Donc… la famille est libre, et $r \leq n$, d'où $u^n = 0$

Remarque : c'est une application du théorème de Cayley–Hamilton (plus tard)

(2) On a déjà $\forall i \in [\![0, r-1]\!], \ker u^i \subset \ker u^{i+1}$.

On a aussi $\ker u^r = E$ et $\ker u^{r-1} \neq E$.

On va montrer que si $\ker u^i = \ker u^{i+1}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall j \geq i, \ker u^j = \ker u^i$, ce qui établira le résultat voulu puisque cela signifie alors que $i \geq r$

Par récurrence :

Si $j = i$, ok ; si $j = i+1$, ok.

Supposons que pour $j \geq i, \ker u^j = \ker u^i$.

Soit alors $x \in \ker u^{j+1}$. Alors $u^{j+1}(x) = 0$. Donc $u(x) \in \ker u^j$. Donc $u(x) \in \ker u^i$. Donc $x \in \ker u^{i+1} = \ker u^i$.

Donc $\ker u^{j+1} \subset \ker u^i$, et on a l'égalité, l'autre inclusion étant vraie.

(3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrons que $d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$.
On a $d_{k+1} - d_k = \dim\ker u^{k+1} - \dim\ker u^k = \dim\ker \tilde{u}_k$, où $\tilde{u}_k = u_{/\operatorname{Im} u^k}$.
En effet :
$\dim \operatorname{Im} u^k = \dim\ker \tilde{u}_k + \dim \operatorname{Im} \tilde{u}_k$ (on est en dimension finie).
Comme $\operatorname{Im}\tilde{u}_k = \operatorname{Im} u^{k+1}$, on a $\dim \operatorname{Im} u^k = \dim\ker\tilde{u}_k + \dim\operatorname{Im} u^{k+1}$,
soit $\dim E - d_k = \dim\ker\tilde{u}_k + \dim E - d_{k+1}$ ou $d_{k+1} - d_k = \dim\ker\tilde{u}_k$
Et $d_k - d_{k-1} = \dim\ker\tilde{u}_{k-1}$.
Montrons maintenant que $\ker\tilde{u}_k \subset \ker\tilde{u}_{k-1}$, ce qui montrera l'inégalité.
On a : $\operatorname{Im} u^{k-1} \supset \operatorname{Im} u^k$. Donc $\tilde{u}_k = u_{/\operatorname{Im} u^k} = (u_{/\operatorname{Im} u^{k-1}})_{/\operatorname{Im} u^k} = \tilde{u}_{k-1/\operatorname{Im} u^k}$
Soit $\ker\tilde{u}_k = \ker\tilde{u}_{k-1} \cap \operatorname{Im} u^k$, donc $\ker\tilde{u}_k \subset \ker\tilde{u}_{k-1}$.

Autre démonstration du (3) :
Il suffit de montrer qu'un supplémentaire S_k de $\ker u^k$ dans $\ker u^{k+1}$ est de dimension inférieure ou égale à celle d'un supplémentaire de $\ker u^{k-1}$ dans $\ker u^k$:
Soit S_k tel que $S_k \oplus \ker u^k = \ker u^{k+1}$.
Alors $u(S_k) \subset u(\ker u^{k+1}) \subset \ker u^k$,
Et $u(S_k) \cap \ker(u^{k-1}) = \{0\}$ (En effet, soit $x \in S_k$ tel que $u(x) \in \ker u^{k-1}$. Alors $x \in S_k \cap \ker u^k = \{0\}$, donc $x = 0$ et $u(x) = 0$)
Donc comme de plus $u(S_k) \subset \ker u^k$ (et $\ker u^{k-1} \subset \ker u^k$), on a :
$u(S_k) \oplus \ker u^{k-1} \subset \ker u^k$, et donc d'après le théorème de Grassmann, $\dim(u(S_k)) \leq d_k - d_{k-1}$.
Or, $\dim(u(S_k)) = \dim(\operatorname{Im} u_{/S_k}) = \dim S_k - \dim\ker u_{/S_k}$.
Donc comme $\dim\ker u_{/S_k} = \dim(\ker u \cap S_k) \leq \dim(\ker u^k \cap S_k) = 0$, on a :
$\dim(u(S_k)) = \dim S_k = d_{k+1} - d_k$, d'où l'inégalité voulue.

Théorème de Jordan (Hors programme) :
Soit E de dimension finie.
Si $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ est nilpotent, alors il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & & (0) \\ & J_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{k_p} \end{pmatrix}$$

Où $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{K})$ (et $J_1 = (0)$)

Démonstration :
On note r l'indice de nilpotence de u.
Soit S_{r-1} tel que $\ker u^{r-1} \oplus S_{r-1} = E$.

Alors comme dans la fin de la démonstration précédente :

$u(S_{r-1}) \subset \ker u^{r-1}$ et $u(S_{r-1}) \cap \ker u^{r-2} = \{0\}$.

Soit alors S_{r-2} contenant $u(S_{r-1})$ et tel que $S_{r-2} \oplus \ker u^{r-2} = \ker u^{r-1}$.

(C'est possible : prendre par exemple un supplémentaire S de $\ker u^{r-2} \oplus u(S_{r-1})$ dans $\ker u^{r-1}$. En posant $S_{r-2} = u(S_{r-1}) + S = u(S_{r-1}) \oplus S$, on a $S_{r-2} + \ker u^{r-2} = \ker u^{r-1}$ et la somme est directe)

On construit ainsi une suite $S_{r-1} \ldots S_0$ telle que $\forall k \leq r-1$, on ait :

$$\begin{cases} S_k \oplus \ker u^k = \ker u^{k+1} \\ \quad u(S_k) \subset S_{k-1} \end{cases}$$

Si on prend maintenant une base $\mathfrak{B}_{r-1}$ de S_{r-1}, alors $u(\mathfrak{B}_{r-1})$ est une famille libre de $S_{r-2} \subset \ker u^{r-1}$ (car $u_{/S_{r-1}}$ est injectif : $\ker u_{/S_{r-1}} = \ker u \cap S_{r-1} \subset \ker u^{r-1} \cap S_{r-1} = \{0\}$).

On peut ainsi compléter $u(\mathfrak{B}_{r-1})$ en $\mathfrak{B}_{r-2}$, base de S_{r-2}.

Plus généralement, si $\mathfrak{B}_{k+1}$, base de S_{k+1}, est construite, $u(\mathfrak{B}_{k+1})$ est une famille libre de $S_k \subset \ker u^{k+1}$; on la complète en une base $\mathfrak{B}_k$ de S_k.

Comme on a $\underbrace{S_0 \oplus S_1 \oplus \ldots}_{\ker u^i} \oplus S_i \oplus \ldots \oplus S_{r-1} = E$, $\bigcup_{k=0}^{r-1} \mathfrak{B}_k$ est une base de E.

Il faut ensuite ordonner la base pour obtenir la matrice voulue…

Exemple sur un cas particulier :

Si $n = 6$ et $r = 3$:

On a $\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \ker u^3 = E$

On note $\mathfrak{B}_2$ une base d'un supplémentaire de $\ker u^2$ dans E.

$\mathfrak{B}_1 \supset u(\mathfrak{B}_2)$ une base d'un supplémentaire de $\ker u$ dans $\ker u^2$.

$\mathfrak{B}_0 \supset u(\mathfrak{B}_1)$ une base d'un supplémentaire de $\{0\}$ dans $\ker u$.

Si par exemple $d_3 - d_2 = 1$, $d_2 - d_1 = 2$, $d_1 - d_0 = 3$ ($\#\mathfrak{B}_2 = 1$, $\#\mathfrak{B}_1 = 2$, $\#\mathfrak{B}_0 = 3$),

$\mathfrak{B}_2 = \{e_1\}$, $\mathfrak{B}_1 = \{u(e_1), e_2\}$, $\mathfrak{B}_0 = \{u^2(e_1), u(e_2), e_3\}$.

$$\text{Alors } \operatorname{mat}_{(u^2(e_1),u(e_1),e_1,u(e_2),e_2,e_3)} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

E) Polynômes annulateurs, valeurs propres

Lemme :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, valeur propre de $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, et $\vec{v}$ un vecteur propre associé à λ.

Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda)$ est valeur propre de $\widetilde{P}(u)$ et $\vec{v}$ est vecteur propre associé, c'est-à-dire : $\widetilde{P}(u)(\vec{v}) = P(\lambda).\vec{v}$.

Démonstration :

Si $u(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(\lambda) = \lambda^n \vec{v}$ (par récurrence)

Donc par combinaison linéaire, pour $P=\sum_{j=0}^{d} a_j X^j \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$\widetilde{P}(u)(\vec{v})=\sum_{j=0}^{d} a_j u^j(\vec{v})=\sum_{j=0}^{d} a_j \lambda^j \vec{v}=P(\lambda).\vec{v}$.

Théorème :

Si $P\in\mathbb{K}[X]$ est annulateur de *u*, toute valeur propre de *u* est racine de *P*.

Complément (Hors programme) : si *u* admet le polynôme minimal $\mu\in\mathbb{K}[X]$, λ est valeur propre de *u* si et seulement si λ est racine de μ.

Remarque :

Plus généralement, si *P* est un facteur de μ (c'est-à-dire que μ est multiple de *P*), alors $\widetilde{P}(u)$ n'est pas injectif.

Démonstration :

Si $\widetilde{P}(u)=0\in L_{\mathbb{K}}(E)$ et $u(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, alors d'après le lemme, $\vec{0}=\widetilde{P}(u)(\vec{v})=P(\lambda).\vec{v}$. Donc comme $\vec{v}\neq\vec{0}$, on a $P(\lambda)$.

Pour la remarque :

Supposons que $\mu=P\times Q$ où $\mu=\min_u$ et $\deg P\geq 1$.

Alors $\widetilde{\mu}(u)=0\in L_{\mathbb{K}}(E)$. Donc $\widetilde{P}(u)\circ\widetilde{Q}(u)=0$ (Ev_u est un morphisme d'algèbre)

Si $\widetilde{P}(u)$ était injectif, on aurait $\widetilde{Q}(u)=0$, donc *Q* serait un multiple de μ ce qui est faux.

Pour le complément :

Déjà, comme μ est annulateur de *u*, toute valeur propre de *u* est racine de μ d'après le théorème. Inversement, si α est racine de μ, alors $X-\alpha$ divise μ, donc $(\widetilde{X-\alpha})(u)=\widetilde{u}-\alpha\mathrm{Id}$ n'est pas injectif, et α est bien valeur propre de *u*.

Exemples :

(1) Soit *u* un projecteur ; alors X^2-X est annulateur de *u* donc les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, par exemple 1 n'est pas valeur propre du projecteur nul.

(2) Si *u* est nilpotent, la seule valeur propre possible de *u* est 0, car il a un polynôme annulateur de la forme X^r avec $r\geq 1$.

Remarque :

Si $\dim E\geq 1$ et si *u* est nilpotent, alors 0 est valeur propre de *u*. En effet, son polynôme minimal est aussi de la forme X^r, $r\geq 1$, dont 0 est racine.

F) Théorème de décomposition des noyaux

Pour ce théorème, *E* peut être de dimension quelconque :

Théorème :

(1) Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Soient $P_1,P_2\in\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

Alors $\ker((P_1 \widetilde{\times} P_2)(u)) = \ker \widetilde{P}_1(u) \oplus \ker \widetilde{P}_2(u)$

(2) Plus généralement, si $P_1,\dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $\ker\left(\left(\widetilde{\prod_{i=1}^{k} P_i}\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker \widetilde{P}_i(u)$.

Démonstration :

- On a $\ker \widetilde{P}_1(u) \subset \ker(P_1 \widetilde{\times} P_2)(u)$ et $\ker \widetilde{P}_2(u) \subset \ker(P_1 \widetilde{\times} P_2)(u)$.

En effet, $(P_1 \widetilde{\times} P_2)(u) = (P_2 \widetilde{\times} P_1)(u) = \widetilde{P}_2(u) \circ \widetilde{P}_1(u)$

- De plus, $\ker \widetilde{P}_1(u) \cap \ker \widetilde{P}_2(u) = \{0\}$.

On applique le théorème de Bézout :

Il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AP_1 + BP_2 = 1$.

Donc $\mathrm{Id}_E = (AP_1 \widetilde{+} BP_2)(u) = \widetilde{A}(u) \circ \widetilde{P}_1(u) + \widetilde{B}(u) \circ \widetilde{P}_2(u)$

Donc si $x \in \ker \widetilde{P}_1(u) \cap \ker \widetilde{P}_2(u)$, on a :

$x = \widetilde{A}(u) \circ \underbrace{\widetilde{P}_1(u)(x)}_{=\vec{0}} + \widetilde{B}(u) \circ \underbrace{\widetilde{P}_2(u)(x)}_{=\vec{0}}$.

Enfin, $\ker(P_1 \widetilde{\times} P_2)(u) \subset \ker \widetilde{P}_1(u) + \ker \widetilde{P}_2(u)$:

Si $x \in \ker(P_1 \widetilde{\times} P_2)(u)$, alors :

$x = \underbrace{\widetilde{A}(u) \circ \widetilde{P}_1(u)(x)}_{\in \ker \widetilde{P}_2(u)} + \underbrace{\widetilde{B}(u) \circ \widetilde{P}_2(u)(x)}_{\in \ker \widetilde{P}_1(u)}$.

