Chapitre 11 : Séries entières

I Séries entières et rayon de convergence

A) Définitions relatives aux séries entières

- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$.

On appelle série entière de coefficients les a_n la série de fonctions de terme général $u_n(z)=a_n z^n$ (avec la convention $z^0=1$, soit $u_0(z)=a_0$). On notera souvent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une telle série. La variable z peut être réelle ou complexe.

- Opérations linéaires :

Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, et $\lambda\in\mathbb{C}$.

On note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ la série entière de coefficients les $a_n+\lambda b_n$.

Donc, par définition : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+\lambda b_n)z^n$

- Produit de Cauchy de deux séries entières :

La série entière produit de deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ où $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

- Extension :

Si $(a_n)_{n\geq n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un rang $n_0>0$, on ajoute $a_0=\ldots=a_{n_0-1}=0$

Exemple :

La série entière de coefficients les $\frac{1}{n}$ est $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où $a_n=\begin{cases}0 \text{ si } n=0\\ \frac{1}{n} \text{ sinon}\end{cases}$

Exemples de produits :

On pose $a_n=a^n$, $b_n=b^n$ pour $a,b\in\mathbb{C}$.

Les coefficients de la série entière produit sont $c_n=\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

Si $a\neq b$, $c_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ donc $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}z^n$

Si $a=b$, $c_n=(n+1)a^n$.

Si $a\neq b$, la série entière produit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$ s'écrit aussi :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)=\frac{a}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n+\frac{b}{b-a}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Attention : ces énoncés ne contiennent aucune propriété de convergence.

B) Rayon de convergence

Morale :

Le rayon de convergence d'une série caractérise à peu près les modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et les propriétés analytiques de la somme.

- Lemme d'Abel :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière. On suppose que la *suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < |z_0|$, alors la *série* de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration :

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M$.

Alors pour $|z| < |z_0|$ et $n \geq 0$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leq M r^n \text{ où } r = \left|\frac{z}{z_0}\right| \in [0;1[.$$

Donc la série est absolument convergente.

Théorème :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière.

L'ensemble des réels r positifs tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Démonstration :

- Si $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et si $0 \leq s < r$, alors la série de terme général $a_n s^n$ converge (absolument), donc la suite $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et est donc bornée.
- Si $r = 0$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée…

- Rayon de convergence :

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ l'élément $\sup\{r \geq 0, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ de $[0;+\infty]$

Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, l'ensemble des $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est soit $[0;R]$, soit $[0;R[$.

- Partition du plan associée à R.

Théorème :

- Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument.
- Si $R = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la suite $a_n z^n$ n'est pas bornée ; en particulier, la série diverge.

- Si $R \neq 0$ et $R \neq +\infty$:

Pour tout z tel que $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

Si $|z| > R$, la suite $a_n z^n$ n'est pas bornée, donc la série diverge grossièrement.

Si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général.

On a ainsi une partition du plan complexe en trois parties (dans le dernier cas).

Démonstration :

- Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $r \geq 0$ tel que $r > |z|$ et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le lemme d'Abel, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

- Pour tout $z \neq 0$, la suite $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (définition du rayon de convergence)
- Si $|z| > R$, la suite $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée

Si $|z| < R$, il existe $r \in \left]|z|, R\right[$ tel que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Puis, d'après le lemme d'Abel, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

- Exemples :
- Série entière de rayon de convergence infini :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{n!}$

- Série entière de rayon de convergence nul : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!.z^n$
- Série entière de rayon de convergence $R \in \left]0;+\infty\right[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{R^n}$

C) Rayon de convergence d'une somme et d'un produit

Théorème :

Soit R_a le rayon de convergence d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, R_b celui d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Alors le rayon de convergence des séries somme et produit sont supérieurs à $\min(R_a, R_b)$. Et pour la somme : si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

Démonstration :

Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n$ est absolument convergente, idem pour $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ (théorème sur le produit de Cauchy). En particulier, $((a_n + b_n)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et donc le rayon de convergence de la série somme est $\geq |z|$. D'où

Si $R_a \neq R_b$, disons par exemple $R_a < R_b$.

Pour $r \in \left]R_a, R_b\right[$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc $(a_n + b_n)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Donc pour tout $r \in \left]R_a, R_b\right[$, le rayon de convergence de la série somme est plus petit que r.

Comme de plus il est plus grand que R_a, ce rayon vaut R_a.

Exemples :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -b_n = 1$.

Alors $R_a = R_b = 1$ mais $R_\Sigma = +\infty$.

On prend $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{1-z}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$, et $b_n = (-1)^n a_n$;

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n = \frac{1+z}{1-z}$.

Et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a alors $R_a = R_b = 1$, mais $R_\Pi = +\infty$

Avec $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1 - z/2}{1+z}$, $R_a = 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n = \frac{1+z}{1-z/2}$, $R_b = 2$.

Et $R_\Pi = +\infty$.

D) Méthodes de calcul du rayon de convergence

- Un outil pratique : la règle de d'Alembert.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que :

(1) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, a_n \neq 0$.

(2) La suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $l \in [0;+\infty]$

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l} \in [0;+\infty]$

$(1/\infty = 0, 1/0 = \infty)$

Attention : ce théorème n'est qu'une condition suffisante.
Démonstration :
Pour $z \neq 0$,
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z|l$$
Discussion :
Pour $0 < l < +\infty$,

- Si $|z| < 1/l$, d'après la règle de d'Alembert sur les séries numérique, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente donc le rayon de convergence est $\geq 1/l$.
- Si $|z| > 1/l$, alors $|a_n z^n| \to +\infty$, donc $(a_n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, et le rayon de convergence est $\leq 1/l$.

Si $l = 0$, on a toujours convergence absolue, donc le rayon de convergence est $+\infty$

Si $l = +\infty$, on a toujours divergence grossière si $z \neq 0$, donc le rayon de convergence est nul.

