Chapitre 18 : Equations différentielles linéaires

Rappel :
Intégration des fonctions continues (par morceaux) à valeur dans un espace de Banach (surtout pour un espace normé de dimension finie)
Exemple :
Pour $t \in [0;1]$, on pose $f_t(x) = e^{t.x}$
On définit ainsi $\varphi : \begin{array}{l}[0;1] \to (C^0([0;1],\mathbb{R}),\| \ \|_\infty) \\ t \mapsto f_t\end{array}$

On veut montrer que φ est continue, et calculer $\int_0^1 \varphi(t)dt$.
On a pour tous $t,u \in [0;1]$:
$\|\varphi(t)-\varphi(u)\|_\infty = \sup_{[0;1]}|e^{t.x}-e^{u.x}| \leq e^{|t|}\sup_{[0;1]}|e^{(u-t).x}-1| \leq e^t|e^{u-t}-1| = |e^t - e^u|$
Donc pour tout $t_0 \in [0;1]$, on a $\lim_{u\to t_0}\|\varphi(t_0)-\varphi(u)\|_\infty = 0$ donc φ est continue en t_0 et donc sur $[0;1]$.

La théorie de l'intégration des fonctions continues par morceaux à valeurs dans un Banach montre que $\int_0^1 \varphi(t)dt = g \in C^0([0;1],\mathbb{R})$.
Calcul de $g(x)$ pour $x \in [0;1]$:
Soit $\lambda_x : f \in C^0([0;1],\mathbb{R}) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$
Alors λ_x est linéaire, continue pour $\| \ \|_\infty$.
Donc $\lambda_x(g) = g(x) = \lambda_x\left(\int_0^1 f_t dt\right) = \int_0^1 \lambda_x(f_t)dt$
(C'est évident pour des fonctions en escalier, puis vrai sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$ par densité et continuité)
Donc $g(x) = \lambda_x(g) = \int_0^1 e^{t.x}dt = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

Cas particulier où le but E est de dimension finie : si on note $(\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)$ une base de E, alors $f:[a,b] \to E$ se décompose en $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)\vec{e}_k$ où $f_k : [a,b] \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Alors f est continue par morceaux si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f_k est continue par morceaux.
Et dans ce cas $\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k\right)\vec{e}_k$.

Rappel :
Exponentielle matricielle et exponentielle dans une algèbre de Banach.
Soit A une algèbre de Banach unitaire, avec une norme triple $\|\!|\ \|\!|$ associée à une norme $\|\ \|$ quelconque.

Pour $x \in A$, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument donc converge.

On pose $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

On sait que $\varphi_x : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t.x)$ est de classe C^1, de dérivée
$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'_x(t) = \exp(t.x) \times x = x \times \exp(t.x)$
Etude dans le cas plus général suivant :
On suppose que $I = [0;1]$, et que $t \in [0;1] \mapsto x(t)$ est de classe C^1.
Alors $\psi : t \mapsto \exp(x(t))$ est de classe C^1, et une condition suffisante pour que $\forall t \in [0;1], \psi'(t) = x'(t)e^{x(t)}$ est que $x(t)$ et $x'(t)$ commutent pour tout $t \in [0;1]$.

Démonstration :

Posons, pour $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = \dfrac{x(t)^n}{n!}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^1 (car $(\alpha, \beta) \in A^2 \mapsto \alpha \times \beta \in A$ est bilinéaire continue)

Et $\forall t \in [0;1], u'_n(t) = \dfrac{1}{n!}\left(x'(t)x(t)^{n-1} + x(t)x'(t)x(t)^{n-2} + \ldots + x(t)^{n-1}x'(t)\right)$

De plus, la série de terme général u_n converge simplement vers φ
Et la série de terme général u'_n converge normalement (donc uniformément) sur $[0;1]$.
En effet :
On pose $A = \|x\|_\infty$, $B = \|x'\|_\infty$ (qui existent car x est de classe C^1 sur le compact $[0;1]$)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|u'_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n!}\left(AB^{n-1} + BAB^{n-2} + \ldots + B^{n-1}A\right)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u'_n\|_\infty \leq \dfrac{AB^{n-1}}{(n-1)!}$, terme général d'une série convergente.

Donc le théorème sur le caractère C^1 des sommes de séries s'applique, donc ψ est de classe C^1 et $\forall t \in [0;1], \psi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(t)$. De plus, si $\forall t \in [0;1], x'(t)x(t) = x(t)x'(t)$,

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u'_n(t) = x'(t)\dfrac{x^{n-1}(t)}{(n-1)!}$. Et donc $\psi'(t) = x'(t)\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n-1}(t)}{(n-1)!} = x'(t)\psi(t) = \psi(t)x'(t)$.

I Equations différentielles linéaires du premier ordre

On considère un evn E de dimension finie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (les résultats sont vrai aussi si E est un espace de Banach, mais en ajoutant la condition que les endomorphismes soient continus)

A) Terminologie

- Equation linéaire de 1er ordre :

(E) $x'(t)=a(t).x(t)+b(t)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Où $b:I\to E$ est continue, $a:I\to L_c(E)$ est continue (pour $L_c(E)$ muni de la norme $\|\ \|$ associée à $\|\ \|$)

Et $a(t).x(t)$ désigne l'image de $x(t)\in E$ par l'endomorphisme continu $a(t)\in L_c(E)$, c'est-à-dire $a(t).x(t)=a(t)(x(t))$

On appelle solution sur I toute fonction $x:I\to E$ de classe C^1 telle que $\forall x\in I, x'(t)=a(t).x(t)+b(t)$

Lorsque $b=0$, on dit que l'équation est homogène sans second membre.

L'équation (e) $x'(t)=a(t).x(t)$ s'appelle l'équation sans second membre associée à (E).

- Structure de l'ensemble des solutions :

Théorème :

L'ensemble $S_{(e)}$ des solutions sur I de (e) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I,E)$.

L'ensemble $S_{(E)}$ des solutions sur I de (E) est soit vide, soit un sous-espace affine de $C^1(I,E)$ de direction $S_{(e)}$.

Remarque :

On a même le théorème de Cauchy (montré plus tard) :

Si I est non vide, alors $S_{(E)}\neq\varnothing$.

Démonstration :

Le premier point est clair.

Pour le deuxième :

Supposons $S_{(E)}\neq\varnothing$, et considérons $x_0\in S_{(E)}$.

Alors $x\in S_{(E)}\Leftrightarrow (x-x_0)\in S_{(e)}$.

On a en effet : $\forall t\in I, x'_0(t)=a(t).x(t)+b(t)$

Donc

$$\begin{aligned} x\in S_{(E)} &\Leftrightarrow \forall t\in I,(x-x_0)'(t)=a(t).(x-x_0)(t)+0\\ &\Leftrightarrow (x-x_0)\in S_{(e)}\end{aligned}$$

Donc $S_{(E)}=x_0+S_{(e)}$

Problème :
On va s'attacher à montrer que $S_{(E)} \neq \varnothing$ et à l'étude de $S_{(e)}$.

- Problème de Cauchy pour l'équation (E).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $b : I \to E$ continue, $a : I \to L_c(E)$ continue.
On note (E) $x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$.
On appelle condition initiale un couple $(t_0, x_0) \in I \times E$
Résoudre le problème de Cauchy $(C) : \begin{cases} (E) \ x'(t) = a(t).x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, c'est trouver toutes les solutions $x : I \to E$ de (E) telles que $x(t_0) = x_0$

Proposition (hors programme) :
Equation intégrale associée à un problème de Cauchy :
Soit $x : I \to E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) x est continue et $\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))ds$
(2) x est de classe C^1 et est solution du problème de Cauchy.

Démonstration :
$(2) \Rightarrow (1)$: Si x est solution de (E), on a pour tout $t \in I$,
$x(t) = \int_{t_0}^{t} x'(s)ds + x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))ds$
$(1) \Rightarrow (2)$: Si x est solution continue de l'équation intégrale, alors $s \mapsto a(s).x(s) + b(s)$ est continue.
Donc $t \mapsto \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))ds$ est de classe C^1
Donc x est de classe C^1
Et en dérivant par rapport à t, on retrouve (E)
Et en prenant $t = t_0$, on aura $x(t_0) = x_0$.

B) Un outil important (HP) : lemme de Gronwall

Lemme :
Soit $I = [a,b]$ ou $I = [a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ positives et $K \in \mathbb{R}_+$.
On suppose que $\forall t \in I, u(t) \leq K + \int_a^t u(s)v(s)ds$.
Alors $\forall t \in I, u(t) \leq K \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$

Démonstration :
On pose pour $t \in I$, $\varphi(t) = \exp\left(-\int_a^t v(s)ds\right)\left(K + \int_a^t u(s)v(s)ds\right)$
Comme u et v sont continus, φ est de classe C^1 et :
$\forall t \in I, \varphi'(t) = \exp\left(-\int_a^t v(s)ds\right)\left(u(t)v(t) - v(t)\left(K + \int_a^t u(s)v(s)ds\right)\right) \leq 0$

Donc φ est décroissante.

