

Chapitre 20 : Fonctions de plusieurs variables réelles, calcul différentiel

Cadre :

On étudie les fonctions $f : \Omega \rightarrow F$ où Ω est un ouvert de E , E et F étant des espaces normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de dimension finie (certaines parties s'appliquent aux espaces de Banach)

I Topologie et continuité (rappel)

A) Connexité, connexité par arcs

Théorème :

Soit A une partie connexe par arcs de l'espace normé E . Alors les seules parties de A qui sont à la fois ouvertes et fermées dans A sont \emptyset et A .

Autrement dit, une partie connexe par arcs est connexe.

B) Fonctions coordonnées et fonctions partielles

On suppose E et F de dimension finie :

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E , $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F .

Alors $f : \Omega \rightarrow F$ peut s'écrire de manière unique $f = \sum_{k=1}^n F_k \vec{f}_k$ où les F_k sont des applications $F_k : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Les F_k s'appellent les applications coordonnées de f dans la base $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ de F .

Remarque :

On verra que f a une propriété analytique P si et seulement si toutes les F_k l'ont.

Soit $M_0 \in \Omega$, disons $M_0 = \sum_{j=1}^p a_j \vec{e}_j$.

Pour x voisin de a_j ($j \in \llbracket 1, p \rrbracket$), $a_1 \vec{e}_1 + \dots + x \vec{e}_j + \dots + a_p \vec{e}_p \in \Omega$, et l'application $g_{M_0, j} : x \mapsto f(a_1 \vec{e}_1 + \dots + x \vec{e}_j + \dots + a_p \vec{e}_p)$ définie au voisinage de a_j s'appelle j -ème application partielle de f en M_0 (relativement à la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de E)

Remarque :

Cette application partielle $g_{M_0, j}$ peut être identifiée à la restriction de f à $M_0 + \mathbb{K} \vec{e}_j$

On verra que si f a une propriété analytique, alors toutes les $g_{M_0, j}$ ont cette propriété, mais que la réciproque est souvent fautive.

Théorème :

Soit $f : \Omega \rightarrow F$. Alors :

- (1) f est continue si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont (dans une base quelconque de F)
- (2) Si f est continue, alors toutes les fonctions partielles sont continues, mais la réciproque est fautive.

Démonstration :

(1) Déjà connu

(2) Si f est continue, alors pour tout $M_0 \in \Omega$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $g_{M_0, j}$ est la composée de l'application $x \mapsto a_1 \bar{e}_1 + \dots + x \bar{e}_j + \dots + a_p \bar{e}_p$ qui est continue et de f , aussi continue. Donc $g_{M_0, j}$ est continue.

Remarque :

Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue, on prend le plus souvent des suites...

C) Cas de la dimension 2 : passage en polaire

Pour étudier $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow F$ au voisinage de $(a, b) \in \Omega$, on passe en polaire en posant $x = a + r \cos t$ et $y = b + r \sin t$.

Proposition :

f est continue en (a, b) si et seulement si $f(a + r \cos t, b + r \sin t)$ tend vers $f(a, b)$ quand r tend vers 0, uniformément par rapport à t , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall r \in [0, \alpha], \forall t \in \mathbb{R}, \|f(a + r \cos t, b + r \sin t) - f(a, b)\| \leq \varepsilon$$

Démonstration :

On a en effet $r = \|(a + r \cos t, b + r \sin t) - (a, b)\|_2 \dots$

Exemple :

Soient $\alpha, \beta > 0$.

On pose $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0 :

On a pour $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(r \cos t, r \sin t) - f(0, 0) = r^{\alpha + \beta - 2} |\cos t|^\alpha |\sin t|^\beta$

Donc si $\alpha + \beta > 2$, $|f(r \cos t, r \sin t) - f(0, 0)|$ tend uniformément vers 0 par rapport à t , donc f est continue en $(0, 0)$.

Si $\alpha + \beta \leq 2$, $|f(r \cos t, r \sin t) - f(0, 0)|$ ne tend pas uniformément vers 0, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

II Dérivée selon un vecteur, dérivée partielle

A) Dérivée de f en $A \in \Omega$ selon $\bar{u} \in E$.

On suppose ici que F et E sont des espaces de Banach, Ω un ouvert de E .

Définition :

Soit $f : \Omega \rightarrow F$.

On appelle dérivée de f en A selon $\bar{u} \in E$ le vecteur de F , s'il existe, défini par :

$$D_{\bar{u}}f(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\bar{u}) - f(A)}{h} \in F$$

NB : comme Ω est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B_O(A, \alpha) \subset \Omega$ donc pour $\|h\|\|\bar{u}\| < \alpha$, on a $A + h\bar{u} \in \Omega$

Autrement dit, f a une dérivée selon \bar{u} en A si la fonction de variable réelle $h \mapsto f(A + h\bar{u})$ est dérivable en 0.

B) Cas de la dimension finie : dérivée partielle par rapport à une base

Définition :

On note $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

On appelle j -ème dérivée partielle de f en A (pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$) la dérivée $D_{\bar{e}_j}f(A)$, lorsqu'elle existe.

Notation :

On note plutôt cette dérivée $(\partial_{j, \mathfrak{B}}f)(A)$ ou $(\partial_j f)(A)$

Si $E = \mathbb{R}^p$ et \mathfrak{B} est la base canonique de E , $(\partial_{j, \mathfrak{B}}f)(A)$ est aussi notée $\frac{\partial f}{\partial x_j}(A)$.