Exemple :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!z^n}{(n+1)...(2n+1)}$$; rayon de convergence, étude en $\pm R$?

On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)\times n!}{(n+2)...(2n+3)} \times \dfrac{(n+1)...(2n+1)}{n!} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to \dfrac{1}{4}$

Donc le rayon de convergence vaut $R = 4$.
Etude en ± 4 :
On a $\dfrac{4^{n+1}a_{n+1}}{4^n a_n} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3} < 1$

Donc la suite $(4^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.

On cherche un équivalent de $u_n = 4^n a_n$ en $+\infty$.

On va chercher α et $K > 0$ tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^\alpha$.

On cherche déjà α tel que la suite de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{n^\alpha}\right)$ converge.

On va étudier plutôt la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\dfrac{u_{n-1}}{(n-1)^\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\frac{u_{n-1}}{(n-1)^\alpha}\right) &= \ln\frac{u_n}{u_{n-1}} + \alpha\ln\frac{n-1}{n} \\ &= \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) + \alpha\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \alpha\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= -\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, si on prend $\alpha=-\frac{1}{2}$, la série converge (absolument), donc la suite de terme général $\ln\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge vers $\lambda\in\mathbb{R}$, et $\frac{u_n}{n^\alpha}\to e^\lambda$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\lambda n^\alpha$

On a donc aussi trouvé K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$

Ainsi : en $R=4$, il y a divergence car $4^n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$

Et en $R=-4$, il y a convergence par critère de Leibniz.

Séries hypergéométriques :

On pose $a_0=1$, $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=a_n\times F(n)$ où

$F=\frac{(X-\alpha_1)...(X-\alpha_r)}{(X-\beta_1)...(X-\beta_s)}$, avec $\forall i\in[\![1,r]\!], \alpha_i\in\mathbb{C}, \forall i\in[\![1,s]\!], \beta_i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$

On cherche le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

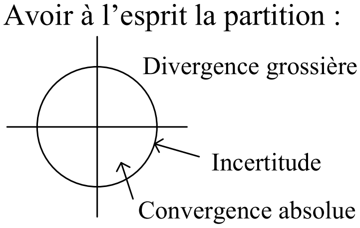
S'il existe $i_0\in[\![1,r]\!]$ tel que $\alpha_{i_0}\in\mathbb{N}$, alors $F(\alpha_{i_0})=0$, et $\forall n>\alpha_{i_0}, a_n=0$, donc le rayon de convergence est infini.

Si $\forall i\in[\![1,r]\!], \alpha_i\notin\mathbb{N}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0$

Et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|F(n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{r-s}$, soit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\begin{cases}0 \text{ si } r<s\\ 1 \text{ si } r=s\\ +\infty \text{ si } r>s\end{cases}$, et le rayon de convergence est alors $\begin{cases}+\infty \text{ si } r<s\\ 1 \text{ si } r=s\\ 0 \text{ si } r>s\end{cases}$

- Par le comportement des suites et séries de $a_n z^n$.

Avoir à l'esprit la partition :



Exemple :

Si pour $z_0\in\mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z_0^n$ est semi-convergente mais pas absolument convergente, le rayon de convergence est $|z_0|$.

Soient $a,b\in\mathbb{C}^*$; on pose $a_0=1$, et pour $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}a_{n+1}=a.a_n \text{ si } n\equiv 0\ [2]\\ a_{n+1}=b.a_n \text{ si } n\equiv 1\ [2]\end{cases}$

Quel est le rayon de convergence de la série entière de coefficients les a_n ?

On montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases}a_{2n+1}=a^{n+1}b^n\\ a_{2n}=a^n b^n\end{cases}$

Pour $r>0$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les deux suites $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1} r^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, c'est-à-dire si et seulement si $r^2|ab|\leq 1$.

Donc le rayon de convergence vaut $\dfrac{1}{\sqrt{|ab|}}$

- Comparaison avec les séries, séries majorantes.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est non nul si et seulement si il existe $\rho>0$, $M\geq 0$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\leq M\rho^n$.

En effet :

Si le rayon de convergence est non nul, il existe $r>0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |a_n r^n|\leq M$, et $\rho=\dfrac{1}{r}$ convient.

Inversement, si $\forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\leq M\rho^n$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est supérieur à $\dfrac{1}{\rho}$.

Règle de Hadamard (hors programme) :

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Où : Si u_n est une suite bornée de réels positifs, on pose :

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{u_k, k\geq n\}$ (« limite supérieure »)

C'est-à-dire que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

Si u_n est positive non majorée, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = +\infty$

Notes :

Si $0\leq u_n\leq M$, $v_m=\sup\{u_k, k\geq m\}$ est bien définie, et $\forall m\in\mathbb{N}, 0\leq v_{m+1}\leq v_m$, donc $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge bien.

$\lim\limits_{m\to+\infty} v_m$ est une valeur d'adhérence de u : $\forall m\in\mathbb{N}, \exists k_m\geq m, v_m\geq u_{k_m}\geq v_m+\dfrac{1}{m}$

Toute valeur d'adhérence de u est plus petite que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$: si $u_{\varphi(n)}\to\alpha$, alors $\forall m\in\mathbb{N}, v_m\geq\alpha$.

Démonstration de la règle de Hadamard :

Pour $r\geq 0$, on a $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|r^n} = r\times\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{r}{R}$ où on a posé $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Si $r>R$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall m\geq N, \sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|r^k}, k\geq m\right\}>\rho$ où $\rho\in\left]1,\dfrac{r}{R}\right[$.

Donc pour tout $m\geq N$, il existe $k\geq m$ tel que $\sqrt[k]{|a_k|r^k}\geq\rho$, et $|a_k|r^k\geq\rho^k>1$, donc $a_k r^k\not\to 0$.

Si $r<R$: il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall m\geq N$, $\forall m\geq N,\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|r^k}, k\geq m\right\}<\rho$ où $\rho\in\left]\frac{r}{R},1\right[$

Donc $\forall k\geq m\geq N,\sqrt[k]{|a_k|r^k}<\rho$, soit $|a_k|r^k\leq\rho^k$, et la série converge.