Mais $\varphi(a)=K$

Donc $\forall t\in I, \varphi(t)\leq K$

Donc $\forall t\in I, u(t)\leq \varphi(t)\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)\leq K\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$

Application :

Soient $a,b:[0,+\infty[\to\mathbb{C}$ continus intégrables.

Alors toute solution de $x'(t)=a(t).x(t)+b(t)$ sur $[0,+\infty[$ est bornée.

Remarque :

On a supposé ici $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais l'énoncé est exact lorsque E est un Banach en remplaçant l'hypothèse a, b intégrables par $t\mapsto\|a(t)\|$ et $t\mapsto\|b(t)\|$ sont intégrables.

Démonstration :

Soit x une solution de (E).

Pour $t\geq 0$, $x(t)=x(0)+\int_0^t (a(s).x(s))ds+\int_0^t (b(s))ds$

Donc $\|x(t)\|\leq\|x(0)\|+\int_0^t\|a(s).x(s)\|ds+\int_0^t\|b(s)\|ds\leq K+\int_0^t\|a(s)\|\|x(s)\|ds$

Où $K=\|x(0)\|+\int_0^{+\infty}\|b(s)\|ds$

On a ainsi $\forall t\geq 0, \|x(t)\|\leq K\exp\left(\int_0^t\|a(s)\|ds\right)\leq K\exp\left(\int_0^{+\infty}\|a(s)\|ds\right)$

Donc x est bornée.

C) Théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires

- Enoncé :

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un Banach (au programme : seulement de dimension finie). Soient $b:I\to E$ et $a:I\to L_c(E)$ continues, où on a muni $L_c(E)$ de la norme triple associée au produit scalaire.

Alors :

Pour toute condition initiale $(t_0,x_0)\in I\times E$, il existe une unique solution φ de classe C^1 au problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t)=a(t).x(t)+b(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$

Remarque :

C'est un théorème idéal !

- Interprétation en terme d'espace de solution :

Soit $(E):x'(t)=a(t).x(t)+b(t)$, (e) l'équation sans second membre associée $x'(t)=a(t).x(t)$. On note $S_{(E)}$ l'ensemble des solutions de (E), $S_{(e)}$ celui des solutions de (e).

Corollaire :

(1) Pour $S_{(e)}$: c'est un sous-espace vectoriel de $C^1(I,E)$ (déjà vu), et pour tout $t_0\in I$, l'application $\begin{array}{l}\theta_{t_0}: S_{(e)}\to E\\ \quad\varphi\mapsto\varphi(t_0)\end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. En particulier, si E est de dimension finie, alors l'espace des solutions de (e) a la même dimension.

(2) Pour $S_{(E)}$: c'est un sous-espace affine de $C^1(I,E)$ (donc non vide), de direction $S_{(e)}$, et pour tout $t_0\in I$, $\begin{array}{l}S_{(E)}\to E\\ \varphi\mapsto\varphi(t_0)\end{array}$ est une bijection affine.

Démonstration (du corollaire) :

(1) L'application θ_{t_0} est linéaire, et d'après le théorème de Cauchy appliqué à (e), pour tout $x_0\in E$, il existe un unique $\varphi\in S_{(e)}$ tels que $\theta_{t_0}(\varphi)=x_0$.

Donc θ_{t_0} est bijective. Donc c'est un isomorphisme.

(2) De même, pour tout $x_0\in E$, il existe $\varphi\in S_{(E)}$ unique tel que $\theta_{t_0}(\varphi)=x_0$, donc $\begin{array}{l}\theta_{t_0}: S_{(E)}\to E\\ \quad\varphi\mapsto\varphi(t_0)\end{array}$ est bijective.

Illustration :

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n\geq 1$.

Soit $a:\mathbb{R}\to L(E)$, continue et 2π-périodique. Existe-t-il des solutions 2π-périodiques non nulles à l'équation $(e): x'(t)=a(t).x(t)$?

Non en général :

Par exemple, avec $E=\mathbb{C}$, et $a:t\to \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ est 2π-périodique, et (e) s'écrit :

$(e): x'(t)=x(t)$, de solution générale $x(t)=Ke^t$ dont aucune n'est périodique sauf la fonction nulle.

Mais il existe une solution non nulle $\varphi:\mathbb{R}\to E$ de classe C^1 et $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tels que $\forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t+2\pi)=\lambda\varphi(t)$.

En effet :

Soit S l'ensemble des solutions de (e). Alors S est un $\mathbb{C}$-ev de dimension n (d'après le théorème de Cauchy)

Pour $\varphi\in S$, l'application $\psi: t\mapsto\varphi(t+2\pi)$ est dans S.

En effet, $\forall t\in I, \psi'(t)=\varphi'(t+2\pi)=\underbrace{a(t+2\pi)}_{=a(t)}.\varphi(t+2\pi)=a(t).\psi(t)$

De plus, $\varphi\in S\mapsto\psi\in S$ est bijective :

C'est une application linéaire, et injective car si $\psi=0$, alors $\forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t)=0$, et donc bijective car en dimension finie.

Cet endomorphisme admet des valeurs propres (car $n\geq 1$, et $\mathbb{C}$ est algébriquement clos)

Donc il existe $\lambda\neq 0$ (car l'application est bijective) et $\varphi\in S\setminus\{0\}$ tels que $\psi=\lambda\varphi$

- Démonstration du théorème :

(1) Démonstration élémentaire de l'unicité avec Gronwall :

Soient φ_1, φ_2 deux solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} (E) : x'(t) = a(t).x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Alors $z = \varphi_1 - \varphi_2$ vérifie $\begin{cases} z' = az \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$

Donc $\forall t \in I, z(t) = 0 + \int_{t_0}^{t} z'(u)du = \int_{t_0}^{t} a(u).z(u)du$

Pour $t \geq t_0, \|z(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|a(u).z(u)\|du \leq \int_{t_0}^{t} \|a(u)\|\|z(u)\|du$

On pose alors $u(t) = \|z(t)\|$, $v(t) = \|a(t)\|$ pour $t \geq t_0$.

Ainsi, u et v sont positives, continues, et vérifient :

$\forall t \geq t_0, u(t) \leq 0 + \int_{t_0}^{t} u(u)v(u)du$

Donc $\forall t \geq t_0, u(t) \leq 0e^{\int_{t_0}^{t} v(u)du}$, c'est-à-dire $\forall t \geq t_0, \|z(t)\| = 0$

Pour $t \leq t_0$:

Posons $y(t) = z(-t)$. On a $\begin{cases} y'(t) = -z'(-t) = -a(-t).z(-t) = -a(-t).y(t) \\ y(-t_0) = 0 \end{cases}$

Donc, de même, $\forall t \geq -t_0, y(t) = 0$, c'est-à-dire $\forall t \leq t_0, z(t) = 0$

(2) Pour l'existence :

On considère l'équation intégrale $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s).x(s)ds$

On doit montrer que cette équation admet au moins une solution $\varphi : I \to E$ continue.

Posons, pour $t \in I$, $\varphi_0(t) = x_0$.

Et par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s).\varphi_n(s)ds$

Montrons que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ de I contenant t_0.

Pour cela, on va montrer que la série de terme général $u_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ est normalement convergente sur $[a,b]$. (Comme E est complet, la suite de terme général $\varphi_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k - \varphi_{k-1}$ converge alors uniformément sur $[a,b]$)

On a pour tout $t \in [a,b]$ et $n \geq 1$,

$u_n(t) = \int_{t_0}^{t} a(s).(\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s))ds = \int_{t_0}^{t} a(s).u_{n-1}(s)ds$

Posons alors $K = \sup_{t\in[a,b]} \|a(t)\|$ (existe car a est continue et $[a,b]$ est compact)

Et $M = \sup_{t\in[a,b]} \|u_0(t)\|$ (existe car $u_0 = \varphi_1 - \varphi_0$ est continue sur $[a,b]$)

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b], |u_n(t)| \leq M \frac{K^n}{n!} |t - t_0|^n$:

- Pour $n = 0$, c'est vrai par définition de M.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'inégalité vraie pour $n-1$

Alors

$$\forall t \in [a,b], |u_n(t)| \leq \varepsilon(t)\int_{t_0}^{t} \|a(s)\| \|u_{n-1}(s)\| ds \text{ où } \varepsilon(t) = \operatorname{sgn}(t-t_0)$$

$$\leq K\varepsilon(t)\int_{t_0}^{t} \frac{K^{n-1}}{(n-1)!} M |s-t_0|^{n-1} ds$$

$$\leq M\frac{K^n}{n!}|t-t_0|^n$$

Ce qui achève la récurrence.

Conséquence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_\infty \leq M\frac{K^n}{n!}(b-a)^n$, terme général d'une série convergente.