Remarque :

Lorsqu'elle existe, $(\partial_{j, \mathfrak{B}}f)(A)$ est la dérivée en a_j de la j -ème fonction partielle de f en A , $g_{A,j} : x \mapsto f(a_1 e_1 + \dots + x e_j + \dots + a_p e_p)$ où $A = \sum_{k=1}^p a_k e_k$.

Conséquence :

Le calcul des dérivées partielles se ramène à celui de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

Exemple :

On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^{x-y} \cos(xy)$

Alors f admet des dérivées partielles par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^2 (on dit aussi par rapport à x et y) en tout point et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-y} \cos(xy) + e^{x-y} (-y \sin(xy)).$$

Lorsque $(\partial_{j, \mathfrak{B}}f)(A)$ existe pour tout $A \in \Omega$, on note $\partial_{j, \mathfrak{B}}f$ l'application $\Omega \rightarrow F$. $\partial_{j, \mathfrak{B}}f$ s'appelle la j -ème dérivée partielle de f (par rapport à \mathfrak{B})
 $A \mapsto (\partial_{j, \mathfrak{B}}f)(A)$

Théorème :

Soient $f, g : \Omega \rightarrow F$ admettant des dérivées partielles en A (par rapport à \mathfrak{B}) et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f + g$ admet des dérivées partielles en A et :

$$(\partial_{j, \mathfrak{B}}(\lambda f + g))(A) = \lambda(\partial_{j, \mathfrak{B}}f)(A) + (\partial_{j, \mathfrak{B}}g)(A)$$

Démonstration :

On se ramène à des fonctions d'une variable.

III Applications différentiables et différentielles

A) Définition

Soient E, F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E .

$f : \Omega \rightarrow F$ est dite différentiable en $A \in \Omega$ lorsqu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de A , c'est-à-dire qu'il existe $l \in L_c(E, F)$ tel que

$$f(A + \vec{v}) \underset{\vec{v} \rightarrow \vec{0}}{=} f(A) + l(\vec{v}) + o(\|\vec{v}\|)$$

$$\text{Ou encore } \lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(A + \vec{v}) - f(A) - l(\vec{v})}{\|\vec{v}\|} = \vec{0}$$

Théorème :

Soit $f : \Omega \rightarrow F$. Si f est différentiable en A , alors elle est continue en A et admet en A une dérivée selon tout vecteur $\vec{u} \in E$, et $(D_{\vec{u}}f)(A) = l(\vec{u})$.

Démonstration :

(1) Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $r > 0$ tel que $\forall \vec{v} \in E, \|\vec{v}\| < r \Rightarrow \|f(A + \vec{v}) - f(A) - l(\vec{v})\|_F \leq \|\vec{v}\|_E$

Donc si $\|\vec{v}\| < r$, $\|f(A + \vec{v}) - f(A)\|_F \leq \|\vec{v}\|_E + \|l(\vec{v})\|_F \leq (1 + \|l\|)\|\vec{v}\|_E$

Donc pour $\|\vec{v}\|_E < \min\left(r, \frac{\varepsilon}{1 + \|l\|}\right)$, on a $\|f(A + \vec{v}) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$.

(2) Soit $\vec{v} \in E$. Pour $t \neq 0$ au voisinage de 0, on note

$$\alpha(t) = \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} - l(\vec{v}).$$

$$\text{Ainsi, } \alpha(t) = \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A) - l(t\vec{v})}{t}$$

Si $\vec{v} = \vec{0}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$, c'est-à-dire que $(D_{\vec{0}}f)(A)$ existe et vaut $\vec{0} = l(\vec{0})$.

$$\text{Sinon, pour } t \neq 0, \|\alpha(t)\| = \frac{\|f(A + t\vec{v}) - f(A) - l(t\vec{v})\|}{\|t\vec{v}\|} \|\vec{v}\|$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} t\vec{v} = \vec{0}$, par définition de la différentiabilité, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \vec{0}$

Donc $(D_{\vec{v}}f)(A)$ existe et vaut $l(\vec{v})$.

B) Différentielle d'une fonction différentiable

Théorème :

Si f est différentiable en A , alors il existe une unique application linéaire continue $l \in L_C(E, F)$ telle que $f(A + \vec{v}) = f(A) + l(\vec{v}) + o(\|\vec{v}\|)$

Définition :

Cette application s'appelle différentielle de f en A , notée $df_A \in L_C(E, F)$
(Ainsi, $\forall \vec{v} \in E, (df_A)(\vec{v}) = (D_{\vec{v}}f)(A)$)

Démonstration :

l est en effet l'application $\vec{v} \in E \mapsto (D_{\vec{v}}f)(A) \in F$ d'après le théorème précédent.

C) Exemples

- Applications linéaires :

Théorème :

Une application linéaire f est différentiable si et seulement si elle est continue et dans ce cas, pour tout $A \in \Omega$, $df_A = f$.

Démonstration : ...