En effet, $\widetilde{P}_2(u)(\widetilde{P}_1(u) \circ \widetilde{A}(u)(x)) = (\widetilde{A}(u) \circ P_1 \widetilde{\times} P_2(u))(x) = 0$

Exemple :

Si $u^2 = u$, on a : $E = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{Id}_E)$

En effet :

$X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur, et $X \wedge (X-1) = 1$.

Donc $E = \ker X(X \widetilde{-} 1)(u) = \ker \widetilde{X}(u) \oplus \ker(X \widetilde{-} 1)(u) = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{Id}_E)$

G) Application au caractère diagonalisable

(On est de nouveau en dimension finie)

Théorème :

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable

(2) u admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples

(3) Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

On a le même énoncé pour les matrices.

Complément (Hors programme) :

Si u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1,\dots\lambda_p$ deux à deux distinctes, alors $\min_u = \prod_{i=1}^{p} X - \lambda_i$.

Démonstration :

$(1)\Rightarrow(3)$: On va montrer le complément, ce qui établira l'implication :

Déjà, $\prod_{i=1}^{p} X-\lambda_i$ est annulateur.

En effet, notons $\left(\prod_{i=1}^{p} X-\lambda_i\right)(u)=(u-\lambda_1\mathrm{Id})\circ\ldots\circ(u-\lambda_p\mathrm{Id})=v$

Donc v est nulle sur chaque $E_{\lambda_k}=\ker(u-\lambda_k\mathrm{Id})$.

Donc v est nulle sur E.

On a $\prod_{i=1}^{p} X-\lambda_i \Big| \min_u$ car toute valeur propre de u est racine de $\min_u$.

D'autre part, $\prod_{i=1}^{p} X-\lambda_i$ est annulateur, donc $\min_u \Big| \prod_{i=1}^{p} X-\lambda_i$.

D'où $\min_u=\prod_{i=1}^{p} X-\lambda_i$

$(3)\Rightarrow(2)$: ok…

$(2)\Rightarrow(1)$: Soit $P=\prod_{i=1}^{n} X-\alpha_i$, les α_i étant deux à deux distincts.

Supposons que P est annulateur de u. Alors, d'après le théorème de décomposition des noyaux, $\ker\widetilde{P}(u)=E=\bigoplus_{i=1}^{n}\ker(X-\alpha_i\mathrm{Id})$

Or, $\ker(X-\alpha_i\mathrm{Id})$ est soit un sous-espace propre de u, soit $\{0\}$.

Donc E est engendré par des vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

Exercice :

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$, donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $M=\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A\end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $u\in L_{\mathbb{K}}(M_n(\mathbb{K}))$ définie par $\forall X\in M_n(\mathbb{K}), u(X)=A\times X$ est diagonalisable.

On a : $M^k=\begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k\end{pmatrix}$, d'où $\forall P\in\mathbb{K}[X], P(M)=\begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A)\end{pmatrix}$.

Analyse :

Si M est diagonalisable, M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P_M, et $P_M(M)=0=\begin{pmatrix} P_M(A) & AP_M'(A) \\ 0 & P_M(A)\end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} P_M(A)=0 \\ AP'_M(A)=0\ (*)\end{cases}$.

On a : $P_M\wedge P'_M=1$ (car P_M est scindé à racines simples)

D'après le théorème de Bézout, il existe $U,V\in\mathbb{K}[X]$ tels que $P_MU+P'_MV=1$.

Donc $\underbrace{P_M(A)}_{=0}U(A)+P'_M(A)V(A)=I_n$, soit $P'_M(A)V(A)=I_n$.

Ainsi, $P'_M(A)$ est inversible, et (*) devient $A=0$.

Réciproquement, si $A=0$, M est bien diagonal(isabl)e !

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $G_A : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array}$.

Alors A est diagonalisable si et seulement si G_A est diagonalisable.

En effet, $G_A \circ G_A = G_{A^2}$, d'où $\forall k \in \mathbb{N}, G_A^k = G_{A^k}$, puis $\forall P \in \mathbb{K}[X], \widetilde{P}(G_A) = G_{\widetilde{P}(A)}$.

(En fait, $A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto G_A \in L_{\mathbb{K}}(M_n(\mathbb{K}))$ est un morphisme d'algèbres)

Si A est diagonalisable, $P = \min_A$ est scindé à racines simples, et $\widetilde{P}(G_A) = G_{\widetilde{P}(A)} = G_0 = 0$. Donc comme P est scindé à racines simples, G_A est diagonalisable.

Inversement, si G_A est diagonalisable, il existe $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ scindé à racines simples tel que $\widetilde{P}(G_A) = 0$. Alors $\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \widetilde{P}(A) \times M = 0$, et en particulier avec $M = I_n$, $\widetilde{P}(A) = 0$ donc A est diagonalisable.

H) Calcul de $\widetilde{P}(u)$ pour u diagonalisable

Théorème :

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_k$ deux à deux distinctes, et les projecteurs spectraux π_j sur $\ker(u - \lambda_j \mathrm{Id})$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id})$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a alors $\widetilde{P}(u) = \sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j) \pi_j$.

Démonstration : vu en **I**.

III Utilisation du polynôme caractéristique (en dimension finie)

A) Trace et déterminant d'un endomorphisme

1) Cas d'une matrice carrée

Propriétés du déterminant et de la trace connues…

En particulier, si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, alors :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} B_{j,i}$$

En particulier, deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

2) Cas d'un endomorphisme

Définition :

La trace, le déterminant de $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ sont ceux de la matrice de u dans une base quelconque de E.

Il sont indépendants du choix de la base puisque si $A=\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$ et $A'=\text{mat}_{\mathfrak{B}'}(u)$, alors $A'=P^{-1}AP$ où $P=\text{mat}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}')$.

3) Définition intrinsèque de la trace et du déterminant d'un endomorphisme

On note $\overset{p}{\Lambda}(E)$ le $\mathbb{K}$-ev des formes $\varphi: E^p \to \mathbb{K}$ p-linéaires alternées.

Théorème :

Si $p=\dim E$, $\overset{p}{\Lambda}(E)$ est de dimension 1 ; pour toute base $\mathfrak{B}$ de E, $\overset{p}{\Lambda}(E)=\mathbb{K}\det_{\mathfrak{B}}$ (voir théorie du déterminant, vue en sup).

Proposition :

Pour tout $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$ et tout $\varphi\in\overset{n}{\Lambda}(E)$ ($n=\dim E$), on définit les applications $\varphi_1,\varphi_2: E^n\to\mathbb{K}$ par :

$\varphi_1(v_1,...v_n)=\varphi(u(v_1),...u(v_n))$

$\varphi_2(v_1,...v_n)=\varphi(u(v_1),v_2...v_n)+\varphi(v_1,u(v_2)...v_n)+...+\varphi(v_1,v_2...u(v_n))$

Alors les applications $\underset{\varphi\mapsto\varphi_1}{\overset{n}{\Lambda}(E)\to\overset{n}{\Lambda}(E)}$ et $\underset{\varphi\mapsto\varphi_2}{\overset{n}{\Lambda}(E)\to\overset{n}{\Lambda}(E)}$ sont linéaires. Ce sont les homothéties de rapports respectifs $\det u$ et $\text{Tr}(u)$, c'est-à-dire :

$\forall\varphi\in\overset{n}{\Lambda}(E),\varphi_1=(\det u)\varphi \text{ et } \varphi_2=(\text{Tr}(u))\varphi$

Démonstration :

On vérifie que pour u et φ donnés, φ_1 et φ_2 sont n-linéaires (ok) et alternées :

Pour φ_1, ok. Pour φ_2 :

$\varphi_2(v_1,...\underbrace{v_i}_{i},...\underbrace{v_i}_{j},...v_n)=\varphi(v_1,...\underbrace{u(v_i)}_{i},...\underbrace{v_i}_{j},...v_n)+\varphi(v_1,...\underbrace{v_i}_{i},...\underbrace{u(v_i)}_{j},...v_n)$

(Les autres termes de la somme sont nuls car on a deux fois v_i et φ est alternée)

Mais comme φ est antisymétrique,

$\varphi(v_1,...\underbrace{u(v_i)}_{i},...\underbrace{v_i}_{j},...v_n)=-\varphi(v_1,...\underbrace{v_i}_{i},...\underbrace{u(v_i)}_{j},...v_n)$

Donc $\varphi_2(v_1,...\underbrace{v_i}_{i},...\underbrace{v_i}_{j},...v_n)=0$, et φ_2 est bien alternée.

Ensuite :

$\varphi\mapsto\varphi_1$ et $\varphi\mapsto\varphi_2$ sont linéaires par rapport à φ, et $\varphi\mapsto\varphi_1,\varphi\mapsto\varphi_2$ sont des endomorphismes de $\overset{n}{\Lambda}(E)$ qui est de dimension 1. Ce sont donc des homothéties.

Pour les rapports :

Soit $\mathfrak{B}$ une base de E et on prend $\varphi=\det_{\mathfrak{B}}$.

Alors $\varphi_1:(v_1,...v_n)\mapsto\det_{\mathfrak{B}}(u(v_1),...,u(v_n))$ est une forme n-linéaire alternée.

On a $\varphi_1(\mathfrak{B})=\det_{\mathfrak{B}}(u(e_1),...u(e_n))=\det(\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u))=\det u$

Donc φ_1 est *la* forme n-linéaire alternée telle que $\varphi_1(\mathfrak{B}) = \det u$ donc $\varphi_1 = \det u \times \det_{\mathfrak{B}}$.

Ensuite, pour $\varphi \in \overset{n}{\Lambda}$ quelconque, on a $\varphi = \lambda.\det_{\mathfrak{B}}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, et donc :

$\varphi_1(\mathfrak{B}) = \lambda \det_{\mathfrak{B}}(u(e_1),\dots u(e_n)) = \det(\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)) = \lambda \det u$

Soit $\varphi_1 = \lambda.\det u.\det_{\mathfrak{B}} = \det u.\varphi$

Pour φ_2 : C'est la même chose avec

$\varphi_2(\mathfrak{B}) = \det_{\mathfrak{B}}(u(e_1),\dots e_n) + \dots + \det_{\mathfrak{B}}(e_1,\dots u(e_n))$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & & & \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & & \\ & \vdots & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & a_{n,2} & & 1 \end{vmatrix} + \dots = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u)$$

B) Polynômes caractéristiques

1) Pour une matrice (cf I)

Définition :

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $A - XI_n \in M_n(\mathbb{K}[X])$

On pose alors $\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$

Théorème :

χ_A est un polynôme de degré n de terme dominant $(-1)^n$, de la forme

$\chi_A = (-1)^n(X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A)$

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$

Démonstration : vu en **I**.

Propriété :

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

En effet, si $A' = P^{-1}AP$,

$\chi_{A'} = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det(P^{-1}(A - XI_n)P) = \dots \det(A - XI_n) = \chi_A$

Proposition :

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

En effet, il suffit de vérifier que :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB - XI_n & A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -XI_n & A \\ 0 & XI_n - BA \end{pmatrix}$$

Et alors $\det(\dots) = 1 \times \chi_{AB} X^n \times 1$ d'une part

Et $\det(\dots) = (-X)^n \det(XI_n - BA) = X^n \det(BA - XI_n) = X^n \chi_{BA}$ d'autre part.

Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

2) cas particulier

Théorème :

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonale (supérieure ou inférieure), alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X)$$

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, alors $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$ (où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_p(\mathbb{K})$)

3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition :

On appelle polynôme caractéristique de $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ le polynôme caractéristique de la matrice A de u dans n'importe quelle base. Il est indépendant de la base choisie puisque si $A = \text{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$, $A' = \text{mat}_{\mathfrak{B}'}(u)$, alors A et A' sont semblables donc ont même polynôme caractéristique.

Proposition :

Le spectre de $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ est l'ensemble des racines de χ_u, polynôme caractéristique de u.

Démonstration :

λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de $A = \text{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$ c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0 = \chi_u(\lambda)$

C) Multiplicité des valeurs propres

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, où $\dim E = n \in \mathbb{N}$, ou $u \in M_n(\mathbb{K})$.

- Définition :

On appelle multiplicité de λ comme valeur propre de u la multiplicité de λ comme racine de χ_u

Définition (HP) :

La multiplicité de λ comme racine de χ_u s'appelle multiplicité algébrique.

La dimension de $\ker(u - \lambda \text{Id})$ s'appelle multiplicité géométrique de λ.

- Théorème :

Pour toute valeur propre λ de u, on a $1 \le m_{\text{géo}}(\lambda) \le m_{\text{alg}}(\lambda)$

Démonstration :

Soit $p = m_{\text{géo}}(\lambda)$, et soit $(e_1,...e_n)$ une base de E où $(e_1,...e_p)$ est une base de $E_\lambda(u)$. Alors $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, donc $\chi_u = (\lambda - X)^p \chi_B$, soit $(\lambda - X)^p \mid \chi_u$.

Donc $m_{\text{alg}} \ge p$.

- Si χ_u est scindé :

Théorème :

Si χ_u est scindé, $\chi_u = \prod_{i=1}^{d} (\lambda_i - X)^{m_i}$, λ_i valeurs propres distinctes, m_i leur multiplicité (algébrique), alors $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i m_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{m_i}$

Démonstration :

On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{d} (\lambda_i - X)^{m_i} = (-1)^n (X^n - \mathrm{Tr}(u) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u)$

D) Lien entre polynôme caractéristique et polynôme minimal : théorème de Cayley–Hamilton

Théorème :

Pour tout endomorphisme u en dimension finie, ou toute matrice carrée u, $\min u$ divise χ_u.

