Chapitre 17 : Intégrales dépendant d'un paramètre

On va s'intéresser aux problèmes :

Du calcul de $\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt$

Et $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(t)dt$

Ou encore une étude de fonctions de la forme $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$, c'est-à-dire la continuité, dérivabilité…

Exemples :

La transformée de Fourier pour $f \in L_1(\mathbb{R})$: $\widetilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it.x} f(t)dt$

La transformée de Laplace de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ intégrable continue par morceaux :

$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s.t} f(t)dt$

I Préliminaire : fonction gamma

A) Définition

Théorème (hors programme dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$) :

Pour $s \in \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{-t}t^{s-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 0$.

On pose alors $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$ pour $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Equation fonctionnelle :

Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Démonstration :

(1) déjà, $f : t \mapsto e^{-t}t^{s-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Etude en 0 :

On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |t^{s-1}| = t^{\mathrm{Re}(s)-1}$

Donc f est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 0$

Etude en $+\infty$:

On a $\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$, donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

(2) Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, alors $\mathrm{Re}(s+1) > 0$ et pour $x > 0$, $0 < \varepsilon < x$ on a :

$\int_\varepsilon^x e^{-t}t^s dt = \left[-e^{-t}t^s\right]_\varepsilon^x + s\int_\varepsilon^x e^{-t}t^{s-1}dt$

Mais $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon}\varepsilon^s = 0$ car $\mathrm{Re}(s) > 0$, et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^s = 0$.

Donc $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!\Gamma(1)$

Et $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$

B) Exercice

Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

En effet :

Soient $x,y>0$, $u\in[0;1]$.

Alors pour tout $t>0$, on a :

$t^{ux+(1-u)y-1}=e^{(ux+(1-u)y-1)\ln t}\leq ue^{(x-1)\ln t}+(1-u)e^{(y-1)\ln t}$

Car $f:x\mapsto e^{(x-1)a}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ (puisque $f''\geq 0$)

Donc $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{ux+(1-u)y-1}dt\leq u\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt+(1-u)\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{y-1}dt$

C'est-à-dire $\Gamma(ux+(1-u)y)\leq u\Gamma(x)+(1-u)\Gamma(y)$

Remarque :

Γ est même logarithmiquement convexe, c'est-à-dire que $\ln\Gamma$ est convexe.

(C'est un résultat plus fort : on peut montrer que si une fonction est logarithmiquement convexe, alors elle est convexe)

En effet, il s'agit de montrer que

$\forall x,y>0,\forall u\in[0;1],\Gamma(ux+(1-u)y)\leq\Gamma(x)^u\Gamma(y)^{1-u}$

Ce qui découle de l'inégalité de Hölder : pour $u\in]0;1[$,

$$\int_0^{+\infty}\underbrace{(e^{-t}t^{x-1})^u}_{f(t)}\underbrace{(e^{-t}t^{y-1})^{1-u}}_{g(t)}dt\leq\|f\|_p\|g\|_q\leq\left(\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{y-1}dt\right)^{1/q}$$

Où $p=\dfrac{1}{u}>0$, $q=\dfrac{1}{1-u}>0$ et $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

Inégalité de Hölder :

Soient *f*, *g* deux fonctions définies sur *I* à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et soient *p* et *q* deux réels conjugués (c'est-à-dire strictement positifs et tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$). On suppose que f^p et g^q sont intégrables sur *I*. Alors $\int_I fg\leq\left(\int_I f^p\right)^{1/p}\left(\int_I g^q\right)^{1/q}$

Démonstration :

Lemme :

Pour $\alpha\in]0;1[$ et $u,v\in\mathbb{R}_+$, on a $u^\alpha v^{1-\alpha}\leq\alpha.u+(1-\alpha).v$

En effet, il suffit d'utiliser la concavité de ln.

Posons maintenant $F=\left(\int_I f^p\right)^{1/p}$ et $G=\left(\int_I g^q\right)^{1/q}$.

Si *F* ou *G* est nul, l'inégalité est claire (*f* et *g* sont positives). Sinon :

Posons $u=\left(\dfrac{f}{F}\right)^p$, $g=\left(\dfrac{g}{G}\right)^q$, et $\alpha=\dfrac{1}{p}$. On a alors $1-\alpha=\dfrac{1}{q}$, et en appliquant le lemme, on a pour tout $x\in I$: $\dfrac{f(x)g(x)}{FG}\leq\dfrac{1}{p}\dfrac{f(x)^p}{F^p}+\dfrac{1}{q}\dfrac{g(x)^q}{G^q}=\dfrac{1}{p}u(x)+\dfrac{1}{q}v(x)$

Mais *u* et *v* sont intégrables sur *I*, d'intégrale 1.

Donc en intégrant, on obtient $\frac{1}{FG}\int_I fg \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, d'où l'inégalité voulue.

Méthode de Laplace :
Problème :

Pour $I(x)=\int_a^b h(t)e^{xg(t)}dt$, on cherche un équivalent de $I(x)$ quand $x\to+\infty$

On a le théorème (Hors programme) :
Théorème de Laplace :

Soit $h:]0;a|\to\mathbb{C}$ continue intégrable telle que $h(t)\underset{t\to0}{\sim}C_1.t^\alpha$ (où $\alpha>-1$)

Et $g:[0;a|\to\mathbb{R}$ strictement décroissante continue et ayant en 0 un DL de la forme $g(t)=b-ct^\beta+o(t^\beta)$ où $b=g(0)$, $c>0$, $\beta>0$.

Alors $\int_0^a h(t)e^{xg(t)}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} C_1\int_0^{+\infty}t^\alpha e^{x(b-ct^\beta)}dt=\frac{C_1e^{xb}}{\beta}(cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$

(Pour le calcul, il suffit de faire le changement de variable $t=\left(\frac{u}{cx}\right)^{1/\beta}$)

II Suites et séries d'intégrales

A) Remarque sur la nature des théorèmes

Problème :

On doit étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt$.

On va voir pour cela deux théorèmes :

- Ce sont des conditions suffisantes (pas nécessaires)
- Les hypothèses sont de deux types :

Régularité (toutes les fonctions seront au moins continues par morceaux)

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

Et il y aura un contrôle de convergence.

B) Rappel : cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux où $\forall n\in\mathbb{N}, f_n:[a,b]\to\mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ elle-même continue par morceaux.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b g$

Ici, le contrôle de convergence est « convergence uniforme sur un segment ».
Démonstration :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\int_a^b f_n-\int_a^b g\right|\leq\int_a^b\|f_n-g\|_\infty dt=(b-a)\|f_n-g\|_\infty\to0$

Remarque :

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions continues par morceaux converge vers g, alors g est continue en tout point où tous les f_n sont continues. Donc g est continue sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable, donc pas forcément continue elle-même.

Corollaire :

Enoncé analogue pour les séries.