- Application bilinéaire :

Proposition :

Soit $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilinéaire continue (on munit $E = E_1 \times E_2$ de la norme produit $\|(x, y)\|_E = \|x\|_{E_1} + \|y\|_{E_2}$)

Alors B est différentiable en tout $(a, b) \in E$ et :

$$dB_{(a,b)} : E_1 \times E_2 \rightarrow F \\ (x, y) \mapsto B(a, y) + B(x, b)$$

En effet, pour tout $(x, y) \in E$,

$$B(a + x, b + y) = B(a, b) + B(a, y) + B(x, b) + B(x, y)$$

Or, $(x, y) \mapsto B(a, y) + B(x, b)$ est linéaire continue, et il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E, \|B(x, y)\|_F \leq M \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2}$$

$$\text{Donc } \forall (x, y) \in E, \|B(x, y)\|_F \leq \frac{M}{2} (\|x\|_{E_1}^2 + \|y\|_{E_2}^2) = o(\|(x, y)\|_E)$$

- Si $E = \mathbb{R}$:

Théorème :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} , $f : \Omega \rightarrow F$.

Alors f est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas $f'(a) = df_a(1)$ et $df_a : x \mapsto xf'(a)$

Démonstration :

On suppose f différentiable en a . Alors $f(a + x) = f(a) + l(x) + o(|x|)$, où l est linéaire continue. Comme l est linéaire, on a $f(a + x) = f(a) + xl(1) + o(|x|)$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = l(1) = df_a(1)$

Si f est dérivable en a , alors $f(a+x) = f(a) + xf'(a) + o(x)$, donc comme $x \mapsto xf'(a)$ est linéaire continue, f est différentiable en a et $df_a : x \mapsto xf'(a)$.

• Exercices :

On note $E = M_n(\mathbb{K})$

On cherche les différentielles de $A \mapsto A^2$ (puis $A \mapsto A^m$ pour $m \in \mathbb{N}$), $A \mapsto A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

On note $f : A \mapsto A^2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Alors pour $H \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2 \\ &= f(A) + l(H) + H^2 \end{aligned}$$

Où l est linéaire continue.

On munit E d'une norme d'algèbre (par exemple une norme triple associée à une norme quelconque)

$$\text{Alors } \forall H \in M_n(\mathbb{K}), \|H^2\| \leq \|H\|^2$$

$$\text{Donc pour } \|H\| \leq \varepsilon, \text{ on a } \|H^2\| \leq \varepsilon \|H\|$$

$$\text{Donc } H^2 \underset{H \rightarrow 0}{=} o(\|H\|).$$

Donc f est différentiable en A et $df_A : H \mapsto AH + HA$

Pour $f : A \mapsto A^m$:

On a pour $H \in M_n(\mathbb{K})$,

$$f(A+H) = (A+H)^m = A^m + A^{m-1}H + \dots + AHA^{m-2} + HA^{m-1} + R(H)$$

Où H apparaît au moins deux fois dans chaque terme de $R(H)$, et $R(H)$ a $2^n - n - 1$ termes.

Ainsi, si $A \neq 0$ (pour $A = 0$ on a $df_A = 0$),

$$\text{On a pour } \|H\| \leq \|A\|, \|R(H)\| \leq (2^n - n - 1) \|H\|^2 \|A\|^{n-2} = o(\|H\|).$$

Pour $f : A \rightarrow A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$ (ouvert)

Différentiabilité en I_n : on note $\| \cdot \|$ une norme d'algèbre.

Pour $\|H\| < 1$, $-1 \notin \text{sp}(H)$ donc $I_n + H$ est inversible.

$$\text{On a de plus } (I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k}_{\varepsilon(H)}$$

$$\text{Et } \|\varepsilon(H)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|H\|^k = \frac{1}{1 - \|H\|}$$

Donc f est différentiable en I_n et $df_{I_n} = -\text{Id}_{M_n(\mathbb{K})}$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Alors $A+H = A(I_n + A^{-1}H)$. Donc si $\|A^{-1}H\| < 1$, alors $A+H$ est inversible.

$$\text{On peut prendre } \|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1} &= (I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1} \\ &= (I_n - A^{-1}H + o(\|A^{-1}H\|)) A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|)\end{aligned}$$

Donc f est différentiable en tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $df_A : H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

D) Opérations sur les différentielles

Théorème :

(1) Soit $\Omega \subset E$ ouvert, $A \in \Omega$.

Alors l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow F$ différentiables en A est un sous-espace vectoriel de F^Ω . De plus, l'application $f \mapsto df_A$ est linéaire, c'est-à-dire :

Si f et g sont différentiables en A et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + \lambda g$ est différentiable en A et :

$$d(f + \lambda g)_A = df_A + \lambda dg_A$$

(2) Composition :

Soient $\Omega \subset E$, $\Omega' \subset F$ ouverts, où E, F, G sont des espaces de Banach.

Soient $f : \Omega \rightarrow F$, $g : \Omega' \rightarrow G$ tels que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

On suppose que f est différentiable en $A \in \Omega$, g en $B = f(A)$.