Autrement dit, $\widetilde{\chi}_u(u) = 0$ (le polynôme χ_u est annulateur)

Démonstration :

- Cas simple où u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ et de multiplicités respectives m_i :

Alors $\min_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$

Et $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$. En effet, soit pour $j \in [\![1, p]\!]$ $\mathfrak{B}_j$ une matrice de $E_{\lambda_j}(u)$.

Alors $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1, \ldots \mathfrak{B}_p)$ est une base de E, et $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\delta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\delta_p} \end{pmatrix}$ où $\delta_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$. Donc $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\delta_i}$ et par définition des multiplicités, on a $\forall j \in [\![1, p]\!], m_j = \delta_j$

- Cas général :

Soit $\chi_u = (-1)^n (X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0)$

On veut montrer que $u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_0 \mathrm{Id}$ est l'application nulle.

C'est-à-dire que $\forall \vec{v} \in E, u^n(\vec{v}) + a_{n-1} u^{n-1}(\vec{v}) \ldots + a_0 \vec{v} = \vec{0}$

Soit $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$. On considère $F = \mathrm{Vect}(u^k(\vec{v}), k \in \mathbb{N}) = \{\widetilde{P}(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $d \leq n$

Alors $(\vec{v}, u(\vec{v}), \ldots u^{d-1}(\vec{v}))$ est une base de F

En effet, soit i le plus petit indice tel que $u^i(\vec{v})$ soit combinaison linéaire de $\vec{v}, u(\vec{v}), \ldots u^{i-1}(\vec{v})$ (i existe car $\dim F \in \mathbb{N}$)

Alors $(\vec{v},u(\vec{v}),...u^{i-1}(\vec{v}))$ est libre, et $u^i(\vec{v})=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k u^k(\vec{v})$.

Donc par récurrence, $\forall k\in\mathbb{N}, u^k(\vec{v})\in(\vec{v},u(\vec{v}),...u^{i-1}(\vec{v}))$

D'où $F=\mathrm{Vect}(\vec{v},u(\vec{v}),...u^{i-1}(\vec{v}))$, et $(\vec{v},u(\vec{v}),...u^{i-1}(\vec{v}))$ est une base de *F*, soit $d=i$

Maintenant :

Comme $u^d(\vec{v})\in F$, on peut écrire $u^d(\vec{v})=\alpha_0\vec{v}+...+\alpha_{d-1}u^{d-1}(\vec{v})$

Considérons alors une base $(e_1,...e_n)$ de E où $\forall i\leq d, e_i=u^{i-1}(\vec{v})$.

Alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & \alpha_0 & \\ 1 & 0 & & & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & A \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ 0 & & & 1 & \alpha_{d-1} & \\ \hline & & 0 & & & B \end{array}\right)$$

On a en effet $u(e_1)=e_2$, $\dots u(e_i)=e_{i+1}$ pour $i\leq d-1$

Et $u(e_d)=u^d(\vec{v})=\sum_{k=0}^{d-1}\alpha_k u^k(\vec{v})$

Donc $\chi_u=\chi_M\times\chi_B$ où *M* est la transposée d'une matrice compagnon :

$\chi_M=(-1)^d(X^d-\alpha_{d-1}X^{d-1}-\alpha_0)$.

On a donc $\tilde{\chi}_u(u)=\tilde{\chi}_B(u)\circ\tilde{\chi}_M(u)=(-1)^d\tilde{\chi}_B(u)\circ(u^d-\alpha_{d-1}u^{d-1}-...\alpha_0\mathrm{Id})$

Donc $\tilde{\chi}_u(u)(\vec{v})=(-1)^d\tilde{\chi}_B(u)\underbrace{(u^d(\vec{v})-\alpha_{d-1}u^{d-1}(\vec{v})-...\alpha_0\vec{v})}_{=\vec{0}}$

Comme ceci est valable pour tout $\vec{v}\in E\setminus\{0\}$, et que $\tilde{\chi}_u(u)(\vec{0})=\vec{0}$, χ_u est bien annulateur de *u*.

E) Application du polynôme caractéristique au caractère diagonalisable

Théorème :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, *E* étant de dimension finie.

Alors *u* est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique sont égale (c'est-à-dire $\dim E_{\lambda_i}(u)=m_i$)

Démonstration :

Supposons que *u* est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1,...\lambda_p$.

Soient $d_1,...d_p$ les dimensions des espaces propres associés.

On note $\mathfrak{B}=\bigcup_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)}\mathfrak{B}_\lambda$, où $\mathfrak{B}_\lambda$ est une base de E_λ pour $\lambda\in\mathrm{sp}(u)$.

Ainsi, $\mathfrak{B}$ est une base de *E*.

La matrice de u dans $\mathfrak{B}$ est $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_p I_{d_p}} \end{pmatrix}$

Donc $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{d_i}$. Donc χ_u est scindé, et $m_i = d_i$.

Inversement :

On appelle défaut de la valeur propre λ l'entier $m_\lambda - \dim E_\lambda(u) = d_\lambda \geq 0$

Comme χ_u est scindé, on a $\sum_{\lambda\in \mathrm{sp}(u)} m_\lambda = \dim E$

Or, par hypothèse, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$. Donc $\sum_{\lambda\in \mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$, et u est diagonalisable.

Remarque pratique :

Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable, mais la réciproque est fausse ; par exemple l'identité est diagonalisable, mais son polynôme caractéristique est $\chi_{\mathrm{Id}} = (1-X)^n$, qui n'est pas à racines simples.

F) Caractère trigonalisable (en dimension finie)

1) Définition

Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathfrak{B}$ soit trigonale supérieure.

Remarque :

Si $\mathrm{mat}_{(e_1,\dots e_n)}(u) = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{mat}_{(e_n,\dots e_1)}(u) = (a_{n+1-i,n+1-j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$

En effet, en notant $e'_i = e_{n-i+1}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$u(e'_j) = u(e_{n+1-j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j} e_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j} e'_{n+1-i}$$

Conclusion :

On peut aussi bien travailler avec les matrices trigonales supérieures ($T_n^+(\mathbb{K})$) que trigonales inférieures ($T_n^-(\mathbb{K})$).

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice trigonale (supérieure)

Proposition :

$u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est.

$A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si $\begin{aligned} M_{n,1}(\mathbb{K}) &\to M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$ l'est.

Trigonaliser un endomorphisme u, c'est trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est trigonale.

Trigonaliser une matrice A, c'est trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonale

2) Caractérisation

Théorème :
Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension n finie, ou $u \in M_n(\mathbb{K})$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) u est trigonalisable
(2) χ_u est scindé
(3) u admet un polynôme annulateur scindé
(4) $\min_u$ est scindé.

Corollaire :
Lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice carrée est trigonalisable.

Démonstration :
$(1) \Rightarrow (2)$:

Si $\mathrm{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{i,j} \\ & \ddots & \\ & & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X)$ est scindé.

$(2) \Rightarrow (3)$: c'est le théorème de Cayley–Hamilton

$(3) \Rightarrow (4)$: Si R est annulateur et scindé, $\min_u$ qui divise R est scindé.

$(4) \Rightarrow (1)$:

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ où $P(n)$ désigne « si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est tel que $\min_A$ est scindé, alors A est trigonalisable »

Pour $n = 1$: toutes les matrices sont diagonales donc trigonalisables.

Soit $n \geq 2$, supposons $P(n-1)$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, supposons que $\min_A$ est scindé.

Soit λ une racine de $\min_A$. Alors λ est valeur propre de A.

(Sinon, $\min_A = (X - \lambda)Q$, et on aurait $0 = (A - \lambda I_n)\widetilde{Q}(A)$, soit $\widetilde{Q}(A) = 0$ et $\min_A | Q$ ce qui est impossible)

Soit $X_\lambda \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre de $u_A : \begin{array}{l} M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array}$ associé à λ.

On complète $v_1 = X_\lambda$ en une base $\mathfrak{B}' = (v_1, \dots v_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}'}(u_A) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & l \\ \hline 0 & A' \end{array}\right) = B$

On a $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^k & l(k) \\ \hline 0 & A'^k \end{array}\right)$

Donc $\min_A(B) = \left(\begin{array}{c|c} \min_A(\lambda) & \dots \\ \hline 0 & \min_A(A') \end{array}\right)$

Or, A et B sont semblables, donc $\min_A(B) = 0$, d'où $\min_A(A') = 0$

Donc $\min_{A'} | \min_A$ qui est scindé, donc $\min_{A'}$ est scindé.

Donc par hypothèse de récurrence, A' est trigonalisable, disons $A' = RT'R^{-1}$ où $R \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T' \in T_n^+(\mathbb{K})$.

On a donc :

$$B=\begin{pmatrix}\lambda & l\\ 0 & RTR^{-1}\end{pmatrix}.$$

On cherche alors $l'\in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ tel que $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & l\\ 0 & T'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R^{-1}\end{pmatrix}$

On a $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & l\\ 0 & T'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & l'R^{-1}\\ 0 & RTR^{-1}\end{pmatrix}$, on peut donc prendre $l'=lR$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R^{-1}\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & l'\\ 0 & T'\end{pmatrix}$

Donc B est semblable à une matrice trigonale, donc trigonalisable.
Donc comme A est semblable à B, elle est aussi trigonalisable.

G) Compléments (Hors programme) : sous-espaces caractéristiques et décomposition de Jordan–Dumford

Problème :

On suppose χ_u scindé, on veut trigonaliser u avec une forme réduite la plus simple possible.

On pose $\chi_u=\prod_{i=1}^{p}(\lambda_i-X)^{m_i}$, les λ_i étant deux à deux distincts, $m_i\geq 1$

D'après le théorème de Cayley–Hamilton,

$(\lambda_1\mathrm{Id}-u)^{m_1}\circ(\lambda_2\mathrm{Id}-u)^{m_2}\circ\ldots\circ(\lambda_p\mathrm{Id}-u)^{m_p}=0\in L_{\mathbb{K}}(E)$

De plus, les $(\lambda_i-X)^{m_i}$ étant premiers entre eux deux à deux, le théorème de décomposition des noyaux donne :

$$E=\ker 0=\bigoplus_{i=1}^{p}\ker((u-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i})$$

Définition :

Le sous-espace $C_i=\ker((u-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i})$ s'appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

Proposition :

- Si χ_u est scindé, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques.
- Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\dim C_i=m_i$
- Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\ker(u-\lambda_i\mathrm{Id})\subset C_i$, avec égalité si et seulement si $\dim E_{\lambda_i}=m_i$

Démonstration :
Le premier point est clair. Pour le deuxième :
Soit, pour $i\in[\![1,p]\!]$, $\mathfrak{B}_i$ une base de C_i et $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2\ldots\mathfrak{B}_p)$.

Soit $i\in[\![1,p]\!]$

Pour tout $x\in C_i$, $u(x)\in C_i$. En effet, $(u-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i}(u(x))=u\circ(u-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i}(x)=0$

Donc $u(x)\in\ker((u-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i})=C_i$

Donc si on prend un vecteur $e_k \in \mathfrak{B}_i$, $u(e_k) \in C_i$ se décompose uniquement sur $\mathfrak{B}_i$, et :

$$\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & & 0 \\ \hline & \ddots & \\ \hline 0 & & M_p \end{array}\right) \text{ avec } \forall j \in [\![1,p]\!], M_j = mat_{\mathfrak{B}_j}(u_{/C_j}).$$

Ainsi, $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} \chi_{u_{/C_j}}$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$

Si on pose $v_j = u_{/C_j} - \lambda_j \mathrm{Id}_{C_j} \in L(C_j)$, alors v_j est nilpotent, et $v_j^{m_j} = 0$

En effet, $x \in C_j$, on a $v_j^{m_j}(x) = (u - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}(x) = 0$.

Que dire de χ_{u/C_j} ?

Déjà, χ_{u/C_j} divise χ_u donc est scindé.

De plus, $(X - \lambda_j)^{m_j}$ est annulateur de $u_{/C_j}$. Donc $u_{/C_j}$ a une seule valeur propre, à savoir λ_j.

Ainsi, χ_{u/C_j} est de la forme $(\lambda_j - X)^{\gamma_j}$ où $\gamma_j = \dim C_j$

On a donc $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - X)^{\gamma_j}$.

Or, on a d'autre part $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - X)^{m_j}$

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!], \gamma_j = \dim C_j = m_j$

Pour le troisième point :

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de $\ker((u - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i})$ car $m_i \geq 1$.

Donc il y a égalité si et seulement si $\dim \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}) = \dim C_i = m_i$

Théorème : Décomposition de Jordan–Dumford (Hors programme)

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, on suppose χ_u scindé. Alors il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d = \widetilde{P}(u)$ soit diagonalisable, $n = \widetilde{Q}(u)$ soit nilpotent et $\widetilde{P}(u) + \widetilde{Q}(u) = u$.

C'est-à-dire $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$.

Démonstration :

Soit $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$, $C_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$.

On a alors $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_p = E$.