Conclusion :

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $\varphi : I \to E$ qui est continue car les φ_n le sont.

De plus, en passant à la limite dans $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s).\varphi_n(s)ds$, on a $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s).\varphi(s)ds$

En effet, $\int_{t_0}^{t} a(s).\varphi_n(s)ds \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{t_0}^{t} a(s).\varphi(s)ds$ car on intègre sur un segment et $a.\varphi_n$ converge uniformément sur $[t_0,t] \subset [a,b]$ vers $a.\varphi$.

Donc φ est la solution cherchée.

Remarque :

La construction de φ est une construction par itération, basée sur le théorème du point fixe.

Si on se limite à $[a,b] \subset I$ contenant t_0, l'application $\Theta : E = C^0([a,b],\mathbb{C}) \to E$ où $\underset{\varphi \mapsto \psi}{}$ $\forall t \in [a,b], \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s).\varphi(s)ds$ n'est pas contractante, mais a un itéré contractant pour $\| \ \|_\infty$ sur E (C'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $\Theta \circ \Theta ... \circ \Theta$ soit contractante)

D) Application aux équations différentielles linéaires d'ordre *r*.

- Définition :

Soit E un Banach, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une équation différentielle d'ordre r à valeurs dans E, c'est une équation de la forme $(E_r) : x^{(r)}(t) = a_0(t).x(t) + ... + a_{r-1}(t).x^{(r-1)} + b(t)$

Où $b : I \to E$ et pour $j \in [\![0, r-1]\!]$, $a_j : I \to L_c(E)$ sont des applications continues, et où x est de classe C^r.

L'équation sans second membre associée est

$(e_r) : x^{(r)}(t) = a_0(t).x(t) + ... + a_{r-1}(t).x^{(r-1)}(t)$

- Equation d'ordre 1 équivalente à (E_r) :

Pour $x : I \to E$ de classe C^r, on pose $\begin{array}{l} y : I \to E^r \\ t \mapsto (x(t), x'(t) \dots x^{(r-1)}(t)) \end{array}$.

Alors x est solution de (E_r) si et seulement si y vérifie :

$$\forall t \in I, y'(t) = \left(x'(t), \dots x^{(r-1)}(t), \sum_{j=0}^{r-1} a_j(t).x^{(j)}(t) + b(t) \right)$$

Pour $t \in I$, on pose $B(t) = (0, \dots 0, b(t)) \in E^r$,

et on définit pour $t \in I$ l'endomorphisme $A(t)$ de E^r par

$A(t) : \begin{array}{l} E^r \to E^r \\ (z_0, \dots z_{r-1}) \mapsto \left(z_1, \dots z_{r-1}, \sum_{j=0}^{r-1} a_j(t).z_j \right) \end{array}$, et $t \mapsto A(t)$ est de classe C^1.

Proposition :

Soit $\begin{array}{l} y : I \to E^r \\ t \mapsto (y_0(t), \dots y_{r-1}(t)) \end{array}$

Alors y est solution de $(F) : y'(t) = A(t).y(t) + B(t)$ si et seulement si :

- y_0 est de classe C^r
- $\forall j \in [\![0, r-1]\!], y_j = y_0^{(j)}$
- y_0 est solution de (E_r).

Remarque :

Intérêt : on ramène la résolution d'une équation d'ordre r à valeurs dans E à celle d'une équation d'ordre 1 à valeurs dans E^r

Exemple :

Soit (E_2) l'équation scalaire $x''(t) = a(t).x(t) + b(t).x'(t) + c(t)$ où a, b, c sont continues de I dans $\mathbb{C}$.

Equation d'ordre 1 associée :

On pose $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

Alors x est solution de (E_2) si et seulement si V vérifie :

$$V'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ a(t).x(t) + b(t).x'(t) + c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Donc l'équation du premier ordre associée à (E_2) est :

$$(F) : V'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} V(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $V(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$, de classe C^1, est solution de (F) si et seulement si y_0 est de classe C^2, $y_1 = y_0'$ et y_0 est solution de (E_2).

Démonstration de la proposition :

On a vu déjà $\Leftarrow$ avant la proposition. Réciproquement :

Si y est solution de classe C^1 de (F), alors pour tout $t \in I$,

$$(y'_0(t), \dots, y'_{r-1}(t)) = \underbrace{(y_1(t), \dots y_{r-1}(t), a_0(t).y_0(t) + \dots + a_{r-1}(t).y_{r-1}(t))}_{A(t).y(t)} + (0, \dots b(t))$$

Donc $\forall j \leq r-1, y_j = y_{j-1}'$

Et $\forall t \in I, y'_{r-1}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_j(t).y_j(t) + b(t)$

Donc y_0 est de classe C^r,

Et $\forall j \leq r-1, y_j = y_0^{(j)}$

Donc $\forall t \in I, y_0^{(r-1)}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_j(t).y_0^{(j)}(t) + b(t)$

- Théorème de Cauchy pour l'ordre r :

Théorème :

Sous les hypothèses précédentes (b, a_j continues) :

Pour toute condition initiale $(t_0, x_0 ... x_{r-1}) \in I \times E^r$, le problème de Cauchy :

$$x^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j(t).x^{(j)}(t) + b(t)$$

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ ...,\ x^{(r-1)}(t_0) = x_{r-1}$$

Admet une unique solution x de classe C^r sur I.

- En termes de structure :

Théorème :

- Sous les même hypothèses de continuité,

Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\theta_{t_0} : \begin{array}{l} S_{(e_r)} \to E^r \\ \varphi \mapsto (\varphi(t_0), ... \varphi^{(r-1)}(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- De même, $\begin{array}{l} S_{(E_r)} \to E^r \\ \varphi \mapsto (\varphi(t_0), ... \varphi^{(r-1)}(t_0)) \end{array}$ est une bijection affine.

Corollaire :

Si E est de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, alors $S_{(e_r)}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension nr.

Et $S_{(E_r)}$ est un espace affine de dimension nr.

Autrement dit, la solution générale dépend de nr paramètres fixés par les conditions initiales.

Démonstration :

Les deux théorèmes et le corollaire découlent de la proposition précédente.

Exercice :

Soit $(E_2) : x''(t) = a(t).x(t) + b(t).x'(t)$ où $a, b : I \to \mathbb{C}$ sont continues.

Alors toute solution x non nulle de (E_2) a ses zéros isolés, c'est-à-dire que si $t_0 \in I$ vérifie $x(t_0) = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$\forall t \in \left]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\right[\cap I,\quad x(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0$

Si de plus $I = \mathbb{R}_+$ et si x a une infinité de 0, alors on peut les classer dans une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ strictement croissante et tendant vers $+\infty$.

En effet :

Soit x une solution non nulle de (E_2), et $t_0 \in I$. On suppose que $x(t_0) = 0$.

Alors $x'(t_0)\neq 0$

En effet, sinon *x* vérifie (E_2) et les conditions initiales $\begin{cases} x(t_0)=0 \\ x'(t_0)=0 \end{cases}$

Donc comme 0 est aussi solution de ce problème de Cauchy, par unicité, $x=0$ ce qui est exclu.

Donc $x'(t_0)\neq 0$.

Donc $\lim_{t\to t_0}\dfrac{x(t)}{t-t_0}=x'(t_0)\neq 0$

Il existe donc $\alpha>0$ tel que $\forall t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha], |x(t)|\geq \frac{1}{2}|x'(t_0)||t-t_0|$

On suppose maintenant que $I=\mathbb{R}_+$. Soit *x* une solution non nulle de (E_2).

Sur tout segment $[0,A]\subset\mathbb{R}_+$, *x* s'annule un nombre fini de fois.

En effet, supposons qu'une solution *x* a une infinité de zéros, et prenons donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments *distincts* de $[0,A]$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, x(t_n)=0$.

Comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une valeur d'adhérence. Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, disons vers $\alpha\in[0,A]$

Par continuité de *x*, on a ainsi $x(\alpha)=0$ mais α n'est pas isolé, donc $x=0$.

Posons alors $Z=\{t\in\mathbb{R}_+, x(t)=0\}$.

On suppose que *Z* est infini.

Soit $t\in Z$. Alors $[0,t]\cap Z$ est non vide (contient *t*) et fini, donc admet un plus petit élément t_0, qui est aussi le plus petit élément de *Z* (car les autres éléments de *Z* sont plus grand que *t*)

On pose ensuite $t_1=\min Z\setminus\{t_0\},\dots\ t_k=\min Z\setminus\{t_0,\dots t_{k-1}\}$

Alors la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,

Et $t_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$ car sinon $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait majorée par $M\in\mathbb{R}_+$ et $[0,M]$ contiendrait une infinité de zéros.

On a de plus épuisé *Z* avec cette suite :

Soit $u\in Z$

Alors $u\geq t_0$.