Alors $g \circ f : \Omega \rightarrow G$ est différentiable en A , et $d(g \circ f)_A = dg_{f(A)} \circ df_A$

Démonstration :

(1) Si f, g sont différentiables en A , on a :

$$f(A+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(A) + l(x) + o_1(\|x\|) \text{ et } g(A+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(A) + m(x) + o_2(\|x\|)$$

où $l = df_A$, $m = dg_A$.

$$\text{Ainsi, pour } \lambda \in \mathbb{K}, (f + \lambda g)(A+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (f + \lambda g)(A) + (l + \lambda m)(x) + o(\|x\|)$$

Et $l + \lambda m \in L_C(E, F)$

$$(2) \text{ On a : } f(A+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(A) + l(x) + o_1(\|x\|), \quad g(B+y) \underset{y \rightarrow 0}{=} g(B) + m(y) + o_2(\|y\|)$$

Où l, m sont linéaires continues.

$$\text{Donc } g \circ f(A+x) = g(B+y) \text{ où } y = l(x) + o_1(\|x\|)$$

$$\text{Soit } g \circ f(A+x) = g(B) + m \circ l(x) + m(o_1(\|x\|)) + o_2(\|l(x) + o_1(\|x\|)\|)$$

En effet, quand x tend vers 0, y tend aussi vers 0 car l est continue.

Reste à montrer que $\varepsilon(x) = m(o_1(\|x\|)) + o_2(\|l(x) + o_1(\|x\|)\|)$ est négligeable devant $\|x\|$ quand x tend vers 0.

$$\text{Pour } m(o_1(\|x\|)) : \text{ on a } \|m(o_1(\|x\|))\|_G \leq \|m\| \times \|o_1(\|x\|)\|_F = o(\|x\|)$$

$$\text{Soit maintenant } \varepsilon > 0. \text{ Il existe alors } r > 0 \text{ tel que } \|x\| < r \Rightarrow \|o_1(\|x\|)\|_F \leq \|x\|$$

$$\text{Donc pour } \|x\| < r, \|l(x) + o_1(\|x\|)\|_F \leq (\|l\| + 1)\|x\|$$

Or, par définition de o_2 , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in F, \|y\| < \alpha \Rightarrow \|o_2(\|y\|)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|l\| + 1} \|y\|$$

Donc pour $\|x\| < \max\left(\frac{\alpha}{1+\|l\|}, r\right)$,

$$\|o_2(\|l(x) + o_1(\|x\|)\|)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+\|l\|} \|l(x) + o_1(\|x\|)\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Donc $g \circ f$ est différentiable en A , et $d(g \circ f) = m \circ l = dg_{f(A)} \circ df_A$

Corollaire (théorème de la chaîne) :

Soient E, F deux espaces de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert, et $f : \Omega \rightarrow F$.

On suppose que f est différentiable en $A \in \Omega$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \Omega$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , tel que $\varphi(t_0) = A$ pour $t_0 \in I$.

$$t \mapsto \varphi(t)$$

On suppose φ dérivable en t_0 .

Alors $f \circ \varphi : I \rightarrow F$ est dérivable en t_0 , et :

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = df_{\varphi(t_0)}(\varphi'(t_0)) \in F$$

Démonstration :

Comme φ est dérivable en t_0 , elle est aussi différentiable en t_0 , et $d\varphi_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow E$. De plus, f est différentiable en $\varphi(t_0) = A$.

$$h \mapsto h\varphi'(t_0)$$

Donc $f \circ \varphi$ est différentiable en t_0 , donc dérivable et :

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(t_0) &= d(f \circ \varphi)_{t_0}(1) = (df_{\varphi(t_0)} \circ d\varphi_{t_0})(1) \\ &= df_{\varphi(t_0)}(d\varphi_{t_0}(1)) = df_{\varphi(t_0)}(\varphi'(t_0)) \end{aligned}$$

E) En dimension finie : matrices Jacobiennes, calcul des dérivées partielles d'un composé

Soient $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E , $\mathfrak{C} = (\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_n)$ une base de F .

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$.

On note f_1, \dots, f_n les applications coordonnées de f dans \mathfrak{C} :

$$\forall M \in \Omega, f(M) = \sum_{j=1}^n f_j(M) \vec{\eta}_j$$

Théorème :

f est différentiable en $A \in \Omega$ si et seulement si toutes les f_j sont différentiables en A .

Démonstration :

Si f est différentiable en $A \in \Omega$, on a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall M \in \Omega, f_j(M) = (\vec{\eta}_j^* \circ f)(M)$

Où $(\vec{\eta}_1^*, \dots, \vec{\eta}_n^*)$ est la base duale de \mathfrak{C} . Donc pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme $\vec{\eta}_j^*$ est linéaire continue, elle est différentiable et donc f_j aussi.

Réciproquement, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on aura $l_j \in L_c(E, F)$ tel que

$$f_j(A + \vec{v}) \underset{\vec{v} \rightarrow \vec{0}}{=} f_j(A) + l_j(\vec{v}) + o_j(\|\vec{v}\|)$$

Alors $f(A + \vec{v}) \underset{\vec{v} \rightarrow 0}{=} f(A) + \sum_{j=1}^n l_j(\vec{v}) \vec{\eta}_j + \sum_{j=1}^n o_j(\|\vec{v}\|) \vec{\eta}_j$, et $\sum_{j=1}^n o_j(\|\vec{v}\|) \vec{\eta}_j$ est toujours négligeable devant $\|\vec{v}\|$ quand \vec{v} tend vers 0, et $\vec{v} \mapsto \sum_{j=1}^n l_j(\vec{v}) \vec{\eta}_j$ est linéaire continue.