Considérons alors $d \in L(E)$ tel que $\forall i \in [\![1,p]\!], d_{/C_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$

Et n tel que $\forall i \in [\![1,p]\!], n_{/C_i} = u_{/C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$

Alors :

d est diagonalisable car les C_i sont les sous-espaces propres de d et $\bigoplus_{i=1}^{p} C_i = E$

n est nilpotent :

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $n(C_i) \subset C_i$ car $u(C_i) \subset C_i$.

Donc pour tout $x \in C_i$, $n^{m_i}(x) = (u - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}(x) = 0$

Prenons alors $M = \max\limits_{i \in [\![1,p]\!]}(m_i)$. On a alors $\forall i \in [\![1, p]\!], (n_{/C_i})^M = 0$, et comme $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} C_i = E$, on a $n^M = 0$.

On va chercher maintenant $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\widetilde{P}(u) = d$, c'est-à-dire tel que $\forall j \in [\![1, p]\!], \widetilde{P}(u)_{/C_j} = \lambda_j \mathrm{Id}_{C_j}$

D'après le théorème de Bezout, il existe $A_1, ...A_p$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} A_i R_i = 1$, où $R_i = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}$

Prenons alors $P = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j A_j R_j$. Alors $\widetilde{P}(u) = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \widetilde{A}_j(u) \circ \widetilde{R}_j(u)$.

Si $x \in C_k$ ($k \in [\![1, p]\!]$), $(u - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(x) = 0$, donc pour $j \neq k$, $\widetilde{R}_j(u)(x) = 0$

Donc $\widetilde{P}(u)(x) = \lambda_k \widetilde{A}_k(u) \circ \widetilde{R}_k(u)(x)$

Or, on a $\mathrm{Id}_E = \sum\limits_{i=1}^{p} \widetilde{A}_i(u) \circ \widetilde{R}_i(u)$. Donc pour $x \in C_k$, $x = \widetilde{A}_k(u) \circ \widetilde{R}_k(u)(x)$.

Ce qui donne $\forall x \in C_k, \widetilde{P}(u)(x) = \lambda_k x$.

Ainsi, $\widetilde{P}(u)$ et d coïncident sur tous les $C_k, k \in [\![1, p]\!]$. Donc $\widetilde{P}(u) = d$

Comme $u = d + n$ par construction, on a $n = \widetilde{Q}(u)$ avec $Q = X - P$

Remarque :

Le théorème permet parfois de ramener l'étude générale des endomorphismes à d'une part celle des endomorphismes diagonalisables et d'autre part celle des endomorphismes nilpotents.

La décomposition est unique dans le sens suivant :

Si $u = d_1 + n_1 = d_2 + n_2$, avec $\begin{cases} d_1 \circ n_1 = n_1 \circ d_1 \\ d_2 \circ n_2 = n_2 \circ d_2 \end{cases}$, alors $\begin{cases} d_1 = d_2 \\ n_1 = n_2 \end{cases}$

H) Applications topologiques : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Le déterminant est continu sur $M_n(\mathbb{K})$, car polynomial en les coefficients.

Conséquence : $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1} \mathbb{K}^*$ est ouvert.

- La fonction $A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$ est continue.

En effet : $\chi_A = (-1)^n (X^n - \alpha_{n-1}(A) X^{n-1} + ... + \alpha_0(A)(-1)^n)$, avec $\alpha_{n-1}(A) = \mathrm{Tr}(A)$, $\alpha_0(A) = \det(A)$

Et $\alpha_j(A)$ est un polynôme en les coefficients de A.

Ainsi, $\forall j \in [\![0,n-1]\!], A \mapsto \alpha_j(A)$ est continu.

Comme ce sont (à peu près) les coordonnées de χ_A dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est continu.

Cependant, $A \mapsto \min_A$ n'est pas continu, par exemple :

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \min A_n = X^2$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$, et $\min_0 = X$.

- Théorème (hors programme) :
$GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

En effet, soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, posons $A_p = A - \dfrac{1}{p} I_n$.

On a alors $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$

De plus, $A_p \notin GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \dfrac{1}{p} \in \mathrm{sp}(A)$

Comme $\mathrm{sp}(A)$ est fini, il existe N tel que $\forall p \geq N, \dfrac{1}{p} \notin \mathrm{sp}(A)$

Donc $A = \lim\limits_{\substack{p\to+\infty \\ p\geq N}} A_p \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$

- Exemples
  - Exprimer $\mathrm{com}(AB)$ avec $\mathrm{com}(A)$ et $\mathrm{com}(B)$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{C})$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{com}(AB) &= \det(AB) \times {}^t((AB)^{-1}) = \det A \times \det B \times {}^t(A^{-1}) \times {}^t(B^{-1}) \\ &= \mathrm{com}(A) \times \mathrm{com}(B)\end{aligned}$$

Cas général :

Les deux membres de l'égalité précédente sont des fonctions continues (car polynomiales) de A et B, donc si $A_p \in GL_n(\mathbb{C})$ tend vers A et si $B_p \in GL_n(\mathbb{C})$ tend vers B, on a $A_p B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} AB$, et :

$$\mathrm{com}(AB) = \lim_{p\to+\infty} \mathrm{com}(A_p B_p) = \lim_{p\to+\infty} \mathrm{com}(A_p)\mathrm{com}(B_p) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$$

  - L'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (faux pour $\mathbb{R}$)

Démonstration :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable, disons $A = PTP^{-1}$ où $T \in T_n^+(\mathbb{C})$

On a $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

Posons $A(p)=P\begin{pmatrix} t_{1,1}+\frac{1}{p} & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{n,n}+\frac{n}{p} \end{pmatrix}P^{-1}$

Alors les valeurs propres de $A(p)$ sont les $t_{i,i}+\frac{i}{p}, i\in [\![1,n]\!]$

Pour que $A(p)$ ait une valeur propre au moins double, il faut qu'il existe *i j* avec $i\neq j$, tels que $t_{i,i}+\frac{i}{p}=t_{j,j}+\frac{j}{p}$, ce qui est impossible si $t_{i,i}=t_{j,j}$, et il y a au plus une valeur de *p* possible sinon.

Ainsi, l'ensemble des entiers *p* tels que $A(p)$ a une valeur propre multiple est fini, donc il existe *N* tel que pour tout $p\geq N$, $A(p)$ a *n* valeurs propres simples, donc $A(p)$ est diagonalisable à valeurs propres simples à partir du rang *N*.

Comme de plus $\lim_{p\to+\infty} A_p = A$, *A* est dans l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples.

- L'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles trigonalisables.

En effet :

La même démonstration que précédemment montre déjà que :

$T_n^+(\mathbb{R})\subset\overline{\{A\in M_n(\mathbb{R}), A \text{ est diagonalisable}\}}$

Montrons maintenant que $T_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

Lemme :

L'ensemble des polynômes unitaires de degré *n* réels scindé dans $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Conséquence de lemme :

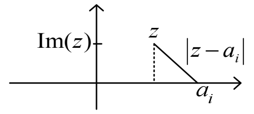
Pour une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $T_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers $B\in M_n(\mathbb{K})$, alors par continuité de $A\mapsto\chi_A$, $\chi_{A_p}\to\chi_B$. Donc χ_B est scindé d'après le lemme, et *B* est trigonalisable, donc $T_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

Démonstration du lemme :

Astuce : Un polynôme *P* unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ est scindé si et seulement si $\forall z\in\mathbb{C}, |P(z)|\geq|\mathrm{Im}(z)|^n$

En effet, soit $P=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)\in\mathbb{R}_n[X]$

Pour $z\in\mathbb{C}$, on a $|P(z)|=\prod_{i=1}^{n}|z-a_i|$, et $|z-a_i|\geq|\mathrm{Im}(z)|$, d'où $|P(z)|\geq|\mathrm{Im}(z)|^n$:



Si $\forall z\in\mathbb{C}, |P(z)|\geq|\mathrm{Im}(z)|^n$, alors $\forall z\in\mathbb{C}, P(z)=0\Rightarrow\mathrm{Im}(z)\Rightarrow z\in\mathbb{R}$

Donc *P* est scindé dans $\mathbb{R}[X]$

Soit maintenant une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes scindés unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ qui converge vers *Q*. Alors $\forall z\in\mathbb{C}, P_k(z)\to Q(z)$

Donc $\forall z\in\mathbb{C}, |Q(z)|\geq|\mathrm{Im}(z)|^n$ et *Q* est scindé.

- Remarque : les méthodes topologiques permettent de prouver des identités matricielles valables sur tout anneau.

Exemple : Autre démonstration du théorème de Cayley Hamilton :

(1) Pour tout corps $\mathbb{K}$ et toute matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, $\widetilde{\chi}_A(A)=0$

En effet, $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, alors $\chi_A=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-X)$.

Or, $\forall R\in\mathbb{K}[X], \widetilde{R}(A)=P\widetilde{R}(D)P^{-1}=P\begin{pmatrix}R(\lambda_1) & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & R(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}$

Donc avec $R=\chi_A$, on obtient $\widetilde{R}(A)=0$

(2) Avec $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: l'ensemble des matrices $A\in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

On peut montrer sans le théorème de Cayley–Hamilton que si χ_A est scindé, alors A est trigonalisable.

Puis montrer que si A (réelle ou complexe) est trigonalisable, A est limite d'une suite (A_p) de matrices diagonalisables à valeurs propres deux à deux distinctes.

(3) On doit montrer que le théorème de Cayley–Hamilton est vrai dans $M_n(\mathbb{C})$,

C'est-à-dire que $\forall A\in M_n(\mathbb{C}), \widetilde{\chi}_A(A)=0$

Or, la matrice $\widetilde{\chi}_A(A)$ est une matrice complexe dont les coefficients sont des fonctions continues (car polynomiales) des coefficients de A.

Soit alors A_p une suite de matrices diagonalisables qui converge vers A.

Alors, par continuité, $\widetilde{\chi}_A(A)=\lim\limits_{p\to+\infty}\widetilde{\chi}_{A_p}(A_p)=\lim\limits_{p\to+\infty}0=0$

(4) Prolongement des identités algébriques :

Si $P\in\mathbb{Z}[X_1,...X_n]$ est tel que $\forall(z_1,...z_n)\in\mathbb{C}^n, P(z_1,...z_n)=0$, alors $P=0$

(On peut mettre un corps $\mathbb{K}$ quelconque infini à la place de $\mathbb{C}$)

En effet, montrons par récurrence que

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall P\in\mathbb{Z}[X_1,...X_n], \left(\forall(z_1,...z_n)\in\mathbb{C}^n, P(z_1,...z_n)=0\right)\Rightarrow P=0$

Pour $n=1$: ok ; $P\in\mathbb{Z}[X]$

Soit $n\geq 2$, supposons la propriété vraie pour $n-1$.

Soit $P\in\mathbb{Z}[X_1,...X_n]$, supposons que $\forall(z_1,...z_n)\in\mathbb{K}^n, P(z_1,...z_n)=0$

P s'écrit $P=\sum_{k=0}^{d}Q_k(X_1,...X_{n-1})X_n^k$

Pour $z_1,...z_{n-1}\in\mathbb{K}^{n-1}$ fixés, on a alors $\forall x_n\in\mathbb{K}, \sum_{k=0}^{d}Q_k(z_1,...z_{n-1})x_n^k=0$

Donc le polynôme $\sum_{k=0}^{d}Q_k(z_1,...z_{n-1})X^k\in\mathbb{K}[X]$ a une infinité de racines, donc

$\forall z_1,...z_{n-1}\in\mathbb{K}^{n-1}, \forall k\in[\![0,d]\!], Q_k(z_1,...z_{n-1})=0$

Donc par hypothèse de récurrence, $\forall k\in[\![0,d]\!], Q_k=0$, et donc $P=0$ ce qui achève la récurrence.

(5) Preuve du théorème de Cayley–Hamilton pour $A \in M_n(\mathbb{K})$:

Soit $A = (X_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \in M_n(\mathbb{Z}[X_{i,j}]_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}})$

Soient $k,l \in [\![1,n]\!]$.

On a $(\widetilde{\chi}_A(A))_{k,l} = P((X_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}) \in \mathbb{Z}[X_{i,j}]_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$

On sait que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{\chi}_A(A) = 0$

Donc $\forall (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \in \mathbb{C}^{n^2}, P((a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}) = 0$. Donc $P = 0$

Ceci étant vrai pour tous $k,l \in [\![1,n]\!]$, on a $\widetilde{\chi}_A(A) = 0$.

Conséquence :

Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (x_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$

$\widetilde{\chi}_A(A)$ est obtenu en remplaçant les $X_{i,j}$ par $x_{i,j}$. Donc $\widetilde{\chi}_A(A) = 0$

- Cas d'une matrice nilpotente :

Théorème :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est nilpotente

(2) $A^n = 0$

(3) A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & (X) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\chi_A = (-X)^n$

(5) Si $\chi_{\mathbb{K}} = 0$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{Tr}(A^k) = 0$

Démonstration :

$(1) \Rightarrow (2)$: Soit p l'indice de nilpotence de A.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$

Alors $(X, AX, \dots A^{p-1}X)$ est libre.

En effet : Soient $\lambda_0, \dots \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$, supposons que $\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \dots \lambda_{p-1} A^{p-1}X = 0$

Alors en multipliant par A^{p-1}, on obtient $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ etc.

Donc $p \leq n$, et $A^n = 0$

$(2) \Rightarrow (3)$:

X^n est annulateur, scindé donc A est trigonalisable avec des valeurs propres qui sont racines de X^n. Donc A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$(3) \Rightarrow (4)$: clair

$(4) \Rightarrow (1)$: c'est le théorème de Cayley–Hamilton.