Il existe donc $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $t_{k-1}\leq u<t_k$

Mais par définition de t_k, $t_{k-1}=u$

Donc $Z\subset\{t_k, k\in\mathbb{N}\}$

D'où le résultat.

II Cas de la dimension finie

A) Equation linéaire scalaire du premier ordre

- Définition :

Soit $(E): a(t).x'(t)+b(t).x(t)+c(t)=0$ où $a,b,c:I\to\mathbb{K}$ sont continues ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On suppose que *a* ne s'annule pas sur *I*.

On a donc la forme résolue $x'(t)=\alpha(t).x(t)+\beta(t)$ où $\alpha=\frac{-b}{a}$ et $\beta=\frac{-c}{a}$, continues sur I.

Attention :

Si a s'annule, il faut découper I en sous intervalles sur lesquels a ne s'annule pas, et on fait ensuite des raccordement là où a s'annule.

- Résolution par quadrature (c'est-à-dire par calcul de primitive)

Théorème :

Soit $(E): x'(t)=\alpha(t).x(t)+\beta(t)$ où $\alpha,\beta: I\to\mathbb{R}$ sont continues.

On note (e) l'équation sans second membre associée $x'(t)=\alpha(t).x(t)$.

(1) La solution générale de (e) est $x(t)=K.e^{\int\alpha(t)dt}$

(2) Pour tout $(t_0,x_0)\in I\times\mathbb{R}$, la solution du problème de Cauchy $\begin{cases}(E)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ est

$$x(t)=\left(x_0+\int_{t_0}^{t}\beta(s)e^{-A(s)}ds\right)e^{A(t)} \text{ où } A(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds$$

Démonstration :

(1) Pour $x: I\to\mathbb{K}$ de classe C^1, posons $y(t)=x(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de α. On a alors $\forall t\in I, y'(t)=e^{-A(t)}\left(x'(t)-\alpha(t).x(t)\right)$

Donc x est solution de (e) si et seulement si $y'=0$, c'est-à-dire si et seulement si y est constante (car I est un *intervalle*)

(2) Soit $A(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds$ pour $t\in I$. Alors A est de classe C^1 et $A'=\alpha$.

Soit $x: I\to\mathbb{K}$ de classe C^1.

On pose pour $t\in I$, $k(t)=e^{-A(t)}x(t)$.

Alors k est de classe C^1, et $\forall t\in I, k'(t)=e^{-A(t)}(x'(t)-\alpha(t).x(t))$

Donc x est solution du problème de Cauchy si et seulement si

$$\begin{cases}k'(t)=\beta(t)e^{-A(t)}\\ k(t_0)=x_0\end{cases}$$

C'est-à-dire si et seulement si $k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\beta(s)e^{-A(s)}ds$

Soit $x(t)=e^{A(t)}k(t)$.

Exemple :

Résoudre $x(x^2-1).y'(x)+2y(x)=x^2$

Forme résolue :

$y'(x)=\frac{-2}{x(x^2-1)}y(x)+\frac{x}{x^2-1}$ sur un *intervalle* $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$.

Une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}$ est

$$\int\frac{dx}{x(x^2-1)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right|$$

Solution de d'équation sans second membre :

$$y(x)=K\left|\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right|=K'\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$$

Variation de la constante : $y(x)=K(x)\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Alors K vérifie $K'(x)\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x}{x^2-1}$, soit $K'(x)=\dfrac{1}{x}$, donc $K(x)=\ln|x|+A$

Sur I, la solution générale est donc $y(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}\left(A+\ln|x|\right)$.

Peut-on avoir une solution sur $\mathbb{R}$?

- Raccordement en 1 : sur $]1,+\infty[$, $y(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}\left(A_1+\ln|x|\right)$

Sur $]0,1[$, $y(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}\left(A_2+\ln|x|\right)$

Peut-on choisir A_1, A_2 pour que le raccordement soit continu ou C^1 en 1 ?
Déjà, si $A_1\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y(x)=\pm\infty$. Si $A_1=0$, on a en posant $x=1+h$:

$$y(1+h)=\frac{(1+h)^2(h-h^2/2+o(h^2))}{(1+h)^2-1}=\frac{(2h+O(h^2))(h-h^2/2+O(h^3))}{2h+h^2}$$

$$=\frac{1+2h+O(h^2)}{2+h}=\frac{1+\frac{3}{2}h+O(h^2)}{2}\left(1-\frac{h}{2}+O(h^2)\right)=\frac{1+h}{2}+O(h^2)$$

Donc y a un prolongement dérivable à droite en 1, avec $y(1)=y'(1)=\frac{1}{2}$

- C'est la même chose en 1^-. Donc il existe une unique solution dérivable sur $]0,+\infty[$, à savoir $y(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-1}\ln|x| & \text{si } x\neq 1\\ 1/2 & \text{si } x=1\end{cases}$
- On peut même faire un raccordement dérivable en 0 (et ce quels que soient A_1, A_2) : $y(x)\underset{x\to 0}{\sim}-x^2\ln|x|$

On peut donc raccorder avec $y(0)=y'(0)=0$
Conclusion :
Les solutions de (E) sont :

Sur $I=]-\infty,-1[$ ou $]-1,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$, $y(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}(\ln|x|+c)$

Sur $\mathbb{R}$ ou $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$: $y(x)=\begin{cases}1/2 & \text{si } x=\pm 1\\ \dfrac{x^2}{x^2-1}\ln|x| & \text{si } x\neq 0,1,-1\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ (Une seule solution)

Sur $]-1,1[$: on a un espace affine de dimension 2 de solutions dérivables

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-1}(\ln|x|+A_1) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x^2}{x^2-1}(\ln|x|+A_2) & \text{si } x<0\end{cases}$$

Exercice :

Soit $a\in\mathbb{C}$

On considère $(E): y'(x)+ay(x)=f(x)$, où $f:[0,+\infty[\to\mathbb{C}$ est continue.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{C}$ pour que si $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$, toute solution de E tend vers 0 en $+\infty$.

Généraliser à une équation de la forme $y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x)$

(ou même d'ordre r)

Condition nécessaire :

La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x)=Ke^{-a.x}$.

On note g une solution de l'équation. Ainsi, $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

Donc la solution générale est $y(x)=Ke^{-a.x}+g(x)$. Il faut donc que $\mathrm{Re}(a)>0$.

Cette condition est aussi suffisante :

Variation de la constante :

On cherche une solution sous la forme $y(x)=K(x)e^{-a.x}$

Ainsi, K vérifie $K'(x)e^{-a.x}=f(x)$, soit $K(x)=\int_0^x f(t)e^{a.t}dt+K'$,

Et une solution de (E) s'écrit sous la forme $g(x)=\left(\int_0^x f(t)e^{a.t}dt+K'\right)e^{-a.x}$

On va montrer que $e^{-a.x}\int_0^x f(t)e^{a.t}dt\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $T\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall t\geq T, |f(t)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{Re}(a)=\varepsilon'$

Ainsi, pour $x\geq T$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)e^{a.t}dt\right| &\leq \left|\int_0^T f(t)e^{a.t}dt\right|+\left|\int_T^x f(t)e^{a.t}dt\right|\\ &\leq A+\int_T^x|f(t)||e^{a.t}|dt\\ &\leq A+\varepsilon'\int_T^x e^{\mathrm{Re}(a).t}dt\\ &\leq A+\frac{\varepsilon'}{\mathrm{Re}(a)}(e^{\mathrm{Re}(a).x}-e^{\mathrm{Re}(a).T})\leq A+\frac{\varepsilon'}{\mathrm{Re}(a)}e^{\mathrm{Re}(a).x}\end{aligned}$$

Et donc pour $x\geq T$, $\left|e^{-a.x}\int_0^x f(t)e^{a.t}dt\right|\leq Ae^{-\mathrm{Re}(a)x}+\frac{\varepsilon'}{\mathrm{Re}(a)}=Ae^{-\mathrm{Re}(a)x}+\frac{\varepsilon}{2}$

Or, il existe $X\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall x\geq X, Ae^{-\mathrm{Re}(a)x}\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour $x\geq\max(T,X)$, $\left|e^{-a.x}\int_0^x f(t)e^{a.t}dt\right|\leq\varepsilon$

Et donc $e^{-a.x}\int_0^x f(t)e^{a.t}dt\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

Donc la condition est aussi suffisante.

Soient α,β les racines complexes de $r^2+a.r+b=0$

On note D l'opérateur de dérivation :

Ainsi, $D^2+a.D+b\mathrm{Id}=(D-\alpha.\mathrm{Id})\circ(D-\beta.\mathrm{Id})$

Une condition nécessaire et suffisante est que $\mathrm{Re}(\alpha)<0$ et $\mathrm{Re}(\beta)<0$.

En effet, la condition est nécessaire :

Soit g_0 une solution particulière de l'équation.