Théorème :

On suppose $f : \Omega \rightarrow F$ différentiable en $A \in \Omega$. Alors pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f admet en A une j -ème dérivée partielle par rapport à \mathfrak{B} qui vaut :

$$(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A) = (df_A)(\vec{\epsilon}_j)$$

$$\text{De plus, } \text{mat}_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}(df_A) = ((\partial_{j, \mathfrak{B}} f_i)(A))_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$$

(La j -ème colonne de la matrice est la matrice de $\partial_{j, \mathfrak{B}} f$ dans \mathfrak{C})

Définition :

$\text{mat}_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}(df_A)$ s'appelle la matrice Jacobienne de f en A , notée $\text{Jac}(f)_A$.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$,
 $(x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z))$

alors sa matrice Jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{K})$$

Démonstration :

(1) Si f est différentiable en A , alors elle admet une dérivée en A selon tout vecteur, et $(D_{\vec{v}} f)(A) = df_A(\vec{v})$

Donc en particulier sur la base, $(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A) = df_A(\vec{\epsilon}_j)$

(2) Par définition de la matrice de df_A dans les bases \mathfrak{B} et \mathfrak{C} , la j -ème colonne de cette matrice est constituée des coordonnées de $df_A(\vec{\epsilon}_j)$ dans \mathfrak{C} , c'est-à-dire des coordonnées de $(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A)$ dans \mathfrak{C} .

$$\text{Or, } f = \sum_{i=1}^n f_i \vec{\eta}_i. \text{ Donc } (\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A) = \sum_{i=1}^n (\partial_{j, \mathfrak{B}} f_i)(A) \vec{\eta}_i.$$

Théorème (propriétés des matrices Jacobiennes) :

(1) Linéarité : soient $f, g : \Omega \subset E \rightarrow F$ différentiables en $a \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $f + \lambda g$ est différentiable en a et $\text{Jac}(f + \lambda g)_a = \text{Jac}(f)_a + \lambda \text{Jac}(g)_a$

(2) Composition :

Soient $f : \Omega \subset E \rightarrow \Omega' \subset F$, $g : \Omega' \rightarrow G$.

On suppose f différentiable en $a \in \Omega$, g en $f(a)$.

On note \mathfrak{B} une base de E , \mathfrak{C} de F , \mathfrak{D} de G . Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\text{Jac}_{\mathfrak{B}, \mathfrak{D}}(g \circ f)_a = \text{Jac}_{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}}(g)_{f(a)} \times \text{Jac}_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}(f)_a.$$

Démonstration :

Découle des propriétés de la différentielle.

Exemple :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$, où α, β sont les fonctions coordonnées de f .
 $(x, y) \mapsto (\alpha(x, y), \beta(x, y))$

Et $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u, v) \mapsto g(u, v)$

On note $h = g \circ f : (x, y) \mapsto g(\alpha(x, y), \beta(x, y))$

On suppose que f est différentiable en (a, b) et g en $f(a, b)$.

Alors h est différentiable en (a, b) et :

$$\begin{aligned} \text{Jac}(h)_{(a,b)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} = \text{Jac}(g)_{f(a,b)} \times \text{Jac}(f)_{(a,b)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(f(a, b)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f(a, b)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial \beta}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(a, b)) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(a, b)) \frac{\partial \beta}{\partial x}(a, b)$$

Théorème (formule de la chaîne) :

Soient $f : \Omega \subset E \rightarrow \Omega' \subset F$, $g : \Omega' \rightarrow G$

On note $\mathfrak{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p)$ une base de E , $\mathfrak{C} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)$ une base de F .

On peut donc noter, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tels que $f = \sum_{j=1}^p f_j \bar{\eta}_j$.

On suppose que f admet une dérivée partielle $(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A)$ en $A \in \Omega$, et que g est différentiable en $f(A)$.

Alors $g \circ f$ admet une dérivée partielle $\partial_{j, \mathfrak{B}}(g \circ f)$ en A , et :

$$(\partial_{j, \mathfrak{B}} g \circ f)(A) = \sum_{i=1}^n (\partial_{j, \mathfrak{B}} f_i)(A) \cdot (\partial_{i, \mathfrak{C}} g)(f(A))$$

Démonstration :

On étudie $\psi : x \in I \mapsto g \circ f(A + x \bar{\eta}_j)$ pour x proche de 0 dans \mathbb{R} .

Les fonctions g et $\varphi : x \mapsto f(A + x \bar{\eta}_j)$ sont différentiables (g en $f(A)$, φ en 0)

Donc ψ est différentiable en 0, donc dérivable et :

$$\psi'(0) = dg_{f(A)}(\varphi'(0)) = dg_{f(A)}((\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A))$$

Mais la matrice de ce vecteur est :

$$\text{Jac}(g)_{f(A)} \times \text{mat}_{\mathfrak{C}}(\partial_{j, \mathfrak{B}} f(A)) \text{Jac}(g)_{f(A)} \times \text{mat}_{\mathfrak{C}}(\partial_{j, \mathfrak{B}} f(A))$$

$$\text{Où } \text{mat}_{\mathfrak{C}}(\partial_{j, \mathfrak{B}} f(A)) = \begin{pmatrix} (\partial_{j, \mathfrak{B}} f_1)(A) \\ \vdots \\ (\partial_{j, \mathfrak{B}} f_n)(A) \end{pmatrix}$$

En faisant le produit, on obtient ainsi $(\partial_{j, \mathfrak{B}} g \circ f)(A) = \sum_{i=1}^n (\partial_{j, \mathfrak{B}} f_i)(A) \cdot (\partial_{i, \mathfrak{C}} g)(f(A))$

Déterminant Jacobien :

On suppose E et F de dimension finie n .