Exercice :

Calculer, pour $|x|<1$ et $n\in\mathbb{N}$, $I_n(x)=\int_0^\pi \frac{\cos n.t}{1-x\cos t}dt$

Méthode 1 :

On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\cos((n+1)t)+\cos((n-1)t)=2\cos n.t\cos t$

Donc $I_{n+1}(x)+I_{n-1}(x)=\int_0^\pi \frac{2\cos n.t\cos t}{1-x\cos t}dt$

Soit $xI_{n+1}(x)-I_{n-1}(x)=\underbrace{\int_0^\pi \frac{2\cos n.t(x\cos t-1)}{1-x\cos t}dt}_{=0}+2I_n(x)$

On a donc une récurrence linéaire…

Méthode 2 :

$$\frac{1}{1-x\cos t}=\frac{2e^{it}}{2e^{it}-x(e^{2it}+1)}=F(e^{it}) \text{ où } F=\frac{2X}{2X-x(X^2+1)}$$

Décomposition en éléments simples :

$F(z)=\frac{\alpha}{z-r_1}+\frac{\beta}{z-r_2}$ avec $r_1r_2=1$. On peut supposer $|r_1|>1$ et $|r_2|<1$.

$$F(e^{it})=-\frac{\alpha}{r_1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i.nt}}{r_1^n}\right)+\frac{\beta}{e^{it}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}r_2^n e^{-i.nt}\right)$$

On a donc deux séries normalement convergentes, et on peut intégrer terme à terme sur le segment $[0;2\pi]$

C) Théorème de convergence dominée

Théorème (admis) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, quelconque, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $g:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

On suppose :

- Que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers g.
- La convergence est dominée, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi:I\to\mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable telle que $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in I,|f_n(t)|\leq\varphi(t)$.

Alors les f_n et g sont intégrables, et $\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n=\int_I g$

Remarque :

Le caractère intégrable des f_n et de g découle de la domination :

Pour les f_n, le résultat est clair. Pour g, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ donc par passage à la limite simple $\forall t \in I, |g(t)| \leq \varphi(t)$ d'où le résultat.

Exercice :

On suppose ici que $I = \mathbb{R}$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers g et que les autres hypothèses du théorème sont satisfaites.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I g$.

En effet :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} \varphi(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{6}$ et $\int_{-\infty}^{-A} \varphi(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{6}$ car φ est intégrable.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f_n - \int_{\mathbb{R}} g\right| &= \left|\int_{-\infty}^{-A} f_n - g + \int_{-A}^{A} f_n - g + \int_{A}^{+\infty} f_n - g\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{-A} 2\varphi + 2A\|(f_n - g)_{/[-a,a]}\|_\infty + \int_A^{+\infty} 2\varphi \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + 2A\|(f_n - g)_{/[-a,a]}\|_\infty\end{aligned}$$

Par convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g sur $[-A, A]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 2A\|(f_n - g)_{/[-a,a]}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Et donc $\forall n \geq N, \left|\int_{\mathbb{R}} f_n - \int_{\mathbb{R}} g\right| \leq \varepsilon$

D) Exercice : formule de Gauss pour la fonction gamma

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ pour $\mathrm{Re}(x) > 0$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x.(x+1)...(x+n)} = \Gamma(x)$ (formule de Gauss),

Et la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Soit $x \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive.

On pose $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

En faisant le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ (pour $n \geq 1$), on a :

$I_n = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

Pour $n \geq 1$, on a :

$$I_n = n^x \left(\left[(1-u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1 + n\int_0^1 (1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du \right)$$

$$= n^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du$$

$$= ... = n^x \frac{n...1}{x(x+1)...(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du = n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

Maintenant :

On pose $I =]0;+\infty[$, et pour $n \geq 1$, $t \in I$: $f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } 0 < t \leq n \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$

Soit alors $t \in I$. Alors pour tout $n > t$, on a

$$f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} t^{x-1} = e^{n\left(-\frac{t}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} t^{x-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(t) = e^{-t} t^{x-1}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers *g* sur *I*.

De plus, les f_n et *g* sont de classe C^∞ sur *I*.

Condition de domination :

$$|f_n(t)| = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} t^{\mathrm{Re}(x)-1} \leq e^{-t} t^{\mathrm{Re}(x-1)} = \varphi(t)$$

(Inégalité de convexité de ln : $\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$)

Comme φ est continue par morceaux, intégrable sur *I* (par définition de Γ) car $\mathrm{Re}(x) > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \Gamma(x)$.

Pour le calcul de $\Gamma(1/2)$:

On a $\Gamma(1/2) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}.n!}{\underbrace{\frac{1}{2}.(1+\frac{1}{2})...(n+\frac{1}{2})}_{\alpha_n}}$

Mais

$$\alpha_n = \frac{2^{n+1}\sqrt{n}.n!}{1\times 3\times ...\times(2n+1)} = \frac{2^n n! 2^{n+1}\sqrt{n}.n!}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)(2n)!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1} 2\pi.n\left(\frac{n^n}{e^n}\right)^2 \sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{4\pi.n}\,\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}} = \frac{2n}{2n+1}\sqrt{\pi}$$

Donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Application :

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ (intégrale de Gauss)

Déjà, la fonction est intégrable.

On a de plus $I = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma(1/2)$

E) Remarque : peut-on montrer qu'une limite simple n'est pas intégrable ?

Si on peut appliquer le théorème de convergence dominée à une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite simple *g*, alors *g* est intégrable.

Idée :

Théorème de la convergence monotone (Hors programme) :

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles converge simplement sur *I* vers *g*, avec $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in I, 0\leq f_n(t)\leq g(t)$.

On suppose de plus que les f_n et *g* sont continus par morceaux sur *I* et que les f_n sont intégrables.

On a deux cas :

- Soit la suite réelle $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Alors *g* est intégrable et $\int_I g = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n$

- Soit $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée ; alors *g* n'est pas intégrable et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n = +\infty$.

Autrement dit, si *g* est intégrable, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I g$ et sinon $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n = +\infty$.

Démonstration :

Si *g* est intégrable, on applique le théorème de convergence dominée avec $\varphi = g$

Sinon, pour tout $A>0$, il existe $[u,v]\subset I$ tel que $\int_u^v g > A$

On applique le théorème de convergence dominée à $(f_{n/[u,v]})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers *g* sur $[u,v]$ avec la domination $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[u,v], |f_n(t)|\leq g(t)$

(g est intégrable sur $[u,v]$)

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_u^v f_n = \int_u^v g > A$.

Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N, \int_I f_n \geq \int_u^v f_n > A$

Ce qui montre le résultat voulu.

F) Théorème d'intégration terme à terme des séries

Théorème (admis) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $u_n : I\to\mathbb{C}$.

On suppose que :

- Les u_n sont continus par morceaux et intégrables sur *I*.
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers $g : I\to\mathbb{C}$
- *g* est continue par morceaux.
- La série de terme général $\int_I |u_n|$ est convergente.

Alors *g* est intégrable, et :

$$\int_I g = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n,\quad \left|\int_I g\right| \leq \int_I |g| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |u_n|.$$

Remarques :

- Ce n'est qu'une condition suffisante pour que g soit intégrable.
- Lorsque le théorème s'applique, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |u_n|$ est absolument convergente.

Exercice :

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles positives et continues par morceaux, telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = g$. Alors g est intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n$ converge et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n = \int_I g$.