Une autre solution de cette équation est $t \mapsto g_0(t) + e^{\alpha.t}$, qui doit tendre vers 0 en $+\infty$. Ainsi, $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et de même $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.

La condition est suffisante :

Soit *y* une solution de l'équation.

Alors $(D - \alpha.\mathrm{Id}) \circ \underbrace{(D - \beta.\mathrm{Id})(y)}_{z} = f$. Donc d'après le cas précédent, $z \underset{+\infty}{\to} 0$ (puisque *z* vérifie $z' - \alpha.z = f$ et $\mathrm{Re}(-\alpha) > 0$)

Puis par définition de *z*, $(D - \beta.\mathrm{Id})(y) = z$, donc comme *z* tend vers 0, toujours d'après la première partie on aura $y \underset{+\infty}{\to} 0$, d'où le résultat.

Remarque :

Le cas général est le théorème de Lyapunov :

Pour *f* tendant vers 0, toute solution de $(E_r) : y^{(r)} + a_1 y^{(r-1)} + \ldots + a_r y = f$ tend vers 0 si et seulement si les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles strictement négatives.

B) Wronskien et systèmes fondamentaux de solutions d'une équation homogène

- Cadre :

On considère des équations de la forme

$(e) : x'(t) = a(t).x(t)$ avec $\begin{array}{l} a : I \to L(E) \\ t \mapsto a(t) \end{array}$ continue, où *E* est un espace de dimension *n* finie.

On peut l'écrire sous forme matricielle $X'(t) = A(t) \times X(t)$

Rappel :

L'ensemble $S_{(e)}$ des solutions de (*e*) sur *I* est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, E)$ de dimension *n*.

Et pour tout $t_0 \in I$, $\begin{array}{l} \theta_{t_0} : S_{(e)} \to E \\ \varphi \mapsto \varphi(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

- Système fondamental de solution de (*E*) :

Définition :

On appelle système fondamental de solution de (*E*) toute base $(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ de $S_{(e)}$.

- Wronskien :

Définition :

Soit $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ un système de *n* solutions de (*E*) (pas forcément un système fondamental). On fixe une base $\mathfrak{B}_0$ de *E*.

On appelle Wronskien de $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ dans $\mathfrak{B}_0$ l'application :

$$\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto W_{(\alpha_1, \ldots \alpha_n), \mathfrak{B}_0} = \det_{\mathfrak{B}_0}(\alpha_1(t), \ldots \alpha_n(t)) \end{array}$$

Remarque :

Si on remplace $\mathfrak{B}_0$ par une autre base $\mathfrak{B}_1$,

Alors $W_{(\alpha_1,\dots\alpha_n),\mathfrak{B}_0} = \det_{\mathfrak{B}_0}(\mathfrak{B}_1).W_{(\alpha_1,\dots\alpha_n),\mathfrak{B}_1}$

Démonstration :

Si $M(t)=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(\alpha_1(t),\dots\alpha_n(t))$ et $\hat{M}(t)=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_1}(\alpha_1(t),\dots\alpha_n(t))$, et en notant P la matrice de passage de $\mathfrak{B}_0$ à $\mathfrak{B}_1$, on a $M(t)=P\hat{M}(t)$,

et donc $\det(M(t))=\det(P)\det(\hat{M}(t))$

Théorème :

On note $\mathfrak{B}_0$ une base de *E*.

On suppose que l'application $t\mapsto a(t)\in L(E)=L_c(E)$ est continue.

Soient $\varphi_1,\dots\varphi_n$ des solutions sur *I* de (*e*).

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ est un système fondamental de solution.

(2) $W_{(\varphi_1,\dots\varphi_n),\mathfrak{B}_0}$ ne s'annule pas sur *I*.

(3) $W_{(\varphi_1,\dots\varphi_n),\mathfrak{B}_0}$ n'est pas la fonction nulle.

Démonstration :

On sait que pour tout $t\in I$, $\begin{array}{rl}\theta_t : S_{(e)} & \to E \\ \varphi & \mapsto \varphi(t)\end{array}$ est un isomorphisme.

$(1)\Rightarrow(2)$: Soit $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ un système fondamental de solution et soit $t\in I$.

Alors $(\theta_t(\varphi_1),\dots\theta_t(\varphi_n))$ est une base de *E*.

Donc $W_{(\varphi_1,\dots\varphi_n),\mathfrak{B}_0}(t)=\det_{\mathfrak{B}_0}(\theta_t(\varphi_1),\dots\theta_t(\varphi_n))\neq 0$

$(2)\Rightarrow(3)\dots$

$(3)\Rightarrow(1)$: On suppose que $W_{(\varphi_1,\dots\varphi_n),\mathfrak{B}_0}(t_0)\neq 0$ pour $t_0\in I$.

Alors $(\theta_{t_0}(\varphi_1),\dots\theta_{t_0}(\varphi_n))$ est une base de *E*, donc $(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ est une base de $S_{(e)}$.

- Complément : expression du Wronskien :

Lemme :

Soit *E* un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie *n*, et $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Pour tout $(v_1,\dots v_n)\in E^n$ et toute base $\mathfrak{B}_0$ de *E*,

$$\sum_{j=1}^{n}\det_{\mathfrak{B}_0}(v_1,\dots v_{j-1},u(v_j),v_{j+1},\dots v_n)=\mathrm{Tr}(u)\times\det_{\mathfrak{B}_0}(v_1,\dots v_n)$$

Remarque :

On a $\det_{\mathfrak{B}_0}(u(v_1),\dots u(v_n))=\det(u).\det_{\mathfrak{B}_0}(v_1,\dots v_n)$ (il suffit de voir avec les matrices)

Démonstration :

Posons $\psi(v_1,\dots v_n)=\sum_{j=1}^{n}\det_{\mathfrak{B}_0}(v_1,\dots v_{j-1},u(v_j),v_{j+1},\dots v_n)$

Alors ψ est *n*-linéaire, et alternée :

On suppose que $v_k=v_l$ pour $1\leq k<l\leq n$

Ainsi, il reste

$$\begin{aligned}\psi(v_1,\dots v_n)&=\det_{\mathfrak{B}_0}(v_1,\dots v_{k-1},u(v_k),v_{k+1},\dots v_n)+\det_{\mathfrak{B}_0}(v_1,\dots v_{l-1},u(v_l),v_{l+1},\dots v_n)\\&=0\end{aligned}$$

Mais l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E^n est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1, donc il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = k \det_{\mathfrak{B}_0}$

Calcul de k : on a $k = \varphi(\mathfrak{B}_0)$.

On note $\mathfrak{B}_0 = (e_1,...e_n)$, et $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(u)$.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!], u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$

Donc

$$\varphi(\mathfrak{B}_0) = \det(a_{1,1}e_1 + ... + a_{n,1}e_n, e_2,...e_n) + ...$$
$$= a_{1,1} + a_{2,2} + ... = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u)$$

Application au Wronskien :

Proposition :

Soient $\alpha_1,...\alpha_n$ n solutions de (E). Alors il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall t \in I, W_{(\alpha_1,...\alpha_n),\mathfrak{B}_0}(t) = Ke^{\int \mathrm{Tr}(a(t))dt}$$

Remarque :

On comprend maintenant pourquoi $(2) \Leftrightarrow (3)$ dans le théorème précédent.

Démonstration :

On pose $W(t) = W_{(\alpha_1,...\alpha_n),\mathfrak{B}_0}(t) = \det_{\mathfrak{B}_0}(\alpha_0(t),...\alpha_n(t))$

Comme les $\alpha_i, i = 1..n$ sont de classe C^1, W est de classe C^1 et

$$\forall t \in I, W'(t) = \det_{\mathfrak{B}_0}(\alpha'_1(t), \alpha_2(t)...\alpha_n(t)) + \det_{\mathfrak{B}_0}(\alpha_1(t), \alpha'_2(t),...) + ...$$

Or, $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall t \in I, \alpha'_i(t) = a(t).\alpha_i(t)$

Donc

$$\forall t \in I, W'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathfrak{B}_0}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)...a(t).\alpha_j(t),...\alpha_n(t))$$
$$= \mathrm{Tr}(a(t))\det_{\mathfrak{B}_0}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)...\alpha_n(t)) = \mathrm{Tr}(a(t))W(t)$$

Donc W est solution de l'équation différentielle $W'(t) = \mathrm{Tr}(a(t)).W(t)$, d'où son expression.

C) Méthode de variation des n constantes

- Problème :

On suppose résolue $(e): x'(t) = a(t).x(t)$ et on veut résoudre $(E): x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$ dans E de dimension n,

C'est-à-dire qu'on connaît un système fondamental de solution de (e) $(\varphi_1,...\varphi_n)$.

- Lemme :

Pour toute fonction $\psi : I \to E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1,...\lambda_n)$ de fonctions scalaires $\lambda_i : I \to \mathbb{K}$ telles que $\forall t \in I, \psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\varphi_j(t)$

De plus, ψ est de classe C^1 si et seulement si toutes les λ_i le sont.