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$, différentiable en $A \in \Omega$, \mathfrak{B} une base de E , \mathfrak{C} de F .

On appelle Jacobien de f en A relativement aux bases \mathfrak{B} , \mathfrak{C} le scalaire

$$\text{jac}_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}(f)_A = \det(\text{Jac}(f)_A)$$

Remarque :

$df_A \in L_C(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si $\text{jac}_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}(f)_A \neq 0$

F) Application de classe C^1 .

Cas de la dimension finie :

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ où E est de dimension finie, $\mathfrak{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p)$ est une base de E .

On dit que f est de classe C^1 par rapport à \mathfrak{B} lorsque pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $A \in \Omega$, f admet une j -ème dérivée partielle $(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A)$ et si les applications dérivées partielles $\partial_{j, \mathfrak{B}} f$ sont toutes continues sur Ω .

Remarque :

Il semble que la définition dépend de \mathfrak{B} ; on va voir que ce n'est pas le cas :

Théorème :

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$, \mathfrak{B} une base de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est de classe C^1 par rapport à \mathfrak{B} .

(2) Pour tout $\bar{u} \in E$ et $A \in \Omega$, f a une dérivée selon \bar{u} en A $(D_{\bar{u}} f)(A) \in F$ et l'application $\Omega \rightarrow F$
 $A \mapsto (D_{\bar{u}} f)(A)$ est continue sur Ω (pour tout $\bar{u} \in E$)

(3) f est différentiable en tout $A \in \Omega$ et $\Omega \rightarrow (L_C(E, F), \|\cdot\|)$ est continue.
 $A \mapsto df_A$

Conséquence, remarque :

L'équivalence (2) \Leftrightarrow (1) montre que la caractérisation C^1 ne dépend pas de \mathfrak{B} .

La condition (3) est la vraie définition du caractère C^1 , valable pour des espaces de Banach E et F (pas nécessairement de dimension finie).

Démonstration :

- (2) \Rightarrow (1) : ok (il suffit de prendre les vecteurs de la base)

- Si f est différentiable en A , alors pour tout $\bar{u} \in E$, f admet des dérivées $(D_{\bar{u}} f)(A)$

et $(D_{\bar{u}} f)(A) = df_A(\bar{u})$.

Comme $A \mapsto df_A$ est continu, pour $\bar{u} \in E$ fixé, $A \mapsto df_A(\bar{u})$ est continu

$$(\|df_A(\bar{u}) - df_{A_0}(\bar{u})\| \leq \|df_A - df_{A_0}\| \|\bar{u}\|)$$

- (1) \Rightarrow (3) :

Lemme :

On note $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

On suppose que $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ admet des dérivées partielles $(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(M)$ pour M voisin de A , et que les $M \mapsto (\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(M)$ sont continus en A .

Alors f est différentiable en A , et $df_A : \vec{u} = \sum_{j=1}^p u_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^p u_j (\partial_{j,\mathbb{R}} f)(A)$

Démonstration :

On le fait dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$ (on peut généraliser le résultat mais les notations sont lourdes)

On peut supposer que $A = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Par hypothèse, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au voisinage de $(0,0)$ et sont continus en $(0,0)$.

On veut montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que

$$df_{(0,0)} : (h,k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

On note, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

On doit donc montrer que $\Delta(h,k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} o(\|(h,k)\|)$

(Pour F de dimension n , on le montre pour chaque Δ_j défini pour chaque coordonnée, à valeur dans \mathbb{R} ; pour E de dimension supérieure à 2, on a plus de termes)

On a alors :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) + f(h,0) - f(0,0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Soit (h,k) fixé au voisinage de $(0,0)$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $y \mapsto f(h,y)$, il existe $k_1 \in [0,k]$ tel que $f(h,k) - f(h,0) = k \frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1)$

De même, le théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto f(x,0)$ donne

$$h_1 \in [0,h] \text{ tel que } f(h,0) - f(0,0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0)$$

(Si E est de dimension plus grande, on aura une décomposition de Δ plus grande et il faudra appliquer le théorème des accroissements finis suffisamment)

Donc

$$\begin{aligned} |\Delta(h,k)| &= \left| h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) + k \left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) \right) \right| \\ &\leq \|(h,k)\|_\infty \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) \right| \right) \end{aligned}$$

$$(\|(h,k)\|_\infty = \max(|h|, |k|))$$

Et la quantité $\left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) \right| \right)$ tend vers $(0,0)$ quand

(h,k) tend vers 0 par continuité des applications partielles en $(0,0)$

D'où le résultat.

Conséquence :

Si f admet sur Ω des dérivées $(\partial_{j,\mathbb{R}} f)(A)$ en tout point A , et si les $(\partial_{j,\mathbb{R}} f)$ sont toutes continues, d'après le lemme, f est différentiable en tout $A \in \Omega$.

Reste à montrer que $A \mapsto df_A$ est continue.