On suppose maintenant $\chi_{\mathbb{K}} = 0$.

$(1) \Rightarrow (5)$:

Soit A une matrice nilpotente.

Alors $A=P\begin{pmatrix}0 & & X\\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ où $P\in GL_n(\mathbb{K})$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N}, A^k=P\begin{pmatrix}0 & & X\\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}^k P^{-1}$ et $\mathrm{Tr}(A^k)=0$

(On n'a pas utilisé le fait que $\chi_{\mathbb{K}}=0$)

$(5)\Rightarrow(1)$:

Montrons le résultat par récurrence sur n :

Pour $n=1$: clair (la seule matrice de trace nulle est (0))

Soit $n\geq 2$, supposons le résultat vrai pour $n-1$.

Montrons déjà que 0 est valeur propre de A :

On a $\chi_A=(-1)^n(X^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0)$

D'après le théorème de Cayley–Hamilton, $A^n+a_{n-1}A^{n-1}+...+a_0I_n=0$

Donc $\mathrm{Tr}(A^n)+a_{n-1}Tr(A^{n-1})+...+a_0\mathrm{Tr}(I_n)=0$

Donc $na_0=0$, soit $a_0=0$ (on est en caractéristique nulle)

Donc $\chi_A(0)=0$, et 0 est valeur propre de A.

Soit $\vec{v}_1$ un vecteur propre associé à 0, qu'on complète en une base $(\vec{v}_1,...\vec{v}_n)$ de E.

Alors A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c}0 & l\\ \hline \vdots & \\ 0 & B\end{array}\right)$ où $B\in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

Donc $\forall k\geq 1, \mathrm{Tr}(A^k)=\mathrm{Tr}(B^k)=0$.

Donc par hypothèse de récurrence, B est nilpotente et $\chi_B=(-X)^{n-1}$

Or, $\chi_A=(-X)(-X)^{n-1}$, donc $\chi_A=(-X)^n$ et A est nilpotente.

IV Sous-espaces stables et formes réduites

On considère un corps $\mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$-ev quelconque (de dimension finie à partir du C)

A) Sous-espaces stables, endomorphismes restreints

- Définition :

On dit qu'un sous-espace F de E est stable par $u \in L(E)$ si $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, $u_{/F}$ induit un endomorphisme de F.

Remarque : pour tout sous-espace vectoriel F de E, $u_{/F}$ induit un endomorphisme de F si et seulement si $u(F) \subset F$.

- Propriétés :

(1) Une intersection, une somme de sous-espaces stables est stable.
(2) Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable (réciproque fausse)
(3) Une droite est stable si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre.

Démonstration :
(1), (2) : ok

(3) : Si $D = \mathbb{K}.\vec{v}$ est stable pour un certain $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $u(\vec{v}) \in D$, donc $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, et $\vec{v}$ est vecteur propre.

Réciproquement, si $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, alors $\forall \vec{x} = \mu\vec{v} \in D, u(\vec{x}) = u(\mu.\vec{v}) = \mu.(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{x}$

- Eléments propres de la restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable

Théorème :

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, F stable par u. Alors :

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ker(u_{/F} - \lambda \mathrm{Id}_F) = \ker(u - \lambda\mathrm{Id}) \cap F$

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u_{/F}$ si et seulement si λ est valeur propre de u et $\ker(u - \lambda\mathrm{Id}) \cap F \neq \{0\}$

(3) Pour λ valeur propre de $u_{/F}$, $E_\lambda(u_{/F}) = E_\lambda(u) \cap F$

Démonstration :…

- Polynômes en $u_{/F}$:

Théorème :

Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, F stable par u. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $\widetilde{P}(u)$ et $\widetilde{P}(u)_{/F} = \widetilde{P}(u_{/F})$

Corollaire :

Tout polynôme annulateur de u est annulateur de $u_{/F}$.

Si u admet un polynôme minimal $\min_u$, alors $u_{/F}$ en admet un, qui divise $\min_u$.

Démonstration du théorème :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on compare $(u_{/F})^k$ et $(u^k)_{/F}$

On montre par récurrence que $(u_{/F})^k = (u^k)_{/F}$ car F est stable par u.

Puis par linéarité, le résultat est valable pour tout polynôme.

Pour le corollaire :

$\widetilde{P}(u)=0$, alors $\widetilde{P}(u_{/F})=\widetilde{P}(u)_{/F}=0$

En particulier, si $P=\min_u$, on a $\widetilde{P}(u_{/F})=0$

Donc $\min_{u_{/F}} \big| P=\min_u$

B) Exemples de sous-espaces stables

- Existence de sous-espaces stables non triviaux en dimension finie :

Théorème :

(1) Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (ou algébriquement clos), tout endomorphisme en dimension $n\geq 1$ admet au moins une droite stable.

(2) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, tout endomorphisme en dimension $n\geq 1$ admet au moins un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Intérêt du théorème : permet de démarrer les récurrences.

Démonstration :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie $n\geq 1$.

Alors u admet un polynôme minimal μ et $\deg\mu\geq 1$.

- Si μ admet au moins une racine λ, alors λ est valeur propre de u.

Si on note $\vec{v}$ un vecteur propre associé à λ, la droite $\mathbb{K}.\vec{v}$ est stable par u.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si μ n'a pas de racine réelle, soit X^2+aX+b un facteur irréductible de μ ($\Delta=a^2-4b<0$). Alors u^2+au+b n'est pas injectif.

(En effet, si $\mu=R\times(X^2+aX+b)$, alors $0=(u^2+au+b\mathrm{Id})\circ \underbrace{\widetilde{R}(u)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{car } \mu \text{ est} \\ \text{minimal}}}$)

Soit alors $\vec{v}\neq\vec{0}$ tel que $(u^2+au+b\mathrm{Id})(\vec{v})=0$

On pose $F=\mathrm{Vect}(\vec{v},u(\vec{v}))$

Alors F est un plan car $(\vec{v},u(\vec{v}))$ est libre (sinon $\vec{v}$ serait valeur propre et μ aurait une racine réelle)

Et F est stable par u car $u(\vec{v})\in F$ et $u(u(\vec{v}))=-b\vec{v}-au(\vec{v})\in F$.

- Hyperplans stables en dimension finie :

Lemme :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension n finie. Soit H un hyperplan de E.

On introduit $\varphi\in E^*\backslash\{0\}$ tel que $H=\ker\varphi$.

Alors :

(1) H est stable par u si et seulement si il existe λ tel que $\varphi\circ u=\lambda\varphi$.

(2) Autrement dit, si $A=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)\in M_n(\mathbb{K})$ et $L=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)\in M_{1,n}(\mathbb{K})$, H est stable par u si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que ${}^tA\times{}^tL=\lambda{}^tL$.

Démonstration :

(1) Si $\varphi\circ u=\lambda\varphi$ pour $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $\forall x\in\ker\varphi, \varphi\circ u(x)=\lambda\varphi(x)=0$.

Donc $u(x)\in H=\ker\varphi$

Inversement, supposons que $H=\ker\varphi$ est stable par u.

Considérons $G=\ker(\varphi\circ u)$.

- Si $\varphi \circ u = 0_{E^*}$, c'est-à-dire si $G = E$, alors $\varphi \circ u = \lambda \varphi$ avec $\lambda = 0$
- Si $\varphi \circ u = \psi \neq 0_{E^*}$, alors $G = \ker \psi$ donc G est un hyperplan de E.

De plus, G contient H. En effet, pour tout $x \in H$, on a $u(x) \in H$ car H est stable par u, et donc $\varphi(u(x)) = 0$, c'est-à-dire $\psi(x) = 0$, d'où $x \in G$.

Comme on est en dimension finie, on a ainsi $G = H$.

Donc $\varphi \circ u$ et φ sont proportionnelles, ce qui établit le résultat.

(2) Avec les notations de l'énoncé,

$\varphi \circ u = \lambda \varphi$ équivaut à $L \times A = \lambda L$, c'est-à-dire aussi à ${}^t A \times {}^t L = \lambda {}^t L$.

Intérêt : permet de déterminer les hyperplans stables.

- Stabilité et commutation :

Théorème :

Soient u et v deux éléments de $L_{\mathbb{K}}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$

Alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Plu généralement, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(\widetilde{P}(u))$ et $\operatorname{Im}(\widetilde{P}(u))$ sont stables par u.

En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Démonstration :

Pour $x \in \ker u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = 0$ donc $v(x) \in \ker u$

Pour $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$

Alors $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \in \operatorname{Im} u$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\widetilde{P}(u) \circ v = v \circ \widetilde{P}(u)$. En effet, c'est vrai pour $P = X^k, k \in \mathbb{N}$ par récurrence, puis par linéarité pour $P \in \mathbb{K}[X]$.

On peut ensuite appliquer le résultat précédent à $\widetilde{P}(u)$ et v.

On a $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$, stable par v : il suffit de prendre $P = X - \lambda$

- Autres exemples :

- $D : P \in \mathbb{R}[X] \to P' \in \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont stables, et ce sont les seuls :

Si P de degré d est élément de F, et si F est stable par D, alors $P, P', \dots P^{(d)} \in F$. Mais $(P, P', \dots P^{(d)})$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Donc $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.

Donc F est de la forme $\mathbb{R}_d[X]$.

Parmi ces espaces stables, seul $\mathbb{R}_0[X]$ est propre.

- Rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ. $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$; si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, c'est tout.

C) Cas de la dimension finie.

- Base adaptée à un sous-espace stable

Théorème :

(1) Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie n.

Soit F un sous-espace stable par u, de dimension p.

Soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de F, qu'on complète en une base $(e_1, \dots e_n)$ de E.

Alors $\text{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$ avec $A=\text{mat}_{(e_1,\dots e_p)}(u_{/F})$

En particulier, $\chi_u=\chi_A\times\chi_C$, donc $\chi_{u/F}=\chi_A$ divise χ_u

(2) Inversement, si $\text{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$, alors $F=\text{Vect}(e_1,\dots e_p)$ est stable par u.

Démonstration :

Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}=\text{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u_{/F})$

On a, pour $j\leq p$, $u(e_j)=(u_{/F})(e_j)=\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}e_i$. Donc la j-ième colonne de $\text{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u)$ est $\begin{pmatrix} a_{1,j}\\ \vdots \\ a_{p,j} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Inversement, pour $j\leq p$, on a $u(e_j)=\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}e_i\in\text{Vect}(e_1,\dots e_p)=F$, donc F est stable par u.

- Diagonalisation par blocs :

Théorème :

On suppose que $E=F_1\oplus\dots\oplus F_p$ où les F_i sont stables par u.

Soit, pour $i\in[\![1,p]\!]$, $\mathfrak{B}_i$ une base de F_i, on note $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}_1,\dots\mathfrak{B}_p)$

Alors $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u)=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$, où $A_j=\text{mat}_{\mathfrak{B}_j}(u_{/F_j})$.

De plus, $\chi_u=\prod_{i=1}^{p}\chi_{u_{/F_i}}$, et $\min u=\text{ppcm}((\min(u_{/F_i}),i=1..p)$.

Démonstration :

Le premier point est clair

Pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, on a $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(\widetilde{P}(u))=\widetilde{P}(\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u))=\begin{pmatrix} \widetilde{P}(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{P}(A_p) \end{pmatrix}$

Donc l'idéal annulateur de u est :

$$\left\{P\in\mathbb{K}[X],\forall j,\widetilde{P}(u_{/F_j})=0\right\}=\bigcap_{i=1}^{p}\left\{P\in\mathbb{K}[X],\widetilde{P}(u_{/F_j})=0\right\}=\bigcap_{i=1}^{p}\min(u_{/F_j})\cdot\mathbb{K}[X]$$

C'est l'idéal engendré par le ppcm des $\min(u_{/F_j})$.

- Restriction d'un endomorphisme diagonalisable.

Lemme :

Si u est diagonalisable, et si F est stable par u, alors $u_{/F}$ est diagonalisable.

Démonstration :

Soit P annulateur de u scindé à racines simples (il en existe car u est diagonalisable)

On a alors $\widetilde{P}(u_{/F}) = \widetilde{P}(u)_{/F} = 0$, donc P est annulateur de $u_{/F}$ et scindé à racines simples, donc $u_{/F}$ est diagonalisable.

- Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.

Remarque :

Soit u diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1,...\lambda_p$ deux à deux distinctes, et pour $j = 1..p$, $F_j = E_{\lambda_j}(u)$, sous-espace propre de u associé à λ_j.

Alors tout sous-espace G_j d'un sous-espace propre F_j est stable par u car $u_{/G_j} = \lambda_j \mathrm{Id}_{G_j}$

Si, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, G_j est un sous-espace de F_j, alors $F = G_1 \oplus ... \oplus G_p$ est stable par u.

Réciproquement, tout sous-espace stable par u est du type ci-dessus :

Soit F un espace stable par u.

On pose $v = u_{/F}$. Ainsi, $v \in L(F)$

De plus, v est diagonalisable (vu au point précédent)

Ainsi, $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(v)} E_\lambda(v) = (\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)) \cap F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(v)} \underbrace{(E_\lambda(u) \cap F)}_{\text{sous-espace de } F_\lambda}$

Cas particulier :

On suppose u diagonalisable en dimension n avec n valeurs propres distinctes.