En effet : il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone à $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

III Etude des fonctions de la forme $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$

A) Continuité

Théorème :

Soit A une partie d'un evn E (ou A un espace métrique), I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère une application $\begin{array}{l} f : A\times I \to \mathbb{C} \\ \quad (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$.

On suppose que :

- Pour tout $t\in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue en x_0 (resp. sur A)
- Pour tout $x\in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux.
- Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que $\forall (x,t)\in A\times I, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$, domination uniforme en x.

Alors $F : x\in A \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie sur A et continue en x_0 (resp. A)

Amélioration (au programme !) :

Avec les notations précédentes, on suppose que

- Pour tout $t\in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
- Pour tout $x\in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux.
- Pour tout compact $K\subset A$, il existe $\varphi_k : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable telle que $\forall (x,t)\in K\times I, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$

Alors F est définie et continue sur A.

Démonstration :

Continuité en x_0.

F est définie pour tout $x\in A$ car $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux dominée par φ intégrable.

Pour montrer que F est continue en x_0, on va montrer que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0$, on a $\lim_{n\to+\infty} F(y_n) = F(x_0)$.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers x_0.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = f(y_n, t)$ et $g(t) = f(x_0, t)$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

- Les f_n sont continues par morceaux
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g car $x \mapsto f(x,t)$ est continue en x_0
- Domination par φ.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I g(t)dt$

C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} F(y_n) = F(x_0)$

Pour l'amélioration :

$F(x)$ est défini pour tout x car $K = \{x\}$ est compact donc il existe $\varphi_K : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que $\forall t \in I, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable.

Continuité :

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers x.

Alors $K = \{y_n, n \geq 0\} \cup \{x\}$ est un compact de A (en dimension finie, c'est parce que c'est un fermé borné, sinon c'est la propriété de Borel–Lebesgue)

Donc il existe $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive et intégrable telle que $\forall z \in K, \forall t \in I, |f(z,t)| \leq \varphi_K(t)$

La fin de la démonstration est la même.

Complément :

Cas d'une fonction globalement continue et d'un segment :

Soit $I = [a,b]$ un segment, et $f : A \times [a,b] \to \mathbb{C}$ globalement continue.

Alors $F : x \in A \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est continue.

Attention :

Il faut bien différencier continuité partielle et globale :

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est partiellement continue, alors pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ tendant vers $A \in \mathbb{R}^2$ en restant sur une verticale/horizontale, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(A)$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est globalement continue, alors pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ tendant vers $A \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(A)$.

Démonstration du complément :

Pour tout compact $K \subset A$, $f : K \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue sur un compact donc bornée.

Soit C_K tel que $\forall (x,t) \in K \times [a,b], |f(x,t)| \leq C_K$

Comme la fonction $t \mapsto C_K$ est intégrable sur $[a,b]$, le théorème s'applique et F est continue sur A.

B) Caractère C^1 de $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$.

Théorème :
Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :
(1) Pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux intégrable sur I.
(2) $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $A \times I$, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t.
(3) Il existe $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable telle que $\forall (x,t) \in A \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_1(t)$ (domination uniforme en x).

Alors $F : x \in A \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie et de classe C^1 sur A, et

$\forall x \in A, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ (Formule de Leibniz)

Généralisation (au programme) :
On peut remplacer (3) par :
Pour tout compact $K \subset A$, il existe $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux positive et intégrable telle que $\forall (x,t) \in K \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)$

Démonstration :
L'hypothèse (1) montre déjà que F est défini sur A.
Soit $x_0 \in A$. On va montrer que $\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^*$ tendant vers 0, et posons

$$g_n(t) = \frac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}$$

Alors les g_n sont continues par morceaux car $t \mapsto f(x_0,t)$ l'est.

Et de plus $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers $h : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \mapsto f(x,t)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |g_n(t)| \leq \sup_{u \in [x_0, x_0+h_n]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\right|$$

Or, $\forall u \in A, \forall t \in I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\right| \leq \varphi_1(t)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |g_n(t)| \leq \varphi_1(t)$

Comme φ_1 est intégrable, la condition de domination est vérifiée, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I g_n(t)dt = \int_I h(t)dt$$

Conclusion :

F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$

Comme de plus F' est continue, F est de classe C^1.

C) Caractère C^k de $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$.

Théorème (hors programme) :
Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : A\times I \to \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
On suppose que :

- Pour tout $j\in\mathbb{N}$ tel que $j \le k$, f admet une dérivée $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ sur $A\times I$.
- Pour ces valeurs de j, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ est continue par rapport à x, continue par morceaux par rapport à t.
- Pour tout compact $K\subset A$ et tout entier $j\le k$, il existe $\varphi_{K,j} : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable telle que $\forall (x,t)\in K\times I, \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \le \varphi_{K,j}(t)$

Alors $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe C^k, dérivable k fois sous l'intégrale.

Démonstration :
Si $k\in\mathbb{N}$, on fait par récurrence.
Sinon, $C^\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k$.

D) Interversion des intégrations

Théorème : formule de Fubini :
Soient $[a,b]$, $[c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$, et $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$ continue.
Alors les intégrales suivantes ont un sens et :

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Où $x\mapsto \int_c^d f(x,y)dy$ et $y\mapsto\int_a^b f(x,y)dx$ sont continues.

Démonstration :

Posons pour $x\in[a,b]$, $\varphi(x)=\int_c^d\left(\int_a^x f(s,y)ds\right)dy$

Calcul de φ' :
On pose

$$\alpha : \begin{array}{l}[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}\\ (x,y)\mapsto\int_a^x f(s,y)ds\end{array}$$

On va montrer que le théorème sur le caractère C^1 de $x\mapsto\int_c^d \alpha(x,y)dy$ est vérifié.

Déjà, à x fixé, $y\mapsto\alpha(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable.

En effet :

$s \mapsto f(s,y)$ est continue, et on a la majoration uniforme

$\forall s \in [a,x], \forall y \in [c,d], |f(s,y)| \leq \|f\|_\infty$

Et $s \mapsto \|f\|_\infty$ est intégrable sur $[a,x]$. Donc $y \mapsto \alpha(x,y)$ est continue.

Enfin, $y \mapsto \alpha(x,y)$ est intégrable car

$\forall (x,y) \in [a,b]\times[c,d], |\alpha(x,y)| \leq |x-a|\|f\|_\infty \leq (b-a)\|f\|_\infty$

De plus, α est dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$

Et cette fonction est continue par morceaux par rapport à y, continue par rapport à x car f est globalement continue.

Elle est de plus dominée par une constante, qui est intégrable.

Donc φ est dérivable, et $\forall x \in [a,b], \varphi'(x) = \int_c^d \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y)dy = \int_c^d f(x,y)dy$

Ainsi, $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(s)ds = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$.

E) Exemples et applications

- Fonction Γ :

Théorème :

Γ est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ et on a $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \varphi^k(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k t.e^{-t}t^{x-1}dt$

Démonstration :

On pose $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$ pour $x,t > 0$.