Soit \mathfrak{C} une base de F . Il suffit de montrer que $A \mapsto \text{Jac}(f)_A$ est continue, ce qui est vrai car la j -ème colonne de cette matrice est la matrice dans \mathfrak{C} de $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$, donc dépend continûment de A .

Application :

- Pour $E = \mathbb{R}^n$: toute fonction polynomiale $E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur E .
- Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$

Alors $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^n , et :

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega.$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$$

En effet :

Déjà, Ω est ouvert car l'image réciproque d'un ouvert par une application continue (Q)

Pour une fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$, f admet des dérivées partielles en tout point

$$A \in \Omega, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_j}(A) \cdot Q(A) - P(A) \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_j}(A)}{Q(A)^2}, \text{ continue par rapport à } A \text{ car}$$

rationnelle.

Exercice : étude de la fonction déterminant :

Déjà, \det est de classe C^1 car polynomiale

Détermination de $d \det_A \in M_n(\mathbb{K})^*$

Si on pose $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$, $\det(A) = f(a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$, on a :

$$d \det_A(X) = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \\ (i,j) \neq (1,1)}} x_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(A) \text{ où } X = (x_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$$

Pour $A = I_n$:

$$\text{Calcul de } \frac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I_n) :$$

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\text{Si } i \neq j, \text{ alors } \underbrace{\det(I_n + hE_{i,j})}_{\varphi_{i,j}(h)} = 1$$

$$\text{Donc } \frac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I_n) = 0 = \varphi'_{i,j}(0)$$

$$\text{Si } i = j, \det(I_n + hE_{i,i}) = 1 + h$$

$$\text{Donc } \varphi'_{i,i}(0) = 1$$

$$\text{Donc } d \det_{I_n} : (x_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}} \mapsto \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \\ (i,j) \neq (1,1)}} x_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(I_n) = \text{Tr}(x)$$

Pour $A \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \det(A+H) &= \det(A)\det(I_n + A^{-1}H) \\ &= \det(A)(1 + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)) \\ &= \det A + \det(A)\text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

(où on a pris une norme d'algèbre quelconque)

Donc la différentielle de \det en $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est $H \mapsto \det(A)\text{Tr}(A^{-1}H)$

Et pour A non inversible :

On remarque qu'en fait pour A inversible,

$$d \det_A : H \mapsto \text{Tr}((\det A) \cdot A^{-1} \times H) = \text{Tr}(t \text{com}(A) \times H)$$

donc par continuité de l'application et densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$, c'est encore valable sur tout $M_n(\mathbb{K})$.

G) Caractère C^k et dérivées partielles d'ordre supérieur à 2.

(En dimension finie)

- Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 :

Si la fonction $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ admet des fonctions dérivées partielles $\partial_{j, \mathfrak{B}} f : \Omega \rightarrow F$ définies sur Ω , on peut s'intéresser à l'existence de dérivées partielles pour ces nouvelles fonctions.

Lorsqu'elles existent, on les appelle dérivées partielles d'ordre 2 de f .

Plus généralement, on peut définir les dérivées partielles d'ordre k pour $k \geq 2$.

Cas particulier :

Si $E = \mathbb{R}^n$:

Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$. On note les dérivées partielles par rapport à une

base canonique $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Les dérivées partielles d'ordre 2 sont les $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$, notées plutôt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

- Théorème d'interversion de Schwarz :

Théorème :

Soit $f : \Omega \rightarrow F$, \mathfrak{B} une base de E , $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$

On suppose que $\partial_{j, \mathfrak{B}}(\partial_{k, \mathfrak{B}} f)$ et $\partial_{k, \mathfrak{B}}(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)$ existent au voisinage de A et sont continues en A .

$$\text{Alors } \partial_{j, \mathfrak{B}}(\partial_{k, \mathfrak{B}} f)(A) = \partial_{k, \mathfrak{B}}(\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A)$$

Démonstration :

Comme on ne s'intéresse qu'à deux vecteurs de \mathfrak{B} , on peut supposer que $E = \mathbb{R}^2$, et par translation que $A = (0,0)$.

On suppose de plus $F = \mathbb{R}$ (pour alléger les notations)

Soit donc $f : \Omega \in V(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$.

On va montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ xy \neq 0}} \frac{f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)}{xy}$, qui

est une limite symétrique en x et y .

(Si F est de dimension plus grande, on le montre pour chaque coordonnée de f)

Posons donc pour $(x,y) \in \Omega$, $\Delta(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$

Pour x fixé, on pose $\varphi_x : y \mapsto f(x,y) - f(0,y)$

Ainsi, $\forall (x,y) \in \Omega, \Delta(x,y) = \varphi_x(y) - \varphi_x(0)$.

De plus, φ_x est dérivable (on est toujours à x fixé), et $\varphi'_x : y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$

Soit donc $(x,y) \in \Omega$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ_x , il existe $y_1 \in]0,y[$ tel

que $\Delta(x,y) = y\varphi'_x(y_1) = y\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_1)\right)$

On applique alors le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)$, donc il

existe $x_1 \in]0,x[$ tel que $\Delta(x,y) = xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1,y_1)$

Donc pour $xy \neq 0$, $\frac{\Delta(x,y)}{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1,y_1) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

(Par continuité)

Et comme Δ est symétrique en x et y , c'est la même chose pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, d'où

l'égalité.