Soient $D_1, D_2,...D_n$ les droites propres.

Les sous-espaces de D_j sont exactement $\{0\}$ et D_j, donc u admet un nombre fini de sous-espaces stables, à savoir 2^n

Remarque :

Pour $n = 2$, et D_1, D_2 deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace F de $\mathbb{R}^2$ vérifie $F\ (= F \cap (D_1 \oplus D_2)) = F \cap D_1 \oplus F \cap D_2$ est que F soit $\{0\}, D_1, D_2$ ou $\mathbb{R}^2$.

- Diagonalisation simultanée (Hors programme)

Problème :

Etant donnée $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de $L_{\mathbb{K}}(E)$ (E étant de dimension finie), existe-t-il une base $\mathfrak{B}$ de E dans laquelle pour tout $\alpha \in I$, $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u_\alpha)$ est diagonale ?

Déjà :

Une condition nécessaire est que les u_α soient diagonalisables individuellement

Il faut aussi que $\forall \alpha, \beta \in I, u_\alpha \circ u_\beta = u_\beta \circ u_\alpha$. En effet, si $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u_\alpha) = D_\alpha$ et $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u_\beta) = D_\beta$ sont diagonales, alors $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$, donc $u_\alpha \circ u_\beta = u_\beta \circ u_\alpha$.

La réciproque est vraie.

En effet :

On suppose que $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ vérifie :

Pour tout $\alpha \in I$, u_α est diagonalisable, et $\forall \alpha, \beta \in I, u_\alpha \circ u_\beta = u_\beta \circ u_\alpha$

Soient $u, v \in L(E)$ diagonalisables, supposons que $u \circ v = v \circ u$

Pour $E_\lambda(u)$ sous-espace propre de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

On considère $v_\lambda = v_{/E_\lambda(u)}$, restriction de v diagonalisable donc diagonalisable.

Soit $\mathfrak{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(v)$ constituée de vecteurs propres de v_λ

Chaque vecteur de $\mathfrak{B}_\lambda$ est propre pour v_λ donc pour v, mais aussi pour u puisque $\mathfrak{B}_\lambda \subset E_\lambda(u)$.

Soit alors $\mathfrak{B} = \bigcup_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} \mathfrak{B}_\lambda$. Comme $E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}(v)} E_\lambda(v)$ et comme $\mathfrak{B}$ est une base de $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}(v)} E_\lambda(v)$, $\mathfrak{B}$ est une base de E, et donc $\mathfrak{B}$ est une base de diagonalisation simultanée de u et v.

Maintenant :

On suppose I de cardinal fini p ; soit $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de $L_{\mathbb{K}}(E)$ vérifiant les propriétés.

On peut supposer que $I = [\![1, p]\!]$.

On va montrer alors le résultat par récurrence sur p.

Pour $p = 2$, le résultat vient d'être montré.

Soit λ une valeur propre de u_p.

Alors $E_\lambda = E_\lambda(u_p)$ est stable par les $u_i, i = 1..p-1$

De plus, les $u_{i_{/E_\lambda}}$ commutent deux à deux et sont diagonalisables.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathfrak{B}_\lambda$ de E_λ dans laquelle les $u_{i_{/E_\lambda}}, i = 1..p-1$ sont diagonaux (et $u_{p_{/E_\lambda}}$ est diagonale)

Ainsi, $\bigcup_{\lambda\in\mathrm{sp}(u_p)} \mathfrak{B}_\lambda$ est une base de vecteurs propres communs à tous les $(u_i)_{i\in I}$ ce qui achève la récurrence.

Si maintenant I est quelconque :

Comme on est en dimension finie, on peut prendre $(u_{\alpha 1},...u_{\alpha k})$ une base de $\mathrm{Vect}(u_\alpha)_{\alpha\in I}$

On applique alors ce qui précède à cette base, et on conclut par combinaison linéaire.

D) Application à la trigonalisation

- Drapeaux de sous-espaces de E, où E est de dimension n finie :

C'est une suite $F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq ... \subsetneq F_n = E$ de sous-espaces de E avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \dim F_i = i$

- Base adaptée à un drapeau $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq ... \subsetneq F_n = E$:

C'est une base $(e_1,...e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_1,...e_k)$ est une base de F_k

On peut obtenir une telle base de la façon suivante :

On pose $e_1 \in F_1 \setminus F_0$, puis $e_2 \in F_2 \setminus F_1$ …

- Remarque sur les espaces euclidiens :

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension n, $F_0=\{0\}\subsetneq F_1\subsetneq \ldots\subsetneq F_n=E$ un drapeau de E. Alors il existe une base orthonormée adaptée au drapeau.

En effet :

Voir le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt :

On prend $e_1\in F_1\setminus F_0$ unitaire, puis $e_2\in F_2\setminus F_1$ orthogonal à F_1 et unitaire…

- Drapeaux et trigonalisation :

Théorème :

Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau constitué de sous-espaces stables par u.

De plus, la matrice de u dans une base adaptée à un tel drapeau est trigonale supérieure.

Démonstration :

Si u est trigonalisable, il existe une base $\mathfrak{B}=(e_1,\ldots e_n)$ de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{(e_1,\ldots e_n)}u=\begin{pmatrix} t_{1,1} & & (t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n,n}\end{pmatrix}$$

Posons alors pour $j\in[\![1,n]\!], F_j=\operatorname{Vect}(e_1,\ldots e_j)$

Alors cette suite est un drapeau, et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $u(e_j)=\sum_{i=1}^{j}t_{i,j}e_i\in F_j$.

Donc F_j est stable par u.

Réciproquement, si $F_0=\{0\}\subsetneq F_1\subsetneq \ldots\subsetneq F_n=E$ est un drapeau de sous-espaces stables et $(e_1,\ldots e_n)$ une base adaptée à ce drapeau, alors :

$e_1\in F_1$, donc $u(e_1)\in F_1=\mathbb{K}.e_1$

Donc e_1 est vecteur propre de u, $u(e_1)=t_{1,1}e_1$.

$e_2\in F_2$, et F_2 est stable par u, donc $u(e_2)=t_{1,2}e_1+t_{2,2}e_2\ldots$

D'où ensuite $\operatorname{mat}_{(e_1,\ldots e_n)}u=\begin{pmatrix} t_{1,1} & & (t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n,n}\end{pmatrix}$

E) Réduction de Jordan d'un endomorphisme trigonalisable et autres remarques (hors programme)

Problème :

Comment écrire qu'un endomorphisme trigonalisable n'est pas diagonalisable ?

Soit u un endomorphisme trigonalisable.

Ainsi, χ_u est scindé, disons $\chi_u=\prod_{i=1}^{p}(\lambda_i-X)^{m_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

Et donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$ où $C_i = \ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i})$.

Les C_i sont stables par u (car $(u-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i} \circ u = u \circ (u-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$)

Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si $\forall i \in [\![1,p]\!], u_{/C_i}$ est diagonalisable.

Donc u n'est pas diagonalisable si et seulement si il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $u_{/C_i}$ n'est pas diagonalisable.

Or, $u_{/C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$ est nilpotent, puisque $(u-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}_{/C_i} = 0$

Donc $v_i = (u-\lambda_i \mathrm{Id})_{/C_i}$ est nilpotent, non nul car $u_{/C_i} \neq \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$ (u n'est pas diagonalisable)

On a donc $\{0\} \subsetneq \ker v_i \subsetneq \ker(v_i^2)$

Soit alors $x \in \ker v_i^2 \setminus \ker v_i$

Ainsi, x vérifie $(u-\lambda_i \mathrm{Id})^2(x) = 0$, c'est-à-dire $u^2(x) - 2\lambda_i u(x) + \lambda_i^2 x = 0$, et $u(x) \neq \lambda_i x$.

Intérêt : en posant $y = u(x) - \lambda_i x$, on a $y \in \ker(u-\lambda_i \mathrm{Id})$

Donc $u(y) = \lambda_i y$

Et par récurrence : $\forall n \geq 1, u^n(x) = n\lambda_i^{n-1} y + \lambda_i^n x$

Application :

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors tout élément de G est diagonalisable.

On considère la norme triple $\|\!|\ \|\!|$ sur $M_n(\mathbb{C})$. Comme G est borné, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in G, \|\!|h|\!\| \leq M$

Ainsi, pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\|\!|g^n|\!\| \leq M$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, valeur propre de $g \in G$ (il en existe car χ_g est scindé : on est dans $\mathbb{C}$)

Et V de norme 1 associé à λ.

Alors $\|\!|g^n|\!\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|g^n X\| \geq \|g^n V\| = |\lambda|^n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}, |\lambda|^n \leq M$, donc $|\lambda| \leq 1$

Alors g est diagonalisable. En effet, sinon, comme χ_g est scindé, il existe une valeur propre λ et un vecteur v tels que $(g-\lambda.\mathrm{Id})^2(v) = 0$ et $(g-\lambda.\mathrm{Id})(v) \neq 0$.

Ainsi, en posant $w = (g-\lambda.\mathrm{Id})(v)$:

$\forall n \in \mathbb{N}, g^n(v) = n\lambda^{n-1} w + \lambda^n v$

Donc $\|g^n(v)\| \leq \|nw + \lambda v\| \underset{+\infty}{\sim} n\|w\|$, ce qui est impossible car $\|\!|g^n|\!\|$ est bornée par M.

Réduction de Jordan :

Rappel : Si $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$ est nilpotent, alors il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \varepsilon_i \in \{0;1\}$$

Théorème :

Si, pour une matrice A, χ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_p \end{pmatrix}$ où $M_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \varepsilon_{j,1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{j,m_j-1} \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$

Démonstration :

On part de la décomposition en sous-espaces caractéristiques :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{j=1}^{p} C_j \text{ où } C_j = \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$$

On applique ensuite le cas nilpotent à $u_j = u_{/C_j} - \lambda_j I_{C_j}$, qui est un endomorphisme nilpotent de C_j.

F) Réduction sur $\mathbb{R}$ ou réduction sur $\mathbb{C}$?

En pratique :

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si χ_A n'est pas scindé (dans $\mathbb{R}$), on se place dans $\mathbb{C}$ et on réduit dans $\mathbb{C}$.

Exemple important :

On suppose A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et χ_A non scindé dans $\mathbb{R}$.

Comme χ_A est réel, on a $\forall \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A), \bar{\lambda} \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, et $m_{\bar{\lambda}} = m_\lambda$.

On va diagonaliser A dans $\mathbb{C}$ méthodiquement :

(i) Pour chaque valeur propre réelle α, on prend $\mathfrak{B}_\alpha$ une base de vecteurs propres réels.

(ii) Pour chaque valeur propre non réelle λ, on prend $\mathfrak{B}_\lambda = (v_0(\lambda), \dots v_m(\lambda))$ une base de vecteurs propres (complexe), et alors $\overline{\mathfrak{B}}_\lambda = (\bar{v}_0(\lambda), \dots \bar{v}_m(\lambda))$ est une base de $\ker(A - \lambda . I_n)$.

On prend alors comme base de vecteurs complexes :

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)} \mathfrak{B}_\alpha \cup \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \\ \text{non réel}}} (\mathfrak{B}_\lambda \cup \mathfrak{B}_{\bar{\lambda}})$$

Proposition :

Si deux matrices *réelles* A et B sont semblables dans $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables dans $\mathbb{R}$. (la réciproque est évidente)

Démonstration :

Déjà, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P^{-1}BP$

On peut écrire $P = P_1 + iP_2$ où $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$.

On a alors $PA = BP$, c'est-à-dire $(P_1 + iP_2)A = B(P_1 + iP_2)$

Donc $\begin{cases} P_1 A = BP_1 \\ P_2 A = BP_2 \end{cases}$

On a ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, (P_1 + tP_2)A = B(P_1 + tP_2)$. On note, pour $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = P_1 + tP_2$.

Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $S(t) \in GL_n(\mathbb{R})$.
En effet, $\det(S(X))$ est un polynôme à coefficients réels en X.
Et comme $\det(S(i)) \neq 0$, ce polynôme n'est pas le polynôme nul.
Il existe donc un réel t tel que $\det(S(t)) \neq 0$, c'est-à-dire tel que $S(t) \in GL_n(\mathbb{R})$.
Et ainsi, $S(t)A = BS(t)$, et donc A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

V Application de la réduction

A) Suites récurrentes linéaires

Problème :
On cherche les suites u telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1}$ (*)
Où éventuellement $u_0, \ldots u_p$ sont donnés.
On sait trouver u par les équations caractéristiques.
Autre méthode :

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & & & a_{p-1} \end{pmatrix}$

On reconnaît la matrice compagnon associée au polynôme
$X^p - a_1 - a_1 X - \ldots - a_{p-1} X^{p-1}$, qui est aussi le polynôme caractéristique de (*)
Et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$
Pour trouver les u_n, il suffit donc de calculer les $A^n, n \in \mathbb{N}$.

B) Calcul de A^n pour une matrice A réelle.