A t strictement positif fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln^k t.e^{-t}t^{x-1}$

Pour tout segment $[a,b] \subset]0;+\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0;+\infty[, \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \begin{cases} \ln^k t.e^{-t}.t^{b-1} \text{ si } t \geq 1 \\ |\ln^k t|.e^{-t}.t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \end{cases}$

On pose alors $\varphi_{[a,b],k} = \begin{cases} \ln^k t.e^{-t}.t^{b-1} \text{ si } t \geq 1 \\ |\ln^k t|.e^{-t}.t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \end{cases}$

$\varphi_{[a,b],k}$ est bien continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$.

En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi_{[a,b],k}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{b+1}\ln^k t.e^{-t} = 0$, donc $\varphi_{[a,b],k}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. Et $\lim\limits_{t\to 0} t^{(1-a/2)}\varphi_{[a,b],k}(t) = 0$ car $a > 0$. Donc $\varphi_{[a,b],k}$ est intégrable sur $]0;1]$ et donc sur $]0;+\infty[$.

On en déduit que Γ est de classe C^∞ sur tout intervalle $[a,b] \subset]0;+\infty[$ donc sur $]0;+\infty[$, et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln^k t.t^{x-1}dt$

Remarque :

On a $\Gamma'' > 0$ donc Γ est convexe !

- Cas des intégrales $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$.

(1) Cas particulier :

Si $F : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(t)dt$. Si φ est continue, on prend ϕ une primitive de φ, et alors $F(x) = \phi(\beta(x)) - \phi(\alpha(x))$.

Donc si φ est continue sur l'intervalle $A \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta : I \to A$ sont de classe C^1, alors *F* est de classe C^1 et $F'(x) = (\beta' \varphi \circ \beta - \alpha' \varphi \circ \alpha)(x)$

(2) Reste intégral de Taylor :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1}. Pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)dt$$

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue.

Alors $G : x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} g(t)dt$ est de classe C^{n+1} et $G^{(n+1)} = g$.

En effet, soit *f* une primitive d'ordre $n+1$ de *g*, c'est-à-dire telle que $f^{(n+1)} = g$. Ainsi, *f* est de classe C^{n+1}.

On applique la formule de Taylor à *f* :

$$G(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Donc comme f est de classe C^{n+1} et $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ aussi (c'est un polynôme), *G* est de classe C^{n+1} et $G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) = g$

Remarque :

G est l'unique primitive d'ordre $n+1$ de *g* telle que $G(a) = ... = G^{(n)}(a) = 0$

(3) Cas général :

On a $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt = (\beta(x) - \alpha(x)) \int_0^1 f(x, u\beta(x) + (1-u)\alpha(x))du$

Et on peut appliquer les théorèmes à $x \mapsto \int_0^1 f(x, u\beta(x) + (1-u)\alpha(x))du$

- Convolution périodique :

On note *C* l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques.

On note *E* l'ensemble des fonctions continues par morceaux 2π périodiques.

Ainsi, on a déjà $C \subset E$.

Pour $f, g \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$

$f * g$ s'appelle la convolée de *f* et *g*.

Proposition :

(1) Pour $f, g \in E$, $f * g = g * f$ et $f * g \in C$.

(2) La loi $*$ est associative dans *C* (et même dans *E*)

(3) Si $f \in E$ est de classe C^k, $g \in E$ de classe C^l, alors $f * g$ est de classe C^{k+l} et $(f * g)^{(k+l)} = f^{(k)} * g^{(l)}$.

(4) $(C, +, ., *)$ est une algèbre non unitaire.

Démonstration :

Pour $f, g \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(g * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} g(u)f(x-u)du = (f * g)(x)$$

(Car $u \mapsto g(u)f(x-u)$ est 2π périodique, donc

$\int_{x-2\pi}^{x} g(u)f(x-u)du = \int_0^{2\pi} g(u)f(x-u)du$)

Et $f * g$ est 2π périodique car fg l'est.

Continuité :

Si f est partout continue, on pose alors $\alpha : \begin{array}{l}\mathbb{R}\times[0;2\pi]\to\mathbb{C}\\ (x,t)\mapsto f(x-t)g(t)\end{array}$.

Comme f est continue, $x \mapsto \alpha(x,t)$ l'est aussi pour tout $t \in [0;2\pi]$.

De plus, f et g sont 2π périodiques donc bornées sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0;2\pi], |\alpha(x,t)| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, continue par morceaux et intégrable.

Donc le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique et $f * g \in C$.

Cas général :

Comme f est continue par morceaux, il existe une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}|f_n - f| = 0$.

Alors la suite de fonctions continues $f_n * g$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f * g$. En effet,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, |(f * g)(x) - (f_n * g)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)||f_n(x-t) - f(x-t)|dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\|g\|_\infty \|f - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Donc $f * g$ est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

Associativité dans C :

Soient $f, g, h \in C$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f * g)(x)h(x-t)dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)ds\right)h(x-t)dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)h(x-t)ds\right)dt\end{aligned}$$

A x fixé, $(s,t) \mapsto f(s)g(t-s)h(x-t)$ est continue, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)h(x-t)dt\right)ds \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} f(s)\left(\int_0^{2\pi} g(t-s)h(x-t)dt\right)ds \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} f(s)\left(\int_{-s}^{2\pi-s} g(u)h(x-s-u)du\right)ds\end{aligned}$$

$$((f*g)*h)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)(g*h)(x-s)ds$$
$$=(f*(g*h))(x)$$

Remarque :

L'application $\begin{array}{c}(E,\|\ \|_\infty)\times(E,\|\ \|_1)\to(C,\|\ \|_\infty)\\ (f,g)\mapsto f*g\end{array}$ est continue bilinéaire :

$$\forall x\in\mathbb{R},|(f*g)(x)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|_\infty|g(x-t)|dt\leq\frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty\int_0^{2\pi} g(u)du\leq\frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty\|g\|_1$$

Donc $\|f*g\|_\infty\leq\frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty\|g\|_1$

Application :

Soient $f,g\in C,h\in E$. Alors il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de C telle que $\|h-h_n\|_1\to 0$.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f,g,h_n\in C$, on a $\forall n\in\mathbb{N},(f*g)*h_n=f*(g*h_n)$

Donc par continuité de $*$, $(f*g)*h=f*(g*h)$

Dérivabilité :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe C^1 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue, toutes deux 2π périodiques.

Alors $f*g$ est de classe C^1 :

On a $\forall x\in\mathbb{R},(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$

Mais on a aussi $\forall x\in\mathbb{R},(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$ (car $f*g=g*f$)

Soit $h:\begin{array}{l}\mathbb{R}\times[0;2\pi]\to\mathbb{C}\\ (x,t)\mapsto f(x-t)g(t)\end{array}$.

Alors h est continue donc intégrable par rapport à t sur $[0;2\pi]$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

De plus, h est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}\times[0;2\pi]$ avec :

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;2\pi],\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=f'(x-t)g(t)$$

De plus, $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue donc partiellement continue, et

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;2\pi],\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leq\|f'\|_\infty\|g\|_\infty$, et $t\mapsto\|f'\|_\infty\|g\|_\infty$ est continue par morceaux intégrable sur $[0;2\pi]$.

Donc $f*g$ est de classe C^1 de dérivée $f'*g$.

On montre ensuite le cas général par récurrence.