II Différents modes de convergence d'une série entière

Problème :
Dans quelle mesure le rayon de convergence détermine-t-il les modes de convergence ?

On considère ici une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ de rayon de convergence R.

A) Domaine de convergence simple

Théorème :

Le domaine de convergence simple de $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$, c'est-à-dire le domaine de définition de $f:z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ vérifie :

(1) Pour les réels, $]-R,R[\subset\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(f)\subset[-R,R]$

(2) Pour les complexes, $D_o(0,R)\subset\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)\subset D_f(0,R)$

Démonstration :

Voir **I**.

Pour $|z|<R$, il y a convergence absolue.

Pour $|z|>R$, il y a divergence grossière.

Exemples :
Avec $R=1$:

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)=D_o(0,1)$

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)^2}$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)=D_f(0,1)$

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)=D_f(0,1)\setminus\{1\}$

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{15(n+1)}}{n+1}$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)=D_f(0,1)\setminus\mathbb{U}_{15}$

B) Convergence uniforme et normale

Théorème :

Une série entière de rayon de convergence R non nul converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$

Attention :

En général, une série entière ne converge pas uniformément sur $D_o(0,R)$ ni sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)$.

Démonstration :

Pour $r \in [0,R[$, $\sup_{|z|\leq r}|a_n z^n| = |a_n| r^n$, terme général d'une série convergente car $0 \leq r < R$.

C) Application à $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Théorème :

f est continue sur le disque ouvert de convergence absolue.

Attention : en général, f n'est pas continue sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)$

En effet, pour $r < R$, f est limite uniforme sur $D_f(0,r)$ d'une suite de fonctions continues, donc f est continue.

Ainsi, f est continue sur $\bigcup_{r<R} D_f(0,r) = D_o(0,R)$.

Exercices de compléments :

(On suppose que $0 < R < +\infty$)

(1) Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ est absolument convergente, alors on a convergence normale sur $D_f(0,R)$. Donc le domaine de définition de f est $D_f(0,R)$ et f y est continue.

(2) Cas de la variable réelle : utilisation des séries alternées.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n a_n \geq 0$, et que $|a_n R^n|$ décroît vers 0.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément (mais pas toujours normalement) sur $[0,R]$, et $D_{\mathbb{R}}(f)$ contient R et est continu en R.

En effet :

Pour $x \in [0,R]$, $u_n(x) = a_n x^n = (-1)^n \underbrace{((-1)^n a_n R^n)}_{\geq 0} \left(\frac{x}{R}\right)^n$

Donc $u_n(x)$ est alternée, et de plus $|u_n(x)|$ décroît vers 0.

Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge (critère de Leibniz)

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq |a_n R^n|$

Donc $\|R_n\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

Il y a donc convergence simple, et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, donc la série converge uniformément.

(3) Théorème de convergence radiale d'Abel :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière, $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est uniformément convergente sur $[0, z_0]$

En particulier, $f_{/[0,z_0]}$ est continue en z_0.

Démonstration :

On pose $z = z_0 u$ pour $u \in [0;1]$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n u^n$ où $a'_n = a_n z_0^n$

On est donc ramené au même problème avec $z_0 = 1$, ce qu'on suppose.

On suppose donc que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et on veut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0;1]$. Posons $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

On va montrer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geq m$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k x^k = \sum_{k=m}^{n} (r_{k-1} - r_k) x^k = \sum_{j=m-1}^{n-1} r_j x^{j+1} - \sum_{j=m}^{n} r_j x^j$$

$$= \sum_{j=m}^{n} r_j (x^{j+1} - x^j) + r_{m-1} x^m - r_n x^{n+1}$$

Donc $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| \leq \sum_{j=m}^{n} |r_j| |x|^j |1-x| + |r_{m-1}| |x|^m - |r_n| |x|^{n+1}$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |r_n| \leq \varepsilon$

Pour $n \geq m \geq N$, $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| \leq \varepsilon (\sum_{j=m}^{n} x^j \underbrace{|x-1|}_{1-x} + x^m + x^{n+1}) \leq 2\varepsilon . x^m \leq 2\varepsilon$

Remarque :

Comme conséquence, on a le fait que pour toute série entière de rayon de convergence R, $x \in \mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(f) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue (même en $\pm R$ si ils sont dans $\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(f)$)

(4) Expression intégrale des coefficients :

On suppose que $R > 0$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Pour tout $x \in [0; R[$, $\varphi : t \mapsto f(re^{it})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-i.nt} dt = a_n r^n$$

Démonstration :

$t \mapsto re^{it}$ est continue à valeurs dans $D_o(0,R)$ où f est continue donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-i.nt}dt = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(re^{it})^k\right)e^{-i.nt}dt = \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)t}dt$$

On pose $u_k(t) = a_k r^k e^{i(k-n)t}$. Alors u_k est continue et $\|u_k\|_\infty = |a_k| r^k$, terme général d'une série convergente ($r < R$)

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est normalement, donc uniformément convergente sur $[0;2\pi]$, et on peut intervertir l'intégrale et la somme :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-i.nt}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt = 2\pi a_n r^n$$

Théorème de Liouville :

Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $A,B,C > 0$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A + B|z|^C$. Alors f est un polynôme

(Fonction entière : somme d'une série entière de rayon de convergence infini)

Démonstration :

Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, on a $a_n = \dfrac{1}{2\pi.r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-i.nt}dt$

Donc $|a_n| \leq \dfrac{1}{2\pi.r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt \leq \dfrac{1}{r^n}(A + Br^C)$

Pour $n > C$, le passage à la limite quand $r \to +\infty$ donne $a_n = 0$, c'est-à-dire $f(z) = \sum_{n=0}^{C} a_n z^n$

III Propriétés analytiques de la somme d'une série entière

Morale :

Sur $]-R;R[$, on calcule avec la somme d'une série entière comme avec un polynôme.