- Méthode générale :

On réduit $A = PRP^{-1}$ avec si possible R trigonale voire diagonale, et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PR^n P^{-1}$

- Si A est diagonalisable :

On prend $(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_p)$ une base de vecteurs propres, on note $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$
Remarque :
Avec les projecteurs spectraux $\pi_1, \ldots \pi_p$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^n \pi_j$

D'où $\forall P \in \mathbb{R}[X], \widetilde{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} P(\lambda_j) \pi_j$

Calcul des π_j :

Si on note $P_{i_0}=\prod_{j\neq i_0}\dfrac{X-\lambda_{i_0}}{\lambda_j-\lambda_{i_0}}$, on a alors $\widetilde{P}_{i_0}(A)=\pi_{i_0}$

- Utilisation des polynômes annulateurs :

- Cas particulier :

Si $\chi_A=(\lambda_0-X)^n$, alors d'après le théorème de Cayley–Hamilton, $A-\lambda_0 I_n$ est nilpotent.

Soit p tel que $(A-\lambda_0 I_n)^p=0$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$A^k=(A-\lambda_0 I_n+\lambda_0 I_n)^k=\sum_{t=0}^{k}C_k^t\lambda_0^{k-t}(A-\lambda_0 I_n)^t=\sum_{t=0}^{p-1}C_k^t\lambda_0^{k-t}(A-\lambda_0 I_n)^t$$

($C_k^t=0$ si $t\geq k$)

- En général :

Soit M un polynôme annulateur de A.

La division euclidienne de X^k par M donne $X^k=Q_kM+R_k$

Et on a alors $A^k=\widetilde{R}_k(A)$.

Comment obtenir R_k ?

Si $M=\prod_{i=1}^{p}(\lambda_i-X)$ où les λ_i sont deux à deux distincts (si A est diagonaliable),

on cherche R_k sous la forme $R_k=\sum_{i=0}^{p-1}a_i(k)X^i$

La relation $X^k=Q_kM+R_k$ donne $\forall i,\lambda_i^k=R_k(\lambda_i)=\sum_{j=0}^{p-1}a_j(k)\lambda_i^j$

On a ainsi un système de Vandermonde, qu'on résoud et on obtient les $a_i(k)$ puis R_k.

Dans le cas général, quittte à changer de corps, on peut supposer M scindé.

On écrit M sous la forme $M=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\gamma_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

On note alors $\deg M=d=\sum_{i=1}^{r}\gamma_i$.

Ainsi, $X^k=MQ_k+\sum_{i=0}^{d-1}a_i(k)X^i$ (*)

On a donc un système de r équations en les d inconnues $a_0(k),...a_d(k)$:

$$\forall i\in[\![1,r]\!],\sum_{j=0}^{d-1}a_j(k)\lambda_i^j=\lambda_i^k$$

Pour chaque $i\in[\![1,r]\!]$, comme λ_i est racine de M de multiplicité γ_i, on a $M(\lambda_i)=...=M^{(\gamma_i-1)}(\lambda_i)=0$

On dérive (*) γ_i-1 fois et on remplace X par λ_i :

Pour tout $t\in[\![0,\gamma_i-1]\!]$, on a $k\times(k-1)...\times(k-t+1)\lambda_i^{k-t}=\sum_{j=t}^{d-1}j.(j-1)...(j-t+1)\lambda_i^{k-t}$

Pour chaque racine λ_i, on a donc γ_i équations en les inconnues $a_j(k)$

On a donc un système à d équations, d inconnues, dont on admet qu'il est de Cramer.

On obtient ainsi les $a_j(k)$ et donc R_k, puis $A^k = R_k(A)$.

C) Equations et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

- Equation scalaire (*E*) : $y^{(d)}(t) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j y^{(j)}(t) + f(t)$

Où $\forall j \in [\![1,d]\!] a_j \in \mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue.

Si *D* est l'opérateur de dérivation,

$(E) \Leftrightarrow P(D) = f$ où $P = X^d - \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j$

Méthode 1 : équation caractéristique

Les solutions $t \mapsto e^{r.t}$ de l'équation sans second membre sont caractérisées par $P(r) = 0$.

Méthode 2 : méthode matricielle

On pose $Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(d-1)} \end{pmatrix}$. Ainsi, $(E) \Leftrightarrow (S) : Z' = AZ + B(t)$

Où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$

Il faut ensuite résoudre le système, qu'on va résoudre dans un cas plus général.

- Pour un système (*S*) : $X'(t) = AX(t) + B(t)$

où $A \in M_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$, et $B : t \in I \mapsto B(t) \in M_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ continue.

On réduit d'abord $A = PRP^{-1}$ avec *R* diagonale ou trigonale supérieure réelle ou complexe.

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow X'(t) = PRP^{-1}X(t) + B(t)$

On fait un changement d'inconnues $Y(t) = P^{-1}X(t)$

Comme la matrice *P* est indépendante de *t*, *X* est de classe C^1 si et seulement si *Y* l'est, et dans ce cas $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$

(1) Si *R* est trigonale supérieure,

$$(S_1) : \begin{cases} y'_1(t) = \sum_{j=1}^{d} R_{1,j} y_j(t) + C_1(t) \\ y'_i(t) = \sum_{j=i}^{d} R_{i,j} y_j(t) + C_i(t) \\ y'_n(t) = R_{n,n} y_n(t) + C_n(t) \end{cases}$$

Ce sont des équations du premier ordre à coefficients constants et 2nd membre.
On résoud $y'_n = R_{n,n}y_n + C_n$, puis on reporte dans l'équation précédente…
Si R est diagonale, on a un système découplé de n équations indépendantes :
$y'_i(t) = R_{i,i}y_i(t) + C_i(t)$
(2) Cas diagonalisable :

Théorème :
Soit $(\vec{v}_1,...\vec{v}_n)$ une base de vecteurs propres de A où $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$.
La solution du problème de Cauchy (c'est-à-dire l'équation sans 2nd membre) :

$$\begin{cases} X'(t) = A \times X(t) \\ X(t_0) = X_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k\vec{v}_k \end{cases}$$

Est $X(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k(t-t_0)}\vec{v}_k$

Remarque :

Pour une équation avec le second membre $B(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(t)\vec{v}_k$, on résoud l'équation sans second membre et on utilise la méthode de variation des constantes, en cherchant les solutions $X(t)$ de $X' = AX + B$ sous la forme $X(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j(t)e^{\lambda_i t}\vec{v}_j$ où $z_j : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^1.

Alors $X'(t) = \sum_{j=1}^{n} (z'_j(t) + \lambda_j z_j(t))e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$

Donc $X'(t) - AX(t) = \sum_{j=1}^{n} z'_j(t)e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$ (A est diagonale)

Ainsi, X est solution de $X' = AX + B$ si et seulement si $\forall j, z'_j(t) = e^{-\lambda_j t}\beta_j(t)$.

Démonstration du théorème :

On sait que le problème de Cauchy a une unique solution (cours sur les équations différentielles)

Il suffit de vérifier que $\varphi : t \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j e^{\lambda_j(t-t_0)}\vec{v}_j$ convient, ce qui est le cas.

En effet, φ est de classe C^1 et $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j e^{\lambda_j(t-t_0)}\vec{v}_j = A\varphi(t)$

De plus, $\varphi(t_0) = \sum_{j=1}^{n} a_j\vec{v}_j = X_0$

(3) Utilisation des exponentielles de matrice : voir paragraphe suivant.

VI Suites et séries d'une algèbre normée

On travaille ici avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) Convergence

- Définitions (rappels) :

Espace normé, de Banach, algèbre de Banach…
Norme d'algèbre unitaire sur A :
C'est une norme pour l'espace vectoriel A avec en plus $\forall x, y \in A, \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ et $\|1_A\| = 1$

En dimension finie, les normes sont équivalentes, donc on pourra changer de norme…

- Cas des séries :

La série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite convergente lorsque la suite des sommes partielles $S_n^u = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

Elle est dite absolument convergente si la série de terme général $(\|u_n\|)_{n\geq 0}$ converge.

Théorème (déjà vu) :
Si E est un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente.
(La réciproque est vraie…)

B) Rayon spectral d'une matrice ou d'un endomorphisme en dimension finie

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ ou $L_{\mathbb{C}}(E)$ avec $\dim E = n$, on définit :
$\rho(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$: rayon spectral de A.

Proposition :
Pour toute valeur propre λ de A, et toute norme d'algèbre N, on a $N(A) \geq |\lambda|$, et donc $N(A) \geq \rho(A)$.

Démonstration :
(1) Cas particulier où N est une norme triple, c'est-à-dire s'il existe une norme $|\ |$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N(A) = \sup_{|X|\leq 1} |AX|$.

Si on prend X vecteur unitaire pour $|\ |$ et propre associé à une valeur propre λ,
$|AX| = |\lambda X| = |\lambda| \leq N(A)$

(2) Cas général où N est une norme d'algèbre quelconque :
Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, et $B \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $(A - \lambda I_n)B = 0$
(Il en existe, prendre par exemple la matrice dont toutes les colonnes sont des vecteurs propres de A associés à λ).
On a alors $AB = \lambda B$, donc $|\lambda|\|B\| = \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Comme $\|B\| > 0$, on a donc $|\lambda| \leq \|A\|$.

Théorème (hors programme) :

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = 0$ si et seulement si $\rho(A) < 1$

Corollaire :

Pour toute norme sur $M_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim\limits_{p\to+\infty} \|A^p\|^{1/p}$.

Démonstrations :

- Pour le théorème :

Supposons que $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de *A*, et *X* un vecteur propre associé.

On a alors $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = 0$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \underbrace{A^p X}_{\lambda^p X} = 0$, soit $|\lambda| < 1$

Ainsi, $\rho(A) < 1$ (on est en dimension finie, donc il y a un nombre fini de valeur propres)

Supposons maintenant que $\rho(A) < 1$.

Décomposition en sous-espaces caractéristiques :

$\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} C_i$ où $C_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$, avec $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$.

On a $\forall i, |\lambda_i| < 1$. Comme les C_i sont stables et engendrent $\mathbb{C}^n$, il suffit de montrer que $A^p_{/C_i} \to 0$

On a $A^p_{/C_i} = (A_{/C_i})^p$. Or, $A_{/C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i} = \nu_i$ est nilpotent par définition de C_i

Donc $\nu_i^{m_i} = 0$.

Ainsi, $(A_{/C_i})^p = (\lambda_i \mathrm{Id}_{C_i} + \nu_i)^p = \sum\limits_{t=0}^{m_i - 1} C_p^t \lambda_i^{p-t} \nu_i^t$

C'est une matrice dont les coefficients sont de la forme $\lambda_i^{p-m_i+1}$ fois un polynôme de degré $\leq m_i - 1$ en *p*, et tendent donc vers 0 par croissance comparée ($|\lambda_i| < 1$)

- Corollaire :

Si $\|\ \|$ est une norme triple sur $M_n(\mathbb{C})$ associée à une norme $|\ |$.

Comme $\mathrm{sp}(A^p) = \{\lambda^p, \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$ (car *A* est trigonalisable dans $\mathbb{C}$), on a $\rho(A^p) = (\rho(A))^p$

Donc $\forall p \geq 1$, $\rho(A)^p \leq \|A^p\|$, et $\rho(A) \leq \|A^p\|^{1/p}$.

Soit $r > \rho(A)$. Alors $B = \frac{1}{r} A$ vérifie $\rho(B) < 1$.

D'après le théorème, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} B^p = 0$

Il existe donc *M* tel que $\forall p \geq M, \|B^p\| \leq 1$, c'est-à-dire $\forall p \geq M, \|A^p\| \leq r^p$

Pour tout $p \geq M$, on a donc $\rho(A) \leq \|A^p\|^{1/p} \leq r$.

Ainsi : $\forall r > \rho(A), \exists M > 0, \forall p \geq M, \rho(A) \leq \|A^p\|^{1/p} \leq r$

Donc $\lim_{p\to+\infty} \|A^p\|^{1/p} = \rho(A)$

Pour une norme $\| \ \|_2$ quelconque, on peut considérer une norme triple et c_1, c_2 tels que $c_1\| \ \| \le \| \ \|_2 \le c_2\| \ \|$

Alors $\forall p\in \mathbb{N}^*, \underbrace{c_1^{1/p}}_{\to 1}\underbrace{\|A^p\|^{1/p}}_{\to\rho(A)} \le \|A^p\|_2^{1/p} \le \underbrace{c_2^{1/p}}_{\to 1}\underbrace{\|A^p\|^{1/p}}_{\to\rho(A)}$

C) Séries géométriques

- Algèbre de Banach :

Théorème :

Soit $(A,\| \ \|)$ une algèbre de Banach, et $a\in A$ tel que $\|a\|<1$. Alors :

- $1_A - a$ est inversible
- La série de terme général a^n converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (1-a)^{-1}$

Corollaire :

L'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Banach est ouvert.

Démonstration :

- Déjà, on a convergence absolue car $\forall n\in \mathbb{N}, \|a^n\| \le \|a\|^n = r^n$ qui est une série convergente car géométrique (réelle) de raison $r\in \left]-1;1\right[$
- On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)\times(1-a) = 1-a^{n+1}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$.

Par continuité du produit dans A, on a $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right)\times(1-a) = 1$

De même, $(1-a)\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right) = 1$

D'où le résultat.

Pour le corollaire :

Soit $a_0\in A^*$. On cherche une condition nécessaire sur h pour que $a_0+h\in A^*$

On a $a_0 + h = a_0(1+a_0^{-1}h)$

Donc si $\|-a_0^{-1}h\|<1$, alors $a_0+h\in A^*$.