Montrons que $*$ n'a pas d'élément neutre (ni dans C ni dans E)

Supposons que $\delta\in E$ soit neutre pour $*$, c'est-à-dire que $\forall f\in E,\delta*f=f*\delta=f$

Pour $n\in\mathbb{Z}$, on pose $f:t\mapsto e^{in.t}$ (ainsi, $f\in C\subset E$).

On a alors $(f*\delta)(x)=(\delta*f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)e^{in(x-t)}dt=c_n(\delta)e^{inx}$

Donc $\forall n\in\mathbb{Z},c_n(\delta)=1$, ce qui est impossible car le lemme de Riemann–Lebesgue indique que $\lim_{n\to+\infty}c_n(\delta)=0$.

- Le lemme de Riemann–Lebesgue reste encore valable pour un intervalle :

Soit $f: I \to \mathbb{C}$, intégrable sur l'intervalle *I*. Alors $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_I f(t)e^{i\lambda.t}dt = 0$

En effet :

Soit $K_n = [a_n, b_n]$ une suite exhaustive de segments de $I = |a, b|$ (c'est-à-dire croissante au sens de l'inclusion et telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = I$)

On note $F: \lambda \mapsto \int_I f(t)e^{i\lambda.t}dt$, définie sur $\mathbb{R}$.

Et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n: \lambda \mapsto \int_{K_n} f(t)e^{i\lambda.t}dt$.

Alors :

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers *F*.

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\left|I_n(\lambda) - \int_I f(t)e^{i\lambda.t}dt\right| = \left|\int_{b_n}^{b} f(t)e^{i\lambda.t}dt + \int_a^{a_n} f(t)e^{i\lambda.t}dt\right|$

Mais $\left|\int_{b_n}^{b} f(t)e^{i\lambda.t}dt\right| \leq \int_{b_n}^{b} |f(t)|dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \int_{b_n}^{b} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Et de même il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', \int_a^{a_n} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc en notant $n_0 \geq \max(N, N')$, on a pour tout $n \geq n_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\left|I_n(\lambda) - \int_I f(t)e^{i\lambda.t}dt\right| \leq \varepsilon$

C'est-à-dire $\|I_n - F\|_\infty \leq \varepsilon$.

D'où déjà la convergence uniforme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a de plus $\lim_{\lambda\to\pm\infty} f_n(\lambda) = 0$.

Donc $\lim_{\lambda\to\pm\infty} F(\lambda)$ existe et vaut 0.

Donc $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_I f(t)e^{i\lambda.t}dt = 0$.

- Théorème de d'Alembert–Gauss :

Théorème :

Tout polynôme complexe de degré au moins 1 admet au moins une racine.

Ou encore : tout polynôme complexe est scindé sur $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Démonstration :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p \geq 1$.

On suppose que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$

On pose alors, pour $r \in \mathbb{R}$, $\varphi(r) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{P(re^{it})}$.

Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $h: \begin{array}{l} \mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{C} \\ (r,t) \mapsto \dfrac{1}{P(re^{it})} \end{array}$.

Alors h est définie et continue car P l'est et ne s'annule pas.
De plus, h est dérivable par rapport à r et on a :

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi], \frac{\partial h}{\partial r}(r,t) = \frac{-P'(re^{it})}{P(re^{it})^2} \times e^{it}$$

Donc $\frac{\partial h}{\partial r}$ est globalement, donc partiellement continue sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$.

Pour tout segment $[A,B]$ de $\mathbb{R}$, $\frac{\partial h}{\partial r}$ est continue sur le compact $[A,B] \times [0,2\pi]$ donc bornée.

Soit alors M tel que $\forall (r,t) \in [A,B] \times [0,\pi], \left| \frac{\partial h}{\partial r}(r,t) \right| \leq M$

Alors $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0,\pi]$.

Ainsi, φ est de classe C^1 et $\forall r \in \mathbb{R}, \varphi'(r) = -\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} P'(re^{it})}{P(re^{it})^2} dt$

Calcul de φ' :

$$\forall r \in \mathbb{R}, r\varphi'(r) = i\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} P'(re^{it})}{P(re^{it})^2} dt = -i\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P(re^{it})} \right) dt = -i\left[\frac{1}{P(re^{it})} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Donc $\varphi' = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc sur $\mathbb{R}$ par continuité.

Donc $\varphi = \text{cte} = \varphi(0) = \frac{2\pi}{P(0)}$

Mais on a $\lim_{r \to +\infty} \varphi(r) = 0$

En effet, si on note $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0$, on a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|P(z)| \geq |z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k$$

Alors $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, \left| P(re^{it}) \right| \geq r^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| r^k$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall r > A, \forall t \in [0,2\pi], \left| \frac{1}{P(re^{it})} \right| \leq \varepsilon$

Donc $\forall r > A, |\varphi(r)| \leq 2\pi.\varepsilon$

Donc $\lim_{r \to +\infty} \varphi(r) = 0$, ce qui est impossible.

Remarque :

Pour éviter l'utilisation de dérivation complexe dans le calcul de $\frac{\partial}{\partial r}\left(P(re^{it})\right)$ et $\frac{\partial}{\partial t}\left(P(re^{it})\right)$, il suffit d'utiliser la linéarité et le fait que $\frac{\partial}{\partial r}\left((re^{it})^n\right) = nr^{n-1}e^{in.t}$ et $\frac{\partial}{\partial t}\left((re^{it})^n\right) = inr^n e^{in.t}$.

Autre démonstration : topologique.
Soit P de degré ≥ 1 ne s'annulant pas.

On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k$.

Donc $\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty$

Il existe alors $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}, |P(z)|\geq|P(z_0)|$.

En effet :

On pose $A=|P(0)|+1$

Il existe alors R tel que $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\geq R\Rightarrow|P(z)|\geq A$

Par ailleurs, P est continu sur le compact $D_f(0,R)$ donc il existe $z_0\in D_f(0,R)$ tel que $\forall z\in D_f(0,R), |P(z)|\geq|P(z_0)|$

Mais $0\in D_f(0,R)$, donc $|P(0)|\geq|P(z_0)|$

Mais $\forall z\in\mathbb{C}\setminus D_f(0,R), |P(z)|\geq A\geq|P(0)|$

Donc $\forall z\in\mathbb{C}, |P(z)|\geq|P(z_0)|$

En remplaçant X par $X-z_0$, on peut supposer que $z_0=0$.

Soit $k\geq 1$ minimal tel que $a_k\neq 0$.

On a $P(z)=a_0+a_kz^k+\dots$ (et $a_0=P(0)$)

On pose alors $z=\rho e^{i\theta}$

On a ainsi $a_0+a_kz^k=a_0+\rho^k a_k e^{ik\theta}$

On choisit $\theta=\theta_0$ tel que $\operatorname{Arg}(a_k e^{ik\theta_0})=\pi+\operatorname{Arg}(a_0)\ [2\pi]$

Lorsque $\rho\to 0$,

$$\begin{aligned}|P(z)|^2&=\left|a_0+\rho^k a_k e^{ik\theta_0}+O(\rho^{k+1})\right|^2\\&=|a_0|^2+2\operatorname{Re}(a_0\rho^k\bar{a}_k e^{-ik\theta_0})+O(\rho^{k+1})\end{aligned}$$

Or, $a_0\bar{a}_k e^{-ik\theta_0}=\lambda\in\mathbb{R}_-^*$ par définition de θ_0.