A) Régularité

Lemme :

Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et la série dérivée formelle ($\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$) ont le même rayon de convergence.

Démonstration :

On note R le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, R' celui de $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$.

Pour $r \in [0;R'[$, on a pour $n \geq 1$: $a_n r^n = n a_n r^{n-1} \times \dfrac{r}{n}$

Comme $(n a_n r^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Donc $[0;R'[\subset [0;R]$, et $R \geq R'$.

Si $r \in [0;R[$, soit $s \in]r,R[$. Alors $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et :

$$\forall n \geq 1, n a_n r^{n-1} = a_n s^n \times \frac{1}{s} n \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1}$$

Comme $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{r}{s}\right)^{n-1} = 0$, la suite $(n a_n r^{n-1})_{n\geq 1}$ est bornée, et donc $r \leq R'$.

Donc $[0;R[\subset [0;R']$, d'où l'autre inégalité puis $R = R'$.

Théorème :

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est de classe C^∞ et indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R,R[$.

Remarque :

Ce théorème remplace l'appel au théorème sur les caractérisations C^k des séries de fonctions (Mais il ne donne *aucune* information sur $\pm R$)

Corollaire : unicité du développement en série entière de séries entière de rayon de convergence non nul :

Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R,R[$ où R est le rayon de convergence, strictement positif, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (C'est-à-dire que la série est la série de Taylor)

Démonstration :

Pour le théorème :

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Posons $u_n(x) = a_n x^n$. Alors u_n est de classe C^1.

Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u'_n$ est encore R.

Donc sur tout segment $[-r,r]$ où $r < R$, les deux séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u'_n$ sont normalement convergentes donc uniformément convergentes.

Ainsi, *f* est de classe C^1, dérivable terme à terme sur $[-r,r]$ pour tout $r < R$, donc sur $]-R,R[$.

Ensuite, par récurrence, *f* est de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-R,R[, f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)...(n-k-1) a_n x^{n-k}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(0) = k! a_k$, ce qui établit ainsi le corollaire.

B) Algèbre des fonctions développables en série entière sur $]-a;a[$.

- Définition :

Une fonction $f:]-a;a[\to\mathbb{C}$ (pour $a>0$) est dite développable en série entière s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ de rayon de convergence $R\geq a$ telle que $\forall x\in]-a;a[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Exemple :

$x\mapsto\frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ et $\forall x\in]-1;1[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$.

Notation (ici seulement) :

On note $\mathrm{DSE}(a)$ l'ensemble des fonctions $f:]-a;a[\to\mathbb{C}$ développables en série entière, où $a\in[0;+\infty]$.

Théorème :

- $\mathrm{DSE}(a)$ est une sous-algèbre de $C^\infty(]-a;a[,\mathbb{C})$, stable par dérivation et primitivation.
- Pour $f:]-a;a[\to\mathbb{C}$, développable en série entière avec $\forall x\in]-a;a[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, et pour tout segment $[u,v]\subset]-a;a[$, on a $\int_u^v f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_u^v t^ndt$.

Démonstration :

On a vu que si $f\in\mathrm{DSE}(a)$, alors *f* est de classe C^∞ sur $]-a;a[$, dérivable terme à terme.

Si $\forall x\in]-a;a[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, alors $\forall x\in]-a;a[, f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$, et le rayon de convergence de la série dérivée est égal au rayon de convergence de la série.

Donc $f'\in\mathrm{DSE}(a)$.

Si $\forall x\in]-a;a[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, on prend $F(x)=C+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$; alors le rayon de convergence de cette série entière est égal à celui de sa dérivée, qui est *f*. Donc $F\in\mathrm{DSE}(a)$.

Montrons que $\mathrm{DSE}(a)$ est une sous-algèbre de $C^\infty(]-a;a[,\mathbb{C})$.

Déjà, $\mathrm{DSE}(a)$ n'est pas vide (contient par exemple les fonctions polynomiales).

Et $\mathrm{DSE}(a)$ est stable par + et ×, d'après les théorèmes sur le rayon de convergence des sommes et produits.

Soit $R\geq a$ le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Pour $[u,v]\subset]-a;a[$, prenons $r=\max(|u|,|v|)<a$. Sur $[-r,r]$, et donc sur $[u,v]$, $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est normalement convergente, donc on peut intégrer terme à terme sur $[u,v]$

- Caractérisation des fonctions développables en série entière :

Théorème :

Soit $f : \left]-a;a\right[\to \mathbb{C}$ ($a>0$)

Alors $f \in \mathrm{DSE}(a)$ si et seulement si f est de classe C^∞ et

$\forall x \in \left]-a;a\right[, \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0$

De plus, pour $f \in \mathrm{DSE}(a)$, on a $\forall x \in \left]-a;a\right[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$.

Démonstration :

Si $f \in \mathrm{DSE}(a)$, alors f est de classe C^∞, et f s'écrit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Comme f est de classe C^∞, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral :

Pour tout $x \in \left]-a,a\right[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)}_{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0$.

Réciproquement, si f est de classe C^∞ sur $\left]-a,a\right[$, et si pour tout $x \in \left]-a,a\right[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \to 0$$

Donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge pour tout $x \in \left]-a,a\right[$, et a pour somme $f(x)$.

Le rayon de convergence de la série de Taylor est donc $\geq a$ et $f \in \mathrm{DSE}(a)$.

Attention :

il existe des fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière :

$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$; alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

Si f était développable en série entière sur $\left]-a;a\right[$ pour $a>0$, on aurait

$\forall x \in \left]-a;a\right[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ ce qui est faux.

Pour $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2} dt$, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = (n!)^2$.

Donc pour tout $x \neq 0$, la série de terme général $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ diverge.