Démonstration :

Comme $(\varphi_1,...\varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de (*e*), pour tout $t\in I$, $(\varphi_1(t),...\varphi_n(t))=(\theta_t(\varphi_1),...\theta_t(\varphi_n))$ est une base de *E*.

Donc $\psi(t)$ se décompose de manière unique en $\psi(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\varphi_j(t)$

Caractérisation C^1 :

Si les λ_i sont de classe C^1, ψ l'est aussi.

Réciproquement, supposons que ψ est de classe C^1.

Soit $\mathfrak{B}_0$ une base de *E*. On a, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\det_{\mathfrak{B}_0}(\varphi_1(t),...\varphi_{j-1}(t),\psi(t),\varphi_{j+1}(t),...\varphi_n(t)) &= \lambda_j(t)\det_{\mathfrak{B}_0}(\varphi_1(t),...\varphi_n(t))\\ &= \lambda_j(t)\underbrace{W_{(\varphi_1,...\varphi_n),\mathfrak{B}_0}(t)}_{\neq 0}\end{aligned}$$

Donc $\lambda_j(t)=\dfrac{\det_{\mathfrak{B}_0}(\varphi_1(t),...\varphi_{j-1}(t),\psi(t),\varphi_{j+1}(t),...\varphi_n(t))}{W_{(\varphi_1,...\varphi_n),\mathfrak{B}_0}(t)}$, donc λ_j est de classe C^1.

- Méthode de variation des *n* constantes :

Théorème :

Sous les hypothèses précédentes,

Pour $x:I\rightarrow E$ de classe C^1, on pose $x(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\varphi_j(t)$.

Alors les λ_j sont de classe C^1, et *x* est solution de (*E*) si et seulement si

$\forall t\in I,\sum_{j=1}^{n}\lambda'_j(t)\varphi_j(t)=b(t)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall t\in I,\forall j\in[\![1,n]\!],\lambda'_j(t)=\frac{\det_{\mathfrak{B}_0}(\varphi_1(t),...\varphi_{j-1}(t),b(t),\varphi_{j+1}(t),...\varphi_n(t))}{W_{(\varphi_1,...\varphi_n),\mathfrak{B}_0}(t)}$$

Démonstration :

Comme *x* et les λ_j, φ_j sont de classe C^1, on a :

$$\begin{aligned}\forall t\in I,x'(t) &= \sum_{j=1}^{n}\lambda'_j(t)\varphi_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\varphi'_j(t)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda'_j(t)\varphi_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)a(t).\varphi_j(t)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda'_j(t)\varphi_j(t)+a(t).x(t)\end{aligned}$$

Donc *x* est solution de (*E*) si et seulement si $\forall t\in I,\sum_{j=1}^{n}\lambda'_j(t)\varphi_j(t)=b(t)$.

D) Remarque : autre interprétation de la méthode de variation des n constantes

Soit $t_0 \in I$, $(\varphi_1,...\varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (E).

On note $\mathfrak{B}_0 = (\varphi_1(t_0),...\varphi_n(t_0))$, base de E.

Et on note $M(t) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(\varphi_1(t),...\varphi_n(t))$, $A(t) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(a(t))$.

Alors M est de classe C^1, et :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, M'(t) &= \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(\varphi'_1(t),...\varphi'_n(t)) \\ &= \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(a(t).\varphi_1(t),...a(t).\varphi_n(t)) \\ &= A(t)\times M(t)\end{aligned}$$

Et $M(t_0) = I_n$

Donc M est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} M'(t) = A(t)\times M(t) \\ M(t_0) = I_n \end{cases}$

Si maintenant E est un espace de Banach quelconque :

On considère le problème de Cauchy dans $L_C(E)$:

$$(*)\begin{cases} \forall t \in I, m'(t) = a(t)\circ m(t) \\ m(t_0) = \mathrm{Id}_E \end{cases}$$

Peut-on appliquer le théorème de Cauchy ?

Déjà, E est complet.

Pour tout $t \in I$, $A(t) : \begin{array}{l} L_C(E) \to L_C(E) \\ f \mapsto a(t)\circ f \end{array}$ est un endomorphisme continu de $L_C(E)$

Et $t \in I \mapsto A(t) \in L_C(L_C(E))$ est continu ($|||A(t)-A(s)||| \leq \|a(t)-a(s)\|$)

Donc (*) a une unique solution $m : I \to L_C(E)$ telle que $m(t_0) = \mathrm{Id}_E$

Définition (Hors programme) :

m s'appelle la résolvante de (e).

NB : pour tout $t \in I$, $m(t)$ est un automorphisme continu de E.

En effet, il est déjà continu.

Soit de plus $t_1 \in I$. On note m_2 la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, u'(t) = a(t)\circ u(t) \\ u(t_1) = \mathrm{Id}_E \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in I$, $m_2(t)\circ m(t_1) = m(t)$.

En effet, l'application $f : t \mapsto m_2(t)\circ m(t_1)$ (à valeurs dans $L_C(E)$) est de classe C^1 et vérifie :

$\forall t \in I, f'(t) = m'_2(t)\circ m(t_1) = a(t)\circ m_2(t)\circ m(t_1) = a(t)\circ f(t)$

Et $f(t_1) = \mathrm{Id}_E \circ m(t_1) = m(t_1)$

Donc $g = f - m$ est solution de $\begin{cases} \forall t \in I, g'(t) = a(t)\circ g(t) \\ g(t_1) = 0_{L_c(E)} \end{cases}$

Dont une autre solution est la solution qui à t associe l'endomorphisme nul.

Et par unicité de la solution, on a $g = 0$, et donc $f = m$

Donc $\forall t \in I, m_2(t)\circ m(t_1) = m(t)$, puis en prenant $t = t_0$, $m_2(t_0)\circ m(t_1) = \mathrm{Id}_E$

Donc $m(t_1)$ est inversible à gauche.

On a ensuite de la même façon $\forall t \in I, m(t) \circ m_2(t_0) = m_2(t)$

Et donc en t_1 : $m(t_1) \circ m_2(t_0) = \mathrm{Id}_E$

D'où on tire que $m(t_1)$ est bien un automorphisme de E.

Variation de la constante :

On veut résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (E)\, x'(t) = a(t).x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Pour $\lambda : I \to E$ de classe C^1, on pose $x(t) = m(t).\lambda(t)$ où m est la résolvante de (E). Ainsi, $x : I \to E$ est de classe C^1, et :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, x'(t) &= m'(t).\lambda(t) + m(t).\lambda'(t) \\ &= (a(t) \circ m(t)).\lambda(t) + m(t).\lambda'(t) \\ &= a(t).x(t) + m(t).\lambda'(t) \end{aligned}$$

Donc x est solution de (E) si et seulement si $\forall t \in I, m(t).\lambda'(t) = b(t)$

C'est-à-dire $\forall t \in I, \lambda'(t) = (m(t))^{-1}.b(t)$

Ou $\lambda(t) = \int (m(t))^{-1}.b(t)dt$

Et donc la solution du problème de Cauchy est $x(t) = m(t).\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} (m(s))^{-1}.b(s)ds \right)$

E) Equations à coefficients constants

Problème :

On cherche à résoudre $(e) : x'(t) = A.x(t)$ où $x : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$

$(E) : x'(t) = A.x(t) + B(t)$ où $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ est continu

Ou $(e) : x'(t) = a(x(t))$ où a est un endomorphisme fixé d'un espace de Banach E.

$(E) : x'(t) = a(x(t)) + b(t)$ où $b : I \to E$ est continu.

Révisions d'algèbre linéaire :

- Méthode de résolution de $X' = AX$ où A est une matrice constante.

(1) Si A est diagonalisable :

On note $(\vec{V}_1, \dots \vec{V}_n)$ une base de vecteurs colonnes propres, $\vec{V}_i$ associé à λ_i. Pour une condition initiale $(t_0, \vec{x}_0)$, si on note $\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{V}_j$, la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ est alors $X(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{\lambda_j (t-t_0)} \vec{V}_j$

Démonstration : il suffit de vérifier que la solution proposée convient…

(2) Utilisation de l'exponentielle :

Théorème :

La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ est $X(t) = e^{(t-t_0)A} \vec{x}_0$

Démonstration :

$t\in\mathbb{R}\mapsto e^{t.A}$ est de classe C^1 de dérivée $t\mapsto A.e^{t.A}$

Donc $\varphi: t\mapsto e^{(t-t_0).A}.\vec{x}_0$ est de classe C^1, de dérivée $\varphi'(t)=Ae^{(t-t_0).A}.\vec{x}_0=AX(t)$

Comme de plus $\varphi(t_0)=\vec{x}_0$, φ est la solution cherchée.

Remarque :

La résolvante de l'équation $X'=AX$ est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases}M'(t)=A.M(t)\\ M(t_0)=I_n\end{cases}$, c'est-à-dire $t\mapsto e^{(t-t_0).A}$.