Donc $|P(z)|^2=|a_0|^2+2\lambda\rho^k+O(\rho^{k+1})\leq|a_0|^2$ pour ρ assez petit car $\lambda<0$, ce qui est impossible.

- Théorème de division des fonctions C^k.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f: I\to\mathbb{C}$ de classe C^k ($k\geq 1$), et $a\in I$

On pose alors $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x\neq a\\ f'(a) \text{ si } x=a\end{cases}$

Alors g est de classe C^{k-1}.

Exemple :

$f: x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} \text{ si } x\in\left]-\pi,\pi\right[\setminus\{0\}\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\left]-\pi,\pi\right[$.

En effet :

Avec la série entière, on a pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

Donc $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (la série a un rayon de convergence infini) et prolonge $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Or, $\forall x \in \left]-\pi,\pi\right[, g(x) \neq 0$

Donc $f = \dfrac{1}{g}$ est de classe C^∞ sur $\left]-\pi,\pi\right[$.

Ou, en utilisant le théorème :

$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ d'après le théorème de division, et comme elle ne s'annule pas sur $\left]-\pi,\pi\right[$, $f = \dfrac{1}{g}$ est de classe C^∞ sur $\left]-\pi,\pi\right[$.

Démonstration du théorème :

Astuce : pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :

$g(x) = \dfrac{1}{x-a}\int_a^x f'(t)dt = \int_0^1 f'(ux+(1-u)a)du$, formule encore valable pour $x = a$.

Posons $h : \begin{array}{l} I \times [0,1] \to \mathbb{C} \\ (x,u) \mapsto f'(ux+(1-u)a) \end{array}$

Comme *f* est de classe C^k, *h* admet des dérivées selon *x* jusqu'à l'ordre $k-1$, et pour tout $j \leq k-1$, $\dfrac{\partial^j h}{\partial x^j}(x,u) = u^j f^{(j+1)}(ux+(1-u)a)$.

De plus, pour $j \leq k-1$ et tout compact $A \subset I$, $\dfrac{\partial^j h}{\partial x^j}$ est continue sur le compact $A \times [0,1]$ donc bornée.

Si on pose $M_{j,A} = \sup_{A\times[0,1]} \left| \dfrac{\partial^j h}{\partial x^j}(x,u) \right|$, la fonction $u \mapsto M_{j,A}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Donc le théorème sur le caractère C^{k-1} des intégrales à paramètres s'applique, et donc *g* est de classe C^{k-1} (dérivable $k-1$ fois sous le signe intégral)

- Utilisation du calcul différentiel pour l'étude de $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$

On a déjà vu l'utilisation du changement de variables :

$H(x) = (v(x)-u(x))\int_0^1 f(x,t.v(x)+(1-t)u(x))dt$, mais le calcul est compliqué…

Autre méthode :

On pose $F(u,v,x) = \int_u^v f(x,t)dt$ (pour *u*, *v* sur un domaine correct…)

Ainsi, $H(x) = F(u(x),v(x),x)$.

Si *F* est de classe C^1 (c'est-à-dire continue et admet des dérivées partielles elles mêmes continues par rapport à chacun des termes), alors *H* est de classe C^1 (en tant que fonction d'une variable), et :

$$H'(x) = u'(x)\frac{\partial F}{\partial u}(u(x),v(x),x) + v'(x)\frac{\partial F}{\partial v}(u(x),v(x),x) + \frac{\partial F}{\partial x}(u(x),v(x),x)$$

Ainsi :

Soit $\begin{array}{l} f : I\times J \to \mathbb{C} \\ (x,t)\mapsto f(x,t)\end{array}$ de classe C^1 (c'est-à-dire que f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existent et sont globalement continues), $u,v : I \to \mathbb{C}$ tous deux de classe C^1.

On pose $\begin{array}{l} F : J\times J\times I \to \mathbb{C} \\ (u,v,x)\mapsto \int_u^v f(x,t)dt\end{array}$ et pour $x\in I, H(x) = F(u(x),v(x),x)$.

Alors F est de classe C^1, H aussi et :

$$\forall x\in I, H'(x) = v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Démonstration :

On a déjà $\forall (u,v,x)\in J\times J\times I, F(u,v,x) = (v-u)\int_0^1 f(x,sv+(1-x)u)ds$

L'application $(x,u,v,s)\in I\times J\times J\times[0,1]\mapsto f(x,sv+(1-s)u)$ est continue et comme on est sur un segment (on a domination sur tout compact de $I\times J\times J$ par une fonction constante, donc continue et intégrable sur $[0;1]$...),

$(x,u,v)\mapsto \int_0^1 f(x,sv+(1-s)u)ds$ est continue.

Dérivée selon u : on fixe x, v.

La fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc l'application $u\mapsto \int_u^v f(x,t)dt$ est de classe C^1 (c'est une primitive de $-f$), de dérivée en u $-f(x,u)$.

Donc $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ existe, est continue, et $\forall (u,v,x)\in J\times J\times I, \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v,x) = -f(x,u)$

De même selon v, $\forall (u,v,x)\in J\times J\times I, \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v,x) = f(x,v)$

Selon x : on fixe u, v.

$(x,t)\mapsto f(x,t)$ est continue, admet une dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ elle-même continue.

Donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(u,v,x)$ existe et vaut $\int_u^v \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Et de même qu'au début de la démonstration, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $J\times J\times I$.

IV Intégrales doubles sur $I\times I'$ de fonctions continues

A) Intégrabilité

- Définition :

Soient I, I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I\times I' \to \mathbb{C}$ globalement continue.

On dit que f est intégrable sur $I\times I'$ s'il existe $M\geq 0$ tel que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I et tout segment $[c,d]$ inclus dans I', on a

$$\int_a^b\left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)dx \leq M$$

- Remarque importante :

f est intégrable si et seulement si $|f|$ l'est.

D'après le théorème de Fubini sur un pavé ($[a,b]\times[c,d]$), on a pour *f* continue :

$$\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b|f(x,y)|dx\right)dy$$

- Définition de $\iint_{I\times I'}f$:

- Si *f* est réelle positive :

Définition :

Si $f:I\times I'\to\mathbb{R}$ est continue, positive, intégrable, on pose :

$$\iint_{I\times I'}f(x,y)dxdy=\sup_{[a,b]\times[c,d]\subset I\times I'}\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|dy\right)dx$$

$$=\sup_{[a,b]\times[c,d]\subset I\times I'}\int_c^d\left(\int_a^b|f(x,y)|dx\right)dy$$

- Si *f* est réelle :

Proposition :

Soit $f:I\times I'\to\mathbb{R}$ continue,

On pose $f^+:M\mapsto\max(f(M),0)$ et $f^-:M\mapsto\max(-f(M),0)$

Alors f^+ et f^- sont continues, et *f* est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont.