C) Compléments hors programme : série entière de la variable complexe et caractérisation analytique

- Caractérisation analytique :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$.

f est dite analytique sur U lorsque pour tout $x_0 \in U$, il existe une suite $(a_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0)t^n$ a un rayon de convergence $R(x_0) > 0$ et il existe $r > 0$ vérifiant :

$$B_o(x_0, r) \subset U,\ r \leq R(x_0) \text{ et } \forall x \in B_o(x_0, r), f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0)(x - x_0)^n$$

En d'autre terme, f est analytique lorsque f est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

Attention :

On a deux notions différentes :

Les fonctions analytiques de variable réelle ($U \subset \mathbb{R}$)

Les fonctions analytiques de variable complexe ($U \subset \mathbb{C}$)

Exemple :

Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Alors exp est analytique sur $\mathbb{C}$.

En effet :

Soient $z_0 \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{C}$.

Alors $\exp(z_0 + h) = e^{z_0}e^h = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} h^n$

Et $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence infini.

Proposition :

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$, alors f est analytique sur $D_o(0, R)$.

Démonstration :

Il faut montrer que pour tout $z_0 \in D_o(0, R)$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r$, $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)h^n$ avec un rayon de convergence $R \geq r$.

On prend $r = R - |z_0|$.

Pour $|h| < r$, on a $f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{i=0}^{n} C_n^i z_0^{n-i} h^i = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}$

Où $u_{n,i} = \begin{cases} a_n C_n^i z_0^{n-i} h^i \text{ si } i \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Pour appliquer la formule de Fubini, on étudie les quantités pour n fixé $\sigma_n = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{n,i}|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n$

Pour tout *n*, σ_n est bien défini car pour $i > n$, $u_{n,i} = 0$.

De plus, $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i |a_n||z_0|^{n-i}|h|^i = |a_n|(|z_0|+|h|)^n$

La série de terme général σ_n converge car $|z_0|+|h| < |z_0|+r = R$, et donc la série de terme général $a_n(|z_0|+|h|)^n$ converge absolument.

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{n=i}^{+\infty} C_n^i a_n z_0^{n-i} h^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i(z_0) h^i$$

- Dérivabilité au sens complexe :

Définition :

Soit $f : U \to \mathbb{C}$, *U* étant un ouvert de $\mathbb{C}$, et $z_0 \in \mathbb{C}$ $z_0 \in U$.

f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si le terme $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ tend vers une valeur finie (notée $f'_{\mathbb{C}}(z_0)$) lorsque $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0.

Si *f* est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z_0 \in U$, *f* est dite holomorphe sur *U*.

Remarque :

On peut montrer que si *f* est holomorphe sur *U*, alors elle est de classe C^∞ au sens complexe, et même elle est analytique sur *U*.

Exemple :

Toute fonctions polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Proposition :

Si *f* est somme d'une série entière de rayon de convergence *R* non nul, alors *f* est holomorphe sur $D_o(0,R)$.

Démonstration :

On sait que sur $B_f(0, R-|z_0|)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)(z-z_0)^n$

Donc $f(z_0) = a_n(z_0)$, et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |h| < R - |z_0|$, $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_0)h^{n-1}$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_0)h^{n-1}$ un rayon de convergence supérieur ou égal à celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)h^n$ (on reconnaît presque la série entière dérivée)

Donc $h \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_0)h^{n-1}$ est définie et continue sur $D_0(0, R-|z_0|)$ (au moins)

Donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ 0<|h|<R-|z_0|}} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe et vaut $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ 0<|h|<R-|z_0|}} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = a_1(z_0)$

IV Application des séries entières

A) Développement des fonctions usuelles

- Méthode utile :
- Par somme, produit, dérivation, primitivation sur des développements en séries entières, on obtient de nouveaux développements.
- Utilisation d'une équation différentielle :

Si on sait que f est solution d'une équation différentielle, en injectant $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en dérivant terme à terme sur l'intervalle de convergence, on obtient des relations entre les a_n.

Attention : il faut toujours s'assurer que la série entière obtenue a un rayon de convergence non nul, et que la fonction trouvée est bien solution.

- On peut aussi étudier le reste de Taylor.
- A partir de la série géométrique :

Théorème :

(1) Pour tout $z \in D_o(0,1)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, de rayon de convergence égal à 1.

(2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $z \in D_o(0,1)$,

$\sum_{n=p}^{+\infty} n.(n-1)...(n-p+1)z^n = \frac{p! z^p}{(1-z)^{p+1}}$, de rayon de convergence égal à 1

Ou aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

Démonstration :

Le rayon de convergence est 1 d'après le critère de d'Alembert.

Pour z non nul tel que $|z|<1$, on pose $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(tz)^n, t \in \left]\frac{-1}{|z|};\frac{1}{|z|}\right[\supset [-1;1]$

Alors φ est dérivable en série entière, de rayon de convergence $\frac{1}{|z|}$, sur $\left]\frac{-1}{|z|};\frac{1}{|z|}\right[$ et :

$\forall t \in \left]\frac{-1}{|z|};\frac{1}{|z|}\right[, \varphi(t)=\frac{1}{1-tz}$

On dérive terme à terme (φ est à variable réelle) :

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \left]\frac{-1}{|z|};\frac{1}{|z|}\right[, \varphi^{(p)}(t)=\sum_{n=p}^{+\infty} n.(n-1)...(n-p+1)t^{n-p}z^n = \frac{p! z^p}{(1-tz)^{p+1}}$

Avec $t=1$, la formule devient $\sum_{n=p}^{+\infty} n.(n-1)...(n-p+1)z^n = \frac{p! z^p}{(1-z)^{p+1}}$

Qui est bien la formule voulue pour z non nul.

- Fractions rationnelles :

Théorème :

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ dont 0 n'est pas pôle, et $R=\min(A)$ où A est l'ensemble modules des pôles de F. (on prend $R=+\infty$ si $F \in \mathbb{C}[X]$)

Alors F est développable en série entière sur $D_o(0,R)$, et le développement s'obtient à partir de la décomposition en éléments simples de F et des formules valables pour $m \geq 1$ et $z_0 \neq 1$:

$$\frac{1}{(1-z_0)^m}=\left(\frac{-1}{z_0}\right)^m\sum_{n=0}^{+\infty}C_{m+n-1}^n\left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$

Complément :

Le rayon de convergence de la série obtenue est exactement R.