Autrement dit, les vecteurs–colonnes de $e^{t.A}$ forment un système fondamental de solution de $X'=AX$

(3) Résolution par réduction :

Si on peut écrire $A=PRP^{-1}$ où $P\in GL_n(\mathbb{K})$, alors $X: t\mapsto X(t)$ est solution de $X'=AX$ si et seulement si $Y: t\mapsto P^{-1}X(t)$ est solution de $Y'=RY$.

Par exemple, si $R=\begin{pmatrix}a_{1,1} & & *\\ & \ddots & \\ (0) & & a_{n,n}\end{pmatrix}$, l'équation $Y'=RY$ s'écrit alors

$\begin{cases}y'_1=a_{1,1}y_1+\dots+a_{1,n}y_n\\ \qquad\vdots\\ y'_n=\qquad a_{n,n}y_n\end{cases}$ Où $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

On résout alors le système en cascade en commençant par la dernière.

(4) Cas où $A\in M_n(\mathbb{R})$ non trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

On réduit A sur $\mathbb{C}$:

Si A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) :

Si $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ aussi.

Dans la diagonalisation de A, si on prend $(V_1(\lambda),\dots V_p(\lambda))\in M_{n,1}(\mathbb{C})^p$ comme base de $E_\lambda(A)$, il faut prendre $(\overline{V_1}(\lambda),\dots\overline{V_p}(\lambda))$ comme base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$.

Exemple :

Si $A\in M_3(\mathbb{R})$ a pour valeurs propres $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta,\overline{\beta}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

On note $\vec{v}_1$ un vecteur propre associé à α, $\vec{v}_2$ associé à β et $\vec{v}_3=\overline{\vec{v}_2}$ associé à $\overline{\beta}$.

La solution générale de $X'=AX$ complexe est $X(t)=ae^{\alpha.t}\vec{v}_1+be^{\beta.t}\vec{v}_2+ce^{\overline{\beta}.t}\vec{v}_3$ où a, b, c sont complexes.

X est une solution réelle si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}, X(t)=\overline{X}(t)$

Ce qui, du fait que $\{t\mapsto e^{\lambda.t},\lambda\in\mathbb{C}\}$ est libre, revient à $\begin{cases}a\in\mathbb{R}\\ c=\overline{b}\end{cases}$

La solution réelle générale de $X'=AX$ s'écrit donc

$X(t)=ae^{\alpha.t}\vec{v}_1+be^{\beta.t}\vec{v}_2+\overline{b}e^{\overline{\beta}.t}\overline{\vec{v}_2}$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{C}$.

- Equation d'ordre r :

$X^{(r)}(t)=A_{r-1}X^{(r-1)}(t)+\dots+A_0X(t)$

Où $\forall j\in[\![0,r-1]\!], A_j\in M_n(\mathbb{K})$ et $X: t\mapsto X(t)\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est de classe C^r

Par exemple, avec $r=2$: $(E_2): X''(t) = A_1X'(t) + A_0X(t)$

Equation d'ordre 1 associée :

On pose $Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$.

Alors X est solution de (E_2) si et seulement si $Y' = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix} Y$

On est alors ramené au problème précédent.

Cas usuel :

$x^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j x^{(j)}(t)$ où $\forall j \in [\![1, r-1]\!], a_j \in \mathbb{K}$

L'équation d'ordre 1 associée est $Y' = MY$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{r-1} \end{pmatrix} \in M_r(\mathbb{K})$

NB :

M est un matrice compagnon, donc est diagonalisable si et seulement si χ_M est scindé à racines simples c'est-à-dire si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{rg}(M - \lambda.I_r) \geq r-1$.

- Méthode par l'équation caractéristique pour une équation scalaire (E_r).

$(E_r): x^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j x^{(j)}(t)$

L'application $t \mapsto e^{\lambda.t}$ est solution de (E_r) si et seulement si

$\lambda^r = \sum_{j=0}^{r-1} a_j \lambda^j$ (équation caractéristique)

On suppose que $X^r - \sum_{j=0}^{r-1} a_j X^j$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Ainsi, on peut écrire $X^r - \sum_{j=0}^{r-1} a_j X^j = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$ où les λ_i sont distincts.

Théorème :

$\{t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}, i \in [\![1, p]\!], 0 \leq k \leq m_i - 1\}$ est une base de solutions de (E_r).

Démonstration :

Déjà, la famille est libre.

L'ensemble des solutions de (E_r) est un $\mathbb{K}$-ev de dimension *r*.

Reste à montrer que tous les éléments sont bien solutions :

Il faut montrer que si λ est racine d'ordre m de l'équation caractéristique, et $0 \leq k \leq m-1$, alors $t \mapsto t^k e^{\lambda.t}$ est solution de (E_r)

Si $\lambda = 0$, alors $a_0 = a_1 = ... = a_{m-1} = 0$

Donc l'équation s'écrit $(E_r): x^{(r)} = a_m x^{(m)} + ... + a_{r-1} x^{(r-1)}$

Et pour tout $k \leq m-1$, $t \mapsto t^k$ est bien solution (les deux membres de l'équation sont nuls)

Si $\lambda \neq 0$:

On pose $y(t) = e^{-\lambda.t} x(t)$.

Alors la formule de Leibniz donne $\forall j \in [\![1, r-1]\!], \forall t \in I, x^{(j)}(t) = e^{\lambda.t}\left(\sum_{l=0}^{j} C_j^l \lambda^l y^{(j-l)}\right)$

Donc x est solution de (E_r) si et seulement si y est solution de $(E'_r): y^{(r)} = \sum_{j=0}^{r-1} b_j y^{(j)}$ où les b_j s'expriment en fonction de λ et des a_j.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $t \mapsto e^{\mu.t}$ soit solution de (E'_r) est que $t \mapsto e^{(\lambda+\mu).t}$ soit solution de (E_r), c'est-à-dire que $P(\lambda+\mu) = 0$ où P est l'équation caractéristique de (E_r).

Or, 0 est racine d'ordre m de $P(\lambda + X)$, équation caractéristique de (E'_r).

Donc $t \mapsto t^k$ est solution de (E'_r) pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$.

Donc $t \mapsto t^k e^{\lambda.t}$ est solution de (E_r) pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$.

- Variation des constantes pour résoudre $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Méthode 1 :

On résout $X' = AX$, et on prend un système fondamental de solutions $t \mapsto x_j(t)$ ($j \in [\![1, n]\!]$)

Si par exemple A est diagonalisable, on prend $(V_1, \dots V_n)$ une base de vecteurs propres, les V_i associés aux valeurs propres λ_i. Ainsi, $x_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ convient.

Pour résoudre $X'(t) = AX(t) + B(t)$, on pose alors $X(t) = \sum_{j=1}^{n} k_j(t) x_j(t)$ où $k_j : I \to \mathbb{C}$. Ainsi, X est de classe C^1 si et seulement si les k_j le sont. Et X est solution de $X'(t) = AX(t) + B(t)$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \sum_{j=1}^{n} k'_j(t) x_j(t) = B(t)$$

On a un système de Cramer en les k'_j, qu'on peut résoudre.

Méthode 2 :

On pose $X(t) = \exp(t.A).Y(t)$

Alors $X'(t) = AX(t) + B(t) \Leftrightarrow Y'(t) = \exp(-t.A).B(t)$

F) Equations scalaires d'ordre 2 à coefficients variables

On considère l'équation résolue $(E): x''(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t) + c(t)$

Où $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ sont continues.

On note $(e): x''(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t)$

L'équation d'ordre 1 associée est $(F): y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$

- Théorème de Cauchy.

Théorème :

Pour toute condition initiale (t_0, x_0, x_1), le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$ a une unique solution.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy à (*F*).

Corollaire :

L'ensemble $S_{(E)}$ des solutions de (*E*) est un espace affine de dimension 2 de direction l'ensemble des solutions $S_{(e)}$ de (*e*), espace vectoriel de dimension 2. Pour tout $t_0 \in I$, $\begin{array}{l} S_{(E)} \to \mathbb{K}^2 \\ \varphi \mapsto (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$ est une bijection affine, et $\begin{array}{l} S_{(e)} \to \mathbb{K}^2 \\ \varphi \mapsto (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

- Système fondamental de solutions de (*e*), Wronskien :

Définition :

On appelle système fondamental de solutions de (*e*) toute base de $S_{(e)}$.

Théorème :

(x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de $(e): x''(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t)$ si et seulement si $y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}$ et $y_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ constituent un système fondamental de solutions de $y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} y(t)$.

Définition :

On appelle Wronskien d'un couple de solutions (x_1, x_2) de (*e*) l'application W définie par $\forall t \in I, W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le Wronskien de (y_1, y_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, où $y_j = \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix}$.