On pose alors $\iint_{I\times I'}f=\iint_{I\times I'}f^+-\iint_{I\times I'}f^-$

- Complexe :

Soit $f:I\times I'\to\mathbb{C}$ continue. Alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues, et *f* est intégrable si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

On pose alors $\iint_{I\times I'}f=\iint_{I\times I'}\mathrm{Re}(f)+i\iint_{I\times I'}\mathrm{Im}(f)$.

B) Calcul des intégrales

- A l'aide d'une suite exhaustive de pavés :

Théorème :

Soient *I*, *I'* deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On suppose que *I* est la réunion croissante des segments $[a_n,b_n]$, c'est-à-dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et que $I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$

De même, on suppose que *I'* est la réunion croissante de segments $[c_n,d_n]$.

Alors pour toute fonction $f:I\times I'\to\mathbb{C}$ continue intégrable, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a_n}^{b_n}\int_{c_n}^{d_n}f(x,y)dydx=\lim_{n\to+\infty}\int_{c_n}^{d_n}\int_{a_n}^{b_n}f(x,y)dxdy=\iint_{I\times I'}f(x,y)dxdy$$

Démonstration :

La démonstration est la même que pour les intégrales simples.

- Linéarité, positivité :

Théorème :

On note E l'ensemble des fonctions $f : I \times I' \to \mathbb{C}$ continues et intégrables.

Alors E est un sous-espace de $C^0(I \times I', \mathbb{C})$.

De plus, $f \in E \mapsto \iint_{I \times I'} f$ est linéaire positive, c'est-à-dire que si $f \in E$ est positive, alors $\iint_{I \times I'} f \geq 0$.

Démonstration :

Pour la positivité : c'est une borne supérieure de réels positifs.

Pour la linéarité : il suffit de calculer par les suites exhaustives de pavés.

- Cas simples :

Théorème :

Soient I, I' deux segments, disons $I = [a,b]$ et $I' = [c,d]$ et $f : I \times I' \to \mathbb{C}$ continue.

Alors f est intégrable sur $[a,b] \times [c,d]$, $]a,b] \times [c,d]$, $[a,b] \times]c,d]$… $]a,b[\times]c,d[$

Et toutes les intégrales sont égales.

On a de plus $\iint_{]a,b[\times]c,d[} f = \ldots = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$.

C) Retour de Fubini

Théorème (admis) :

Soit $f : I \times I' \to \mathbb{C}$ globalement continue.

On suppose que :

Pour tout $x \in I$, $y \in I' \mapsto f(x,y)$ est intégrable.

$x \in I \mapsto \int_{I'} f(x,y)dy$ est continue par morceaux intégrable sur I.

(1) Si f est à valeurs positives, alors f est intégrable sur $I \times I'$.

(2) Si f est intégrable (ce qui n'est pas assuré par l'hypothèse), alors :

$\iint_{I \times I'} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)dy \right) dx$

Remarque sur l'utilisation du théorème :

Sous les hypothèses, si f est positive, alors elle est intégrable et on peut calculer son intégrale. Si f est à valeurs réelles ou complexes, il faut d'abord appliquer (1) à $|f|$ puis (2) à f.

D) Passage en coordonnées polaires

Théorème (admis) :

(1) Soit $f :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{C}$ continue.

On pose, pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Alors g est continue, et f est intégrable si et seulement si g l'est, et dans ce cas :

$\iint_{]0,+\infty[^2} f(x,y)dxdy = \iint_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$

(2) On a un énoncé analogue pour $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ (où g est alors définie sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[$), et pour $\mathbb{R}^2$ (g est alors définie sur $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$)

Exemple :

Application à Γ :

Pour $\text{Re}(z)>0$, on a $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \underset{\substack{\uparrow \\ t=x^2}}{=} 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2z-1}dx$

(L'application $t\mapsto t^2$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$)

Par exemple, $\Gamma(1/2)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

On considère $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^2$. Pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\in\mathbb{R}_+\mapsto f(x,y)$ est continue et intégrable car $f(x,y)\underset{x\to+\infty}{=}O(1/x^2)$

De plus, $\int_0^{+\infty}f(x,y)dx=e^{-y^2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=Ge^{-y^2}$.

Et $y\mapsto Ge^{-y^2}$ est continue, intégrable.

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$, et $\iint_{[0,+\infty[^2}f(x,y)dxdy=G^2$.

Par ailleurs, sur $[0,+\infty[^2$, on peut passer en coordonnées polaires :

Ainsi, $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[\mapsto e^{-r^2}r$ est continue et intégrable, et d'après le théorème de Fubini,

$$\iint_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[}e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2}rd\theta\right)dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{4}\left[-e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

Donc $G=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soient $z,z'\in\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\Gamma(z)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2z-1}dx$, $\Gamma(z')=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2z'-1}dy$.

On cherche à calculer $\Gamma(z)\Gamma(z')$.

On pose, pour $x,y>0$, $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}x^{2z-1}y^{2z'-1}$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^{*2}$.

Pour tout $y>0$, $x\mapsto f(x,y)$ est intégrable.

En effet, en $+\infty$, $x^2f(x,y)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

Et en 0, $|f(x,y)|\underset{x\to0}{\sim}c(y)x^{2\text{Re}(z)-1}$

De plus, pour $y\in]0,+\infty[$, $\int_{]0,+\infty[}f(x,y)dx=e^{-y^2}y^{2z'-1}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2z-1}dx=\Gamma(z)g(y)$, où g est continue intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^{*2}$.

On a de plus :

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{*2}}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)dx\right)dy=\int_0^{+\infty}\Gamma(z)g(y)dy=\Gamma(z)\Gamma(z')$$

Passage en polaire :

Comme f est intégrable, $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[\mapsto e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2z-1}(r\sin\theta)^{2z'-1}r$ est continue et intégrable, et :

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)dxdy=\iint_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} e^{-r^2}r^{2z+2z'-1}(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2z'-1}drd\theta$$

On pose $g(r,\theta)=e^{-r^2}r^{2z+2z'-1}(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2z'-1}$.

Ainsi, g est continue, et pour tout $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $r\mapsto g(r,\theta)$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} g(r,\theta)dr=\frac{1}{2}\Gamma(z+z')(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2z'-1}$$

De plus, $h:\theta\mapsto\frac{1}{2}\Gamma(z+z')(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2z'-1}$ est continue, intégrable.

En effet, en 0 on a $|h(\theta)|\sim\left|\theta^{2z'-1}\right|$, intégrable.

Et en $\frac{\pi}{2}$, $|h(\theta)|\sim\left|(\frac{\pi}{2}-\theta)^{2z-1}\right|$, aussi intégrable.

Donc d'après le théorème de Fubini,

$$\iint_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} g(r,\theta)drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} g(r,\theta)drd\theta.$$

Donc $\Gamma(z)\Gamma(z')=4\iint_{\mathbb{R}_+^{*2}} f(x,y)dxdy=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2z'-1}d\theta\right)\Gamma(z+z')$

Définition :

Pour z, z' complexes de partie réelle strictement positive,

On pose $\beta(z,z')=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2z'-1}d\theta$.