Démonstration :

On a $F=E+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(X-z_i)^j}$

Pour $|z|<\min(|z_i|,i\in[\![0;N]\!])$, on a

$$F(z)=E(z)+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(-z_i)^j}\frac{1}{(1-z/z_i)^j}$$

$$=E(z)+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(-z_i)^j}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+j-1}^{j-1}\left(\frac{z}{z_i}\right)^n}_{\text{Rdc}\geq\min(|z_i|)}$$

Donc la série entière a un rayon de convergence au moins égal à $\min(|z_i|,i\in[\![0;N]\!])$

Montrons maintenant que le rayon de convergence est égal à $\min(|z_i|,i\in[\![0;N]\!])$:

On peut supposer par exemple que le minimum est $|z_0|$

Alors pour $|z|<|z_0|$, $|F(z)|\xrightarrow[z\to z_0]{}+\infty$

Or, si le rayon de convergence de la série était supérieur à $|z_0|$, cette série entière serait continue en z_0, donc $F(z)$ aurait une limite finie en z_0, ce qui est faux.

Logarithme, arc tangente :

Théorème :

Pour $x\in\,]-1;1[$, on a :

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\operatorname{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Tous de rayon de convergence égal à 1.

Démonstration :

On intègre terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$ sur $[0;a]\subset\,]-1;1[$:

$$\ln(1+a)=\int_0^a\frac{dt}{1+t}=\int_0^a\sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

(Possible car la rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$ vaut 1)

De même pour les autres.

Complément :

La première et la troisième formules sont valables en $x=1$.

En effet :

On utilise un argument de continuité en $x=1$ (on sort ici du chapitre « séries entières », et on travaille comme avec des séries de fonctions quelconques) :

On pose, pour $x\in[-1;1]$, $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

D'après le critère de Leibniz, on a convergence simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|\leq|u_{n+1}(x)|=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\leq\frac{1}{2n+1}\to 0$$

Donc la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0;1]$, et donc $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est continue en 1.

Donc $\operatorname{Arctan}(1)=\lim_{x\to 1^-}\operatorname{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

On utilise le même argument pour ln.

- Formule du binôme :

Théorème :

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$.

- La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}z^n$ a pour rayon de convergence 1 si $\alpha\notin\mathbb{N}$, $+\infty$ sinon.
- Si $\alpha\in\mathbb{N}$, alors pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}z^n=(1+z)^\alpha$
- Sinon, pour $x\in\,]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n=(1+x)^\alpha=e^{\alpha\ln(1+x)}$

Démonstration :

Si $\alpha\in\mathbb{N}$, alors pour $n\geq\alpha+1$, $\alpha...(\alpha-n+1)=0$, et la formule est donnée par celle du binôme de Newton.

Si $\alpha\notin\mathbb{N}$, d'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

Calcul de $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ pour $x\in\,]-1;1[$.

On considère $g(x)=f(x)(1+x)^{-\alpha}$. Alors g est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, et

$\forall x\in\,]-1;1[,\ g'(x)=(1+x)^{-\alpha-1}(f'(x)(1+x)-\alpha f(x))$

Or, pour $x\in\,]-1;1[$,

$$f'(x)(1+x)-\alpha f(x)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\right)(1+x)-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ où } a_n=\frac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\begin{aligned}f'(x)(1+x)-\alpha f(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\&=\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)a_{j+1}x^j+\sum_{j=1}^{+\infty}ja_jx^j-\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha a_jx^j\\&=\sum_{j=0}^{+\infty}\big((j+1)a_{j+1}+(j-\alpha)a_j\big)x^j\end{aligned}$$

Or, $\forall j \in \mathbb{N}, a_{j+1} = \dfrac{\alpha - j}{j+1}\alpha_j$. Donc $\forall x \in \left]-1;1\right[, g'(x) = 0$

Or, $g(0) = f(0) = 1$, donc $g = 1$ et $\forall x \in \left]-1;1\right[, f(x) = (1+x)^\alpha$.

B) Construction de nouvelles fonctions

Définition :

On définit les fonctions de la variable complexe suivantes :

$\exp, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \cos, \sin$ pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Toutes de rayon de convergence infini.

Lorsqu'elles sont définies, on peut aussi définir :

$\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ (pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\cos z \neq 0$)

$\mathrm{cotan}(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$, $\mathrm{th}(z) = \dfrac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)}$

Théorème :

(1) La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{C}$ et réalise un morphisme de groupe $(\mathbb{C},+)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$, surjectif de noyau $2i\pi.\mathbb{Z}$ où $\dfrac{\pi}{2}$ est la plus petite solution strictement positive de $\cos x = 0$

(2) Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$ est de classe C^∞ de dérivée $t \mapsto ae^{at}$.

De même, $\sin, \cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$…

(3) Les formules de trigonométrie sont aussi valables dans $\mathbb{C}$:

Pour $z \in \mathbb{C}$,

$\cos z = \mathrm{ch}(i.z)$, $\mathrm{ch}(z) = \cos(i.z)$

$\sin z = \dfrac{\mathrm{sh}(iz)}{i}$, $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{\sin(i.z)}{i}$

$\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2})$, $\sin(z) = \cos(z - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$…

Démonstration :

- La fonction exponentielle est somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc est définie et continue sur $\mathbb{C}$. Le théorème sur le produit de séries absolument convergentes donne :

$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Comme $e^0 = 1$, on a $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \in \mathbb{C}^*$ et $z \mapsto e^z$ est un morphisme de groupes.

La restriction de exponentielle à $\mathbb{R}$ est à valeurs réelles. De plus, on peut dériver terme à terme : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.