Mais $\|-a_0^{-1}h\| \le \|a_0^{-1}\|\|h\|$

Donc il suffit que $\|h\| < \dfrac{1}{\|a_0^{-1}\|}$

Donc $B_0\left(a_0, \dfrac{1}{\|a_0^{-1}\|}\right) \subset A^*$

- Cas particulier de la dimension finie :

Théorème (Hors programme) :
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors la série de terme général A^n converge si et seulement si $\rho(A) < 1$

Démonstration :
Si la série de terme général converge, alors $A^n \to 0$, donc $\rho(A) < 1$
Réciproquement :
Si $\rho(A) < 1$, alors $I - A \in GL_n(\mathbb{C})$ (car $1 \notin \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$).
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $(I + A + ... + A^p)(I - A) = I - A^{p+1}$
Donc $I + A + ... + A^p = (I - A^{p+1})(I - A)^{-1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} (I - A)^{-1}$
car $A^{p+1} \to 0$ (puisque $\rho(A) < 1$)

D) Exponentielle dans une algèbre de Banach (Hors programme en dimension infinie)

Théorème :
Soit $(A, +, \times, \cdot, \| \ \|)$ une algèbre de Banach. Alors :

- Pour tout $u \in A$, la série de terme général $\dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.

($\dfrac{u^0}{0!} = 1_A$). On note $\exp(u)$ la somme de cette série.

- Si $u, v \in A$ commutent, on a $e^{u+v} = e^u \times e^v = e^v \times e^u$.

En particulier, pour tout $u \in A$, e^u est inversible et $(e^u)^{-1} = e^{-u}$

- Pour tout $u \in A$, l'application $\varphi_u : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to A \\ t \mapsto e^{t.u} \end{array}$ est de classe C^∞ et on a :

$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'_u(t) = u \times e^{t.u} = e^{t.u} \times u$.

Démonstration :
(1) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\left\| \dfrac{u^p}{p!} \right\| \leq \dfrac{\|u\|^p}{p!}$, terme général d'une série (réelle) convergente. Donc la série de terme général $\dfrac{u^p}{n!}$ est absolument convergente donc convergente car A est complet.
(2) Soient $u, v \in A$ qui commutent.
Considérons $\Delta_n(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(u+v)^k}{k!} - \left(\sum_{i=0}^{n} \dfrac{u^i}{i!} \right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \dfrac{v^j}{j!} \right)$
On va montrer que $\Delta_n \to 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^i v^{k-i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \dfrac{u^i}{i!} \dfrac{v^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{(i,j) \in T_n} \dfrac{u^i}{i!} \dfrac{v^j}{j!}$
Où $T_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i + j \leq n\}$

Par ailleurs, $\sum_{i=0}^{n}\frac{u^i}{i!}\sum_{j=0}^{n}\frac{v^j}{j!}=\sum_{(i,j)\in C_n}\frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!}$, où $C_n=[\![0,n]\!]^2$.

Comme $T_n\subset C_n$, on a $\Delta_n(u,v)=-\sum_{(i,j)\in T_n\setminus C_n}\frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!}$

Donc $\|\Delta_n(u,v)\|\leq\sum_{(i,j)\in T_n\setminus C_n}\frac{\|u\|^i}{i!}\frac{\|v\|^j}{j!}\leq-\Delta_n(\|u\|,\|v\|)$

Or, le théorème sur les séries *réelles* produits au sens de Cauchy montre que $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}e^{\beta}$

Donc $\lim_{n\to+\infty}-\Delta_n(\|u\|,\|v\|)=e^{\|u\|+\|v\|}-e^{\|u\|}e^{\|v\|}=0$, d'où le résultat voulu.

Inversibilité : comme u et $-u$ commutent, $e^u e^{-u}=e^{-u}e^u=e^0=1_A$

(3) Lemme :

Soit $u\in A$. Alors il existe $M>0$ tel que $\forall t\in[-1,1], \|\varphi_u(t)-1_A-t.u\|\leq Mt^2$

En effet : $\|\varphi_u(t)-1_A-t.u\|=\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k u^k}{k!}\right\|\leq t^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^{k-2}\|u\|^k}{k!}=\leq t^2\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|u\|^k}{k!}}_{M}\leq t^2 M$

Soit maintenant $t_0\in\mathbb{R}$.

Alors pour $h>0$, $\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)=e^{(t_0+h).u}-e^{t_0.u}=e^{t_0.u}(e^{h.u}-1)$.

Donc $\frac{\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)}{h}-u\times e^{t_0u}=e^{t_0.u}\left(\frac{e^{h.u}-1-h.u}{h}\right)$

Ainsi, si $|h|<1$, $\left\|\frac{\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)}{h}-u\times e^{t_0u}\right\|\leq M|h|\|e^{t_0.u}\|$

Donc $\lim_{h\to0}\frac{\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)}{h}=u\times e^{t_0.u}=e^{t_0.u}\times u$ car u et $e^{t_0.u}$ commutent.

E) Exponentielle et équations différentielles linéaires

- Ecriture rationnelle d'un système linéaire à coefficients constants à p inconnues :

$(S):\left\{\forall i\in[\![1,p]\!], x'_i(t)=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}x_j(t)+b_i(t)\right.$

Ou matriciellement : $X'(t)=A\times X(t)+B(t)$

Où $A=(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}\in M_n(\mathbb{K})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$.

Problème de Cauchy : il faut résoudre $\begin{cases}X'=AX+B\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$

- Utilisation de l'exponentielle :

Théorème :

Soit E un espace de Banach.

Ainsi, $(L_{\mathbb{C}}(E), \|\ \|)$ est une algèbre de Banach. Alors :

(1) Pour tout $a_0 \in L_{\mathbb{C}}(E)$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a_0 \times x(t) \\ x(0) = \mathrm{Id}_E \end{cases}$ a une unique solution $x : \underset{t \mapsto e^{t.a_0}}{\mathbb{R} \to L_{\mathbb{C}}(E)}$ (t décrivant un *intervalle I*)

(2) Pour tout $\vec{v} \in E$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a_0(x(t)) \\ x(0) = \vec{v} \in E \end{cases}$ a pour unique solution $x : \underset{t \mapsto e^{t.a_0}(\vec{v})}{\mathbb{R} \to E}$

Démonstration :

(1) On sait que $\varphi : t \mapsto e^{t.a_0}$ vérifie $\varphi(0) = \mathrm{Id}_E$ et $\forall t, \varphi'(t) = a_0 \times e^{t.a_0} = a_0 \times \varphi(t)$.

Donc φ est solution.

Soit x solution du problème de Cauchy.

Considérons $y(t) = e^{-t.a_0} x(t)$, c'est-à-dire $x(t) = e^{t.a_0} \times y(t)$.

Comme $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto e^{-a_0 t}$ sont de classe C^1 et $\underset{(a,b) \mapsto a \times b}{L_{\mathbb{C}}(E)^2 \to L_{\mathbb{C}}(E)}$ est continue,

y est de classe C^1 et $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = (-a_0 e^{-t.a_0}) \times x(t) + e^{-t.a_0} \times \underbrace{x'(t)}_{= a_0 \times x(t)}$

Comme a_0 et $e^{-t.a_0}$ commutent pour tout t, on a $\forall t, y'(t) = 0$ donc $y = \mathrm{cte} = y(0) = \mathrm{Id}_E$

Donc $x(t) = e^{t.a_0} y(0) = e^{t.a_0}$

(2) On fait la même chose : $t \mapsto \varphi(t) = e^{t.a_0}(\vec{v})$ est de classe C^1 et de dérivée $\varphi'(t) = a_0 e^{t.a_0}(\vec{v}) = a_0 \varphi(t)$, et $\varphi(0) = \vec{v}$.

Réciproquement, si x est une solution, on pose à nouveau $y(t) = e^{-t.a_0}(x(t)) \dots$

F) Calcul en dimension finie

- La réduction :

Si $A = PRP^{-1}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, e^{t.A} = Pe^{t.R} P^{-1}$

Ainsi, pour calculer $e^{t.A}$, on diagonalise A si possible, sinon on trigonalise.

- Si A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

Avec les projecteurs spectraux, $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de A deux à deux distinctes et π_i les projecteurs sur $E_{\lambda_i}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} E_{\lambda_j}(A)$.

On a alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t.A} = \sum_{i=1}^{r} e^{t.\lambda_i} \pi_i$

- Si A a une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$ (on a alors $\chi_A = (\lambda_0 - X)^n$)

Alors $A = \lambda_0 I_n + N$ où N est nilpotent (théorème de Cayley–Hamilton)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors : $e^{t.A} = e^{t.\lambda_0 I_n + t.N} = e^{t.\lambda_0 I_n} e^{t.N} = (e^{t.\lambda_0} I_n)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k\right)$

Donc $e^{t.A} = e^{\lambda_0 t}.\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_0 I_n)^k$

- Cas général (Hors programme) :

Décomposition de Jordan–Dumford :

$A = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t.A} = e^{t.D} e^{t.N}$

- Méthode artisanale utilisant le calcul de A^n et la sommation des séries : voir méthodes de calcul de A^n (par exemple avec le polynôme annulateur…)

VII Compléments hors programme

A) Endomorphisme cyclique

Définition :

Un endomorphisme u de E en dimension finie est dit cyclique lorsqu'il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\mathfrak{B} = (\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{n-1}(\vec{v}))$ est une base de E.

Dans ce cas, $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_1 \end{pmatrix}$

Proposition :

Si un endomorphisme u est cyclique, alors

$\mathrm{com}(u) = \mathbb{K}[u] = \{\alpha_0 Id_E + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}, (\alpha_0, \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\}$

Où $\mathrm{com}(u)$ est l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u.

Démonstration :

Déjà, les inclusions $\supset$ sont évidentes.

Soit $v \in \mathrm{com}(u)$, montrons que $v \in \{\alpha_0 Id_E + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}, (\alpha_0, \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\}$

Prenons $\vec{v}_0$ tel que $(\vec{v}_0, u(\vec{v}_0), \dots u^{n-1}(\vec{v}_0))$ est une base de E.

On peut alors écrire $v(\vec{v}_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(v_0)$. Alors $v = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$.

En effet, pour tout $k = 0..n-1$, on a :

$$v(u^k(\vec{v}_0)) = u^k(v(\vec{v}_0)) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^{k+j}(\vec{v}_0) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j\right)(u^k(\vec{v}_0))$$

Donc v et $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$ coïncident sur une base donc sont égaux.

Application :

Soit u un endomorphisme de E avec $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n \in \mathbb{N}$ ayant n valeurs propres simples. Alors u est cyclique.

En effet, soit $(e_1, \dots e_n)$ une base E, avec $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i$

On prend $\vec{v}=e_1+\ldots+e_n$.

Alors pour tout $k\in\mathbb{N}, u^k(\vec{v})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k e_i$

Donc $\mathrm{mat}_{(e_1,\ldots e_n)}(\vec{v},\ldots u^{n-1}(\vec{v}))=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n\end{pmatrix}\in GL_n$ car les λ_i sont deux à deux distincts. Donc $(\vec{v},\ldots u^{n-1}(\vec{v}))$ est une base de E.

Proposition :
Si, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $u-\lambda I$ est nilpotent d'indice n, alors u est cyclique.

En effet, soit $v=u-\lambda I$, et $\vec{v}_0$ tel que $(u-\lambda I)^{n-1}(\vec{v}_0)\neq\vec{0}$.

Alors $(\vec{v}_0,\ldots v^{n-1}(\vec{v}_0))$ est libre dans E donc c'est une base de E, puis $(\vec{v}_0,\ldots u^{n-1}(\vec{v}_0))$ aussi avec des transformations élémentaires.

Propriété :
Si un endomorphisme u est cyclique, alors $\min u=\chi_u(-1)^n$

En effet :
Si $(\vec{v}_0,\ldots u^{n-1}(\vec{v}_0))$ est une base de E, alors $(\mathrm{Id},u,\ldots u^{n-1})$ est libre dans $L_{\mathbb{K}}(E)$

En effet, pour tout $(\lambda_1,\ldots\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on a les implications :

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u^i=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u^i(\vec{v}_0)=0\Rightarrow\forall j\in[\![1,n]\!],\lambda_j=0$.

Donc si $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\widetilde{P}(u)=0$, alors $P=0$ donc $\deg(\min u)\geq n$. Comme $\min u|\chi_u$, on a $\min u=\chi_u.(-1)^n$.

B) Produit tensoriel

Définition :
Soient $A\in M_n(\mathbb{K}),B\in M_p(\mathbb{K})$
On note $A\otimes B=(a_{i,j}B)\in M_{np}(\mathbb{K})$.

Propriétés :
$(A\otimes B)\times(A'\otimes B')=AA'\otimes BB'$
Si $A,B\in GL_n(\mathbb{K}),GL_p(\mathbb{K})$, alors $A\otimes B\in GL_{np}(\mathbb{K})$ et $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$
Application :
Si A et B sont deux matrices diagonalisables, alors $A\otimes B$ est diagonalisable.

En effet :
Si $A=PDP^{-1}$, $B=QEQ^{-1}$, avec $P\in GL_n(\mathbb{K})$, $Q\in GL_p(\mathbb{K})$, D et E diagonales, alors $A\otimes B=(PDP^{-1})\otimes(QEQ^{-1})=(P\otimes Q)\times(D\otimes E)\times(P^{-1}\otimes Q^{-1})$

Soit $A\otimes B=(P\otimes Q)\times(D\otimes E)\times(P\otimes Q)^{-1}$ et $D\otimes E$ est diagonale.