Théorème :

Soient x_1, x_2 deux solutions de (*e*). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) (x_1, x_2) est un système fondamental de solution de (*e*).

(2) Le Wronskien $x_1 x'_2 - x_2 x'_1$ ne s'annule pas

(3) Le Wronskien $x_1 x'_2 - x_2 x'_1$ n'est pas la fonction nulle.

Démonstration :

On revient à $(f): y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} y(t)$ et on applique les théorèmes correspondants.

Exercice :

Soient x_1, x_2 deux solutions de $(e): x''(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t)$.

On pose $W = x_1 x_2' - x_2 x_1'$. Montrer que $\forall t \in I, W'(t) = b(t)W(t)$.

Démonstration :
On peut encore se ramener à (*f*), ou :

$W' = x_1 x_2'' + x_1' x_2' - x_2 x_1'' - x_1' x_2'$

$\quad = x_1(a x_2 + b x_2') - x_2(a x_1 + b x_1')$

$\quad = b \times W$

- Peut-on résoudre une équation de la forme $x''(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t)$ à l'aide de primitives ?

Réponse : en général, non (Liouville)
Cas qu'on sait résoudre (et à savoir résoudre !) :

- Si les coefficients sont constants
- Equation d'Euler : $(E): t^2 x''(t) = \alpha.t.x'(t) + \beta.x(t)$ où α, β sont des constantes.

On l'écrit $x''(t) = \alpha.\dfrac{x'(t)}{t} + \beta.\dfrac{x(t)}{t^2}$ sur I ne contenant pas 0.

Propriété (Hors programme) :

Pour $r \in \mathbb{C}$, l'application $t \in I \mapsto |t|^r = e^{r \ln|t|}$ est solution de (E) si et seulement si $r.(r-1) = \alpha.r + \beta$ $(*)$.

Si $(*)$ a deux racines r_1, r_2 distinctes, alors $(t \mapsto |t|^{r_1}, t \mapsto |t|^{r_2})$ est un système fondamental de solutions de l'équation.

Si $(*)$ a une racine double r_0, alors $(t \mapsto |t|^{r_0}, t \mapsto |t|^{r_0} \ln|t|)$ est un système fondamental de solution de l'équation.

Démonstration :
Il n'y a qu'à vérifier…

- On peut chercher des solutions développables en séries entières.

- Méthode de variation des deux constantes :

On suppose que (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de
$(e): x''(t) = a(t).x(t) + b(t).x'(t)$,
et on veut résoudre $(E): x''(t) = a(t).x(t) + b(t).x'(t) + c(t)$
Méthode :

Pour $x : I \to \mathbb{K}$, on pose $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t)\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire $\begin{cases} x(t) = \lambda(t)x_1(t) + \mu(t)x_2(t) & (1) \\ x'(t) = \lambda(t)x_1'(t) + \mu(t)x_2'(t) & (2) \end{cases}$

Lemme :
x est de classe C^2 si et seulement si λ et μ sont de classe C^1.
Démonstration :
Le sens $\Leftarrow$ est clair (avec (2)). Pour l'autre :

On remarque que le système d'équations $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ d'inconnues λ, μ a pour déterminant le Wronskien $W = x_1 x_2' - x_2 x_1'$, qui ne s'annule pas. Donc en résolvant le système, $\lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} x & x_2 \\ x' & x_2' \end{vmatrix}}{W}$. Donc λ est de classe C^1 et de même pour $\mu = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & x \\ x_1' & x' \end{vmatrix}}{W}$

Maintenant :

En dérivant (1), on a $x'=\lambda' x_1+\mu' x_2+\lambda.x_1'+\mu.x_2'$

Et avec (2), on obtient $\lambda' x_1+\mu' x_2=0$ (3)

En dérivant (2), on a $x''=\lambda' x_1'+\mu' x_2'+\lambda.x_1''+\mu.x_2''$

Et (*E*) devient : $\lambda' x_1'+\mu' x_2'+\lambda.x_1''+\mu.x_2''=a.(\lambda.x_1+\mu.x_2)+b.(\lambda.x_1'+\mu.x_2')+c$

Et donc sachant que x_1 et x_2 sont solutions de (*e*) : $\lambda' x_1'+\mu' x_2'=c$ (4)

Le système constitué de (3) et (4) est de Cramer en les inconnues λ', μ' et de déterminant $W=x_1x_2'-x_1x_1'$ ne s'annulant pas.

Donc $\lambda'=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & x_2\\ c & x_2'\end{vmatrix}}{W}$ et $\mu'=\dfrac{\begin{vmatrix}x_1 & 0\\ x_1' & c\end{vmatrix}}{W}$.

Puis après calcul de primitives, on obtient une solution *x* de (*E*).

Remarque :

On a simplement appliqué la méthode de variation des constantes à (*f*) dont $\begin{pmatrix}x_1\\ x_1'\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_2\\ x_2'\end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solutions.

Exemple :

Résoudre $x^2y''(x)+4x.y'(x)+2y(x)=\ln(1-x)$

Domaine d'étude : $]-\infty,1[$

Sur $I=]-\infty,0[$ ou $]0;1[$, l'équation est résolue et on peut appliquer le théorème de Cauchy.

On considère $(e): x^2y''(x)+4x.y'(x)+2y(x)=0$

Alors $x\mapsto |x|^r$ est solution si et seulement si $r(r-1)+4r+2=0$ c'est-à-dire si et seulement si $r=-1$ ou –2.

Donc, sur *I*, la solution générale de (*e*) est $y(x)=\dfrac{\lambda}{x}+\dfrac{\mu}{x^2}$.

Variation des constantes :

On pose $\begin{pmatrix}y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix}=\lambda(x)\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\ -\frac{1}{x^2}\end{pmatrix}+\mu(x)\begin{pmatrix}\frac{1}{x^2}\\ -\frac{2}{x^3}\end{pmatrix}$

On obtient alors $\begin{cases}\lambda'(x)\times\dfrac{1}{x}+\mu'(x)\dfrac{1}{x^2}=0\\ \lambda'(x)\times\dfrac{-1}{x^2}+\mu'(x)\dfrac{-2}{x^3}=\dfrac{\ln(1-x)}{x^2}\end{cases}$

Qui est équivalent à $\begin{cases}\mu'(x)=-x.\lambda'(x)\\ \lambda'(x)=\ln(1-x)\end{cases}$

- Variation d'une seule constante :

Si on connaît une solution non nulle x_1 de $(e): x''(t)=a(t)x(t)+b(t)x'(t)$,

Alors sur tout intervalle *J* où x_1 ne s'annule pas, pour résoudre (*e*) ou (*E*) on peut poser $x(t)=y(t)x_1(t)$.

(NB : x est de classe C^2 si et seulement si y l'est)
Et x est solution de (E) si et seulement si y vérifie
$y''.x_1 + 2y'.x_1' + y.x_1'' = a.y.x_1 + b.(y'.x_1 + y.x_1') + c$
C'est-à-dire $(E') : y''(t).x_1(t) = y'(t).(b(t).x_1(t) - 2x_1'(t)) + c(t)$
Qui est une équation du premier ordre en y'.

- Changement d'inconnue, changement de variable dans les équations différentielles d'ordre 2 :

Problème :
On veut résoudre $(E) : y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x)$
- Changement d'inconnue :

Si par exemple on sait que y_0 est solution de $(e) : y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ et que y_0 ne s'annule pas, en faisant le changement d'inconnue $y = z.y_0$ on obtient une équation différentielle d'ordre 2 en z telle que $z = 1$ soit solution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire une équation d'ordre 1 en z'.
- Changement de variable :

On pose $y(x) = z(t)$ où $t = \varphi(x)$, φ étant un C^2-difféomorphisme.
Remarque : on est obligé en même temps de faire un changement d'inconnue.

Exemple :
Résoudre $y'' + \frac{A}{x^2}y = 0$ en posant $t = \ln x$ et $z(t) = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}$
Sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞, et $x \in]0,+\infty[\mapsto \ln x \in \mathbb{R}$ est un C^∞-difféomorphisme.
Donc y est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Et $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}z(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{x}}z'(\ln x)$,
$$y''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}z(\ln x) + z'(\ln x)\left(\frac{1}{2}x^{-3/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + x^{-3/2}z''(\ln x)$$
Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si
$$\forall x > 0, \frac{-1}{4}x^{-3/2}z(\ln x) + x^{-3/2}z''(\ln x) + \frac{A}{x^{3/2}}z(\ln x) = 0$$
C'est-à-dire si et seulement si
$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + (A - \tfrac{1}{4})z(t) = 0$$
Si par exemple $A - \frac{1}{4} > 0$, on a alors $z(t) = \alpha\cos\omega.t + \beta\sin\omega.t$ où $\omega = \sqrt{A - \frac{1}{4}}$
Puis $\forall x > 0, y(x) = \sqrt{x}(\alpha\cos(\omega\ln x) + \beta\sin(\omega\ln x))$