Par ailleurs, $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, ne contenant pas 0.

Comme $1 = \exp(0) \in \exp(\mathbb{R})$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.

Donc $\exp$ est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $\exp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\geq x^0+\frac{x^1}{1!}=1+x\to+\infty$.

Donc $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$

Donc $\mathbb{R}_+^*\subset\exp(\mathbb{C})$.

On cherche l'image de $i\mathbb{R}$ par $\exp$:

$\forall x\in\mathbb{R},\overline{\exp(ix)}=\overline{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n\frac{x^n}{n!}=\exp(-ix)$

Donc $|\exp(ix)|^2=\exp(ix)\times\exp(-ix)=1$.

Ainsi, $\exp(i\mathbb{R})\subset\mathbb{U}$ et contient 1.

Montrons que $-1\in\exp(i\mathbb{R})$

On pose pour $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\exp(i.t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}t^n$

Ainsi, on reconnaît $\mathrm{Re}(\varphi(t))=\cos t$.

$\cos(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, inclus dans $[-1;1]$

(Car $\forall t\in\mathbb{R},|\cos t|=|\mathrm{Re}(\varphi(t))|\leq|\varphi(t)|=1$)

Et contient 1 car $\cos 0=1$.

Si $\cos(\mathbb{R})$ contient un élément négatif ou nul, alors il existe t_1 tel que $\cos(t_1)=0$

Alors $\cos(2t_1)=\mathrm{Re}(\varphi(2t_1))=\mathrm{Re}(\varphi(t_1)^2)=\cos^2 t_1-\sin^2 t_1=-\sin^2 t_1=-1$

(Car $|\varphi(t_1)|=1$)

Et $\cos(\mathbb{R})$ contient effectivement un élément négatif, car sinon :

On pose $a=\inf(\cos\mathbb{R})\geq 0$

Il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $(\cos t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a en décroissant.

Alors pour tout n, $\cos(2t_n)=\cos^2(t_n)-\sin^2(t_n)=2\cos^2(t_n)-1$

Et par passage à la limite, $\cos(2t_n)\to 2a^2-1$.

Donc $2a^2-1\geq a$, soit $(a-1)(a+\frac{1}{2})\geq 0$

Ainsi, soit $a\geq 1$, soit $a\leq-\frac{1}{2}$. Comme a est positif, on a $a\geq 1$ et donc $\cos=1$ ce qui est faux car $\cos''(0)=-1$ (d'après le développement)

Donc $-1\in\exp(i\mathbb{R})$, et $-1\in\cos(\mathbb{R})$.

Donc $\cos(\mathbb{R})=[-1;1]$.

Pour tout $u=a+ib$ de module 1, il existe t_0 tel que $\cos(t_0)=a$, et alors $\sin t_0=\pm\sqrt{1-\cos^2 t_0}=\pm b$.

On a donc $e^{\pm it_0}=u$.

- Existence de $\frac{\pi}{2}$, plus petite racine positive de $\cos x=0$.

Déjà, la fonction cosinus est parie (d'après le développement)

Donc $X=\{a\geq 0,\cos a=0\}$ est un fermé non vide de $\mathbb{R}_+$ (car la fonction cos est paire)

Donc il admet une borne inférieure qui est en fait son minimum (car X est fermé)

D'où l'existence.

- Etude de $t \mapsto e^{iat} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n t^n}{n!}$ somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc de classe C^∞, dérivable terme à terme…
- Formules de trigonométrie :

Par exemple :

$\cos(2z) = 2\cos^2 z - 1$:

On a $\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = e^{iz}e^{-iz} = 1$

Puis

$$\cos 2z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = \frac{(e^{iz})^2 + (e^{-iz})^2}{2} = \frac{(\cos z + i\sin z)^2 + (\cos z - i\sin z)^2}{2}$$
$$= \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1$$

Application :

Domaine de définition de tangente :

On étudie l'équation $\begin{cases} \cos z = 0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$, c'est-à-dire $e^{iz} = -e^{-iz}$, ou encore $e^{2iz} = -1$

Or, $e^{i\pi} = -1$

En effet, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (définition), et $\cos\pi = 2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1 = -1$

Donc $\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{2i(z-\frac{\pi}{2})} = 1 \Leftrightarrow z - \frac{\pi}{2} \in \pi.\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc $\mathrm{Dom}_{\mathbb{C}} \tan = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi.\mathbb{Z}\right\}$

C) Prolongement de fonctions continues

1) Exemple de l'exponentielle réelle

On suppose connue la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En effet :

Par récurrence, $\exp$ est de classe C^∞.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n+1)!}\exp^{(n)}(t)dt\right| \leq \varepsilon(x)\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}e^t dt \quad (\varepsilon(x) = \operatorname{sgn} x)$$
$$\leq \varepsilon(x)\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}e^{|x|}dt$$
$$\leq \varepsilon(x)e^{|x|}\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x = \varepsilon(x)^{n+1}e^{|x|}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!}\exp^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

On peut prolonger cette fonction à $\mathbb{C}$, (car le rayon de convergence est infini), en posant $\forall z \in \mathbb{C}, \exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

2) Exponentielle matricielle

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on peut poser $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

3) Logarithme complexe (hors programme)

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < 1$, $\ln z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$

Remarque : on sait que $\forall x \in \left]0;2\right[, \ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$

Alors :

- $\ln$ est définie et de classe C^∞ sur $D_o(1,1)$.
- $\forall z \in D_o(1,1), \exp(\ln z) = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \left.\begin{matrix} |e^z - 1| < 1 \\ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln(e^z) = z$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \left.\begin{matrix} |z-1| < 1 \\ |z'-1| < 1 \\ |z'z-1| < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln zz' = \ln z + \ln z'$

Démonstration :

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Donc $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est défini et continue sur $D_o(0,1)$.

Donc $\ln$ est défini et continu sur $D_o(1,1)$

(2) $\exp(\ln z)$ est définie pour tout $z \in D_o(1,1)$.