Le changement de variable $u=\cos^2\theta$, C^1-difféomorphisme de $]0,\frac{\pi}{2}[$ dans $]0,1[$, nous donne même

$$\beta(z,z')=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta)^{z-1}(\sin^2\theta)^{z'-1}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z'-1}dt$$

On a donc la formule d'Euler pour $z,z'\in\mathbb{R}_+^*$:

$\Gamma(z)\Gamma(z')=\Gamma(z+z')\beta(z,z')$

Exemple :

$$\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^5dt=\beta(5/2,6)=\frac{\Gamma(6)\Gamma(5/2)}{\Gamma(17/2)}=5!\times\frac{\Gamma(5/2)}{(\frac{17}{2}-1)...\Gamma(\frac{5}{2})}=\frac{5!}{(\frac{17}{2}-1)...(\frac{5}{2})}$$

Exercice :

Soit $z\in\mathbb{R}$ tel que $0<z<1$.

On cherche à calculer $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$, c'est-à-dire $\beta(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}dt$

On pose $\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{u+1}du$

Le changement de variable $t=\frac{u}{1+u},dt=\frac{du}{(1+u)^2}$, C^1-difféomorphisme, dans $\beta(z,1-z)$ donne $\beta(z,1-z)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{z-1}}{(1+u)^{z-1}}\frac{1}{(1+u)^{-z}}\frac{du}{(1+u)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^{z-1}}{1+u}du=\varphi(z)$.

On va calculer $\varphi(z)$.

Rappel :

Pour $f\in\mathbb{C}(X)$ tel que $\deg f\leq -2$ et sans pôle réel, *f* est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = i\pi.\sum_{\alpha\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}(f,\alpha)$. En effet :

Définition :

Résidu de $f\in\mathbb{K}(X)$ en $a\in\mathbb{K}$: c'est le coefficient de $\dfrac{1}{X-a}$ dans la décomposition en *f* en éléments simples, éventuellement nul.

Ainsi, si $f=\dfrac{P}{Q}$ et *a* est pôle seulement simple de *f*, on a $\mathrm{Res}(f,a)=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$

Ainsi, pour tout $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $A\geq 0$:

$$\int_{-A}^{A}\frac{dt}{t-z_0}=\left[\ln|t-z_0|+i\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\mathrm{Re}(z_0)}{\mathrm{Im}(z_0)}\right)\right]_{-A}^{A}$$

$$=\ln\frac{|A-z_0|}{|-A-z_0|}+i\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{A-\mathrm{Re}(z_0)}{\mathrm{Im}(z_0)}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{-A-\mathrm{Re}(z_0)}{\mathrm{Im}(z_0)}\right)\right)$$

Mais $\lim_{A\to+\infty}\ln\dfrac{|A-z_0|}{|-A-z_0|}=0$, et $\lim_{A\to+\infty}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{A-\mathrm{Re}(z_0)}{\mathrm{Im}(z_0)}\right)=\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_0))\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim_{A\to\infty}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{-A-\mathrm{Re}(z_0)}{\mathrm{Im}(z_0)}\right)=-\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_0))\dfrac{\pi}{2}$

Donc $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\dfrac{dt}{t-z_0}=i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_0))\pi$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dt}{t-z_0}=i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_0))\pi$

(Mais $t\mapsto\dfrac{1}{t-z_0}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$)

Pour $n\geq 2$, $t\mapsto\dfrac{1}{(t-z_0)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ($z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$), et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t-z_0)^n}=0$$

Calculer $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$ pour $n<m$, et en déduire $\varphi(z)$ pour $z\in\left]0,1\right[$

On a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=i\pi.\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\ \mathrm{Im}(\alpha)>0}}\mathrm{Res}(f,\alpha)\ \text{ où }\ f=\frac{X^{2m}}{1+X^{2n}}$$

Pôles de *f* :

Ce sont les $\omega_k=e^{\frac{i\pi+2k\pi}{2n}}$ pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$

On a $\mathrm{Im}(\omega_k)\Leftrightarrow 0\leq k\leq n-1$, et $\mathrm{Res}(f,\omega_k)=\dfrac{\omega_k^{2m}}{2n\omega_k^{2n-1}}=\dfrac{-\omega_k^{2m+1}}{2n}$

$$\text{Donc }\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{-i\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2k+1}{2n}.(2m+1)\pi}=\frac{-i\pi}{2n}e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}\frac{1-e^{i(2m+1)\pi}}{1-e^{i\frac{2m+1}{n}\pi}}\quad(e^{i\frac{2m+1}{n}\pi}\neq 1)$$

Soit $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \dfrac{-i\pi}{n}\times\dfrac{1}{-2i\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} = \dfrac{\pi}{2n\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$

Or, le changement de variable $u = x^{2n}$ donne :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{u^{m/n}}{1+u}\frac{1}{2n}u^{\frac{1}{2n}-1}du = \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+u}du$$

Ainsi, pour $0\le m<n$, $\varphi\left(\dfrac{2m+1}{2n}\right) = \dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{2m+1}{2n}\pi\right)}$.

Théorème :

$$\forall x\in\left]0;1\right[, \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{1+u}du = \frac{\pi}{\sin\pi.x}$$

Corollaire :

On a la formule des compléments :

$$\forall x\in\left]0;1\right[, \beta(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi.x}$$

Démonstration :

$g(x,u) = \dfrac{u^{x-1}}{1+u}$, définie sur $\left]0;1\right[\times\mathbb{R}_+^*$

Alors pour tout $u\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto g(x,u)$ est continue sur $x\mapsto g(x,u)$.

Pour tout $x\in\left]0;1\right[$, $u\mapsto g(x,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $K=[a,b]\subset\left]0;1\right[$.

$$\text{Alors } \forall x\in K, |g(x,u)| = \frac{e^{(x-1)\ln u}}{1+u}\le\varphi_{[a,b]}(u) = \begin{cases}\dfrac{e^{(b-1)\ln u}}{1+u} & \text{si } u\ge 1\\ \dfrac{e^{(a-1)\ln u}}{1+u} & \text{si } u\le 1\end{cases}$$

Mais $\varphi_{[a,b]}$ est continue et intégrable. Donc $x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{1+u}du$ est continue sur $\left]0;1\right[$.

On va montrer maintenant la densité de $\left\{\dfrac{2m+1}{2n},(m,n)\in\mathbb{N}^2 \text{ et } n<m\right\}$ dans $\left]0;1\right[$.

Soit U un intervalle ouvert de $\left]0;1\right[$, disons $U=\left]a,b\right[$.

Montrons qu'il existe $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que $0\le n<m$ et $a<\dfrac{2m+1}{2n}<b$, ce qui établira le résultat. On a en effet les équivalences :

$$a<\frac{2m+1}{2n}<b \Leftrightarrow 2na<2m+1<2nb \Leftrightarrow na-\tfrac{1}{2}<m<nb-\tfrac{1}{2}$$

Soit alors $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>\dfrac{1}{b-a}$.

Alors $\left]na-\frac{1}{2},nb-\frac{1}{2}\right[$ est de longueur strictement plus grande que 1, donc contient un entier m, à savoir par exemple $E(nb-\frac{1}{2})$ si $nb-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ ou $nb-\frac{3}{2}$ si $nb-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$.

Et on a ainsi $a<\dfrac{2m+1}{2n}<b$. D'où la densité de l'ensemble, et le résultat sur $\left]0;1\right[$ par continuité de l'application.