On va montrer que $\forall z \in D_o(1,1), z\exp(-\ln z) = 1$

Lemme :

- Soit $u : [0;1] \to D_o(1,1)$ de classe C^1. Alors $t \mapsto \ln(u(t))$ est de classe C^1 de dérivée $\frac{u'}{u}$.
- Soit $v : [0;1] \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Alors $t \mapsto \exp(v(t))$ est de classe C^1 de dérivée $t \mapsto v'(t)e^{v(t)}$.

Démonstration du lemme :

On a $\ln(u(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{(u(t)-1)^{n+1}}{n+1}}_{\alpha_n(t)}$.

On applique le théorème de dérivation des séries :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, α_n est de classe C^1 et $\alpha'_n(t) = u'(t) \times (-1)^n (u(t)-1)^n$
- La série converge simplement en un point (même en tous)
- La série de terme général α'_n converge uniformément sur $[0;1]$.

En effet, elle converge normalement car si on note $M' = \|u'\|_\infty$, $M = \|u-1\|_\infty$, on a $M < 1$ et donc $\|\alpha'_n\|_\infty \leq M'M^n$, terme général d'une série convergente.

Ainsi :

$\ln \circ u$ est de classe C^1 et $(\ln \circ u)'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'(t)(1-u(t))^n = \frac{u'(t)}{1-(1-u(t))} = \frac{u'(t)}{u(t)}$

Maintenant :

Pour $z \in D_o(1,1)$ fixé, posons $u(t) = t.z + (1-t) \in [1, z]$ et $\varphi(t) = u(t) e^{-\ln(u(t))}$

Comme u est de classe C^1 à valeurs dans $D_o(1,1)$, φ est de classe C^1, et $\forall t \in [0;1], \varphi'(t) = e^{-\ln(u(t))}\left(u'(t) - \frac{u'(t)}{u(t)} u(t)\right) = 0$

Donc $\varphi = \varphi(0) = 1$

En particulier, $\varphi(1) = 1 = z e^{-\ln z}$.

(3) Si $|e^z - 1| < 1$ et $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$,

Tout d'abord, $e^{\ln(e^z)} = e^z$

Donc il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $\ln(e^z) = z + 2ik(z)\pi$.

k est continue car $k(z) = \frac{\ln(e^z) - z}{2i\pi}$.

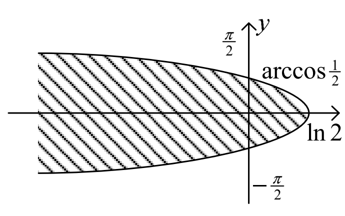
Etude du domaine $\{z \in \mathbb{C}, |e^z - 1| < 1 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\} = D$.

Soit $z = x + iy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors $|e^z - 1|^2 = (e^{x+iy} - 1)(e^{x-iy} - 1) = e^{2x} - 2\cos y . e^x + 1$

Donc $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, |y| < \frac{\pi}{2} \text{ et } e^x < 2\cos y\}$

D est convexe car c'est le sous–graphe de $y \mapsto \ln(2\cos y)$ qui est concave sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc D est connexe par arcs.



Donc k est continu sur D connexe par arcs à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Donc $k = k(0) = 0$.

(4) Soient u, v tels que $|u-1| < 1$, $|v-1| < 1$, $|uv-1| < 1$.

On a déjà $\exp(\ln u + \ln v) = \exp(\ln u)\exp(\ln v) = uv = \exp(\ln(uv))$

Donc $\ln(u)+\ln(v)=\ln(uv)+2ik(u,v)\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

On fixe $u=u_0$ tel que $|u_0-1|<1$. Alors $u_0\neq 1$.

On fait varier v dans le domaine $D(u_0)$ défini par $\begin{cases}|v-1|<1\\|u_0v-1|<1\end{cases}$, c'est-à-dire $\left|v-\frac{1}{u_0}\right|<\left|\frac{1}{u_0}\right|$.

$D(u_0)$ est une intersection de deux disques, donc est convexe, donc connexe par arcs.

De plus, il contient $v=1$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\begin{array}{l}D(u_0)\to\mathbb{Z}\\ v\mapsto k(u_0,v)\end{array}$, $k(u_0,v)=k(u_0,1)=0$.

V Application classique des séries entières

Résolution d'équations fonctionnelles (surtout différentielles) :

On cherche des solutions de l'équation $(E): x^2y''+4xy'+(2-x^2)y-1=0$

Analyse :

On cherche *f* dérivable en séries entières solution de *E* de rayon de convergence *R* non nul, disons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Alors *f* est de classe C^∞, dérivable terme à terme sur $]-R,R[$. Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}4na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}2a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}=1$$

Par unicité du développement en séries entières de rayon de convergence non nul, on a :

Pour $n=0$: $2a_0=1$, soit $a_0=\frac{1}{2}$.

Pour $n=1$: $4a_1+2a_1=0$, soit $a_1=0$

Pour $n\geq 2$: $n(n-1)a_n+4na_n+2a_n-a_{n-2}=0$, soit :

$a_n(n^2+3n+2)=a_n(n+1)(n+2)=a_{n-2}$

Si *n* est impair, $a_n=0$

Si *n* est pair,

$$a_{2p}=\frac{a_{2(p-1)}}{(2p+2)(2p+1)}=\frac{a_{2(p-2)}}{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)}=\ldots=\frac{a_0\times 2}{(2p+2)!}=\frac{1}{(2p+2)!}$$

Donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}=\begin{cases}\frac{1}{x^2}(\mathrm{ch}(x)-1) & \text{si } x\neq 0\\ 1/2 & \text{si } x=0\end{cases}$

Réciproquement, soit *f* défini par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$; alors *f* a un rayon de convergence infini (critère de d'Alembert), donc *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on vérifie que *f* est solution sur $\mathbb{R}$ de (*E*). (soit directement, soit avec les coefficients)