Attention :

Il existe des fonctions ayant des dérivées partielles d'ordre 2 différentes.

- Fonctions de classe C^k pour $k \geq 2$:

Définition :

$f : \Omega \subset E \rightarrow F$ est dite de classe C^k par rapport à \mathfrak{B} si elle admet en tout A et pour tout ordre $p \leq k$ des dérivées d'ordre p $\partial_{j_p} \partial_{j_{p-1}} \dots \partial_{j_1} f$ toutes continues sur Ω .

Proposition :

Pour $k \geq 2$, f est de classe C^k par rapport à \mathfrak{B} si et seulement si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\partial_j f$ qui sont toutes de classe C^{k-1}

Conséquence :

La caractérisation C^k est indépendante de la base choisie.

Remarque :

On sait que f est de classe C^1 si et seulement si elle est différentiable en tout $A \in \Omega$ et $A \in \Omega \mapsto df_A \in L_C(E,F)$ est continue.

On en déduit que f est de classe C^p pour $p \geq 2$ si et seulement si elle est différentiable en tout $A \in \Omega$ et $df : A \in \Omega \mapsto df_A \in L_C(E,F)$ est de classe C^{p-1} .

On appellera différentielle d'ordre 2 de f en A l'application :

$$d^2 f_A = d(df)_A \in L_C(E, L_C(E,F))$$

Ainsi, f est de classe C^2 si et seulement si $d^2 f_A$ existe en tout point $A \in \Omega$ et $A \mapsto d^2 f_A$ est continue.

Interprétation de la formule de Schwarz :

On suppose que $d^2 f : \Omega \rightarrow L_C(E, L_C(E, F))$ est continue.

Pour tous $A \in \Omega$ et $\bar{u}, \bar{v} \in E$, $(d^2 f_A(\bar{u}))(\bar{v}) \in F$

Alors d'après le théorème de Schwarz, $(d^2 f_A(\bar{u}))(\bar{v}) = (d^2 f_A(\bar{v}))(\bar{u})$

En effet :

Posons $\varphi(x, y) = f(A + x\bar{u} + y\bar{v}) = (f \circ g)(x, y)$ pour (x, y) au voisinage de $(0, 0)$.

Alors φ est de classe C^1 , et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= d\varphi_{(x,y)}(1, 0) \\ &= d(f \circ g)_{(x,y)}(1, 0) = (df_{g(x,y)} \circ dg_{(x,y)})(1, 0) \\ &= df_{A+x\bar{u}+y\bar{v}}(dg_{(x,y)}(1, 0)) = df_{A+x\bar{u}+y\bar{v}}(\bar{u}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ est dérivable par rapport à } y, \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y) = (d^2 f_{A+x\bar{u}+y\bar{v}}(\bar{v}))(\bar{u})$$

En effet :

Posons $\psi(x, y) = df_{A+x\bar{u}+y\bar{v}} = (df \circ g)(x, y)$ pour (x, y) au voisinage de $(0, 0)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) &= d\psi_{(x,y)}(0, 1) = d(df)_{A+x\bar{u}+y\bar{v}} \circ dg_{(x,y)}(0, 1) \\ &= d(df)_{A+x\bar{u}+y\bar{v}}(\bar{v}) = d^2 f_{A+x\bar{u}+y\bar{v}}(\bar{v}) \end{aligned}$$

$$\text{Et en posant } \varphi_1(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = (\psi(x, y))(\bar{u}),$$

φ_1 est le composé de $\psi : V(0, 0) \rightarrow L_C(E, F)$ et de $\text{Ev}_{\bar{u}} : L_C(E, F) \rightarrow F$.

$$(x, y) \mapsto \psi(x, y) \quad l \mapsto l(\bar{u})$$

Or, $\text{Ev}_{\bar{u}}$ est linéaire continu, donc différentiable et $\forall l \in L_C(E, F), d(\text{Ev}_{\bar{u}})_l = \text{Ev}_{\bar{u}}$

Donc $d\varphi_1 = d(\text{Ev}_{\bar{u}})_{\psi(x,y)} \circ d\psi_{(x,y)}$

$$\text{D'où } \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) = \text{Ev}_{\bar{u}} \circ d\psi_{(x,y)}(0, 1) = \text{Ev}_{\bar{u}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)\right)(\bar{u}),$$

$$\text{Soit } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)\right)(\bar{u}) = (d^2 f_{A+x\bar{u}+y\bar{v}}(\bar{v}))(\bar{u})$$

Et donc en $x = y = 0$, d'après le théorème de Schwarz :

$$(d^2 f_A(\bar{u}))(\bar{v}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(0, 0) = (d^2 f_A(\bar{v}))(\bar{u})$$

• Opérations sur les fonctions C^k :

Théorème :

Une combinaison linéaire et un composé de fonctions de classe C^k sont de classe C^k .

Démonstration :

Par récurrence sur k (pour la composition) :

- Le résultat est déjà vrai pour $k = 0$.
- Supposons que l'énoncé est établi jusqu'à $k - 1$ pour $k \geq 1$.

Considérons alors $f : \Omega \subset E \rightarrow \Omega' \subset F$, $g : \Omega' \rightarrow G$ de classe C^k .

Donc f et g sont différentiables en tout point de Ω et Ω' .

Ainsi, $g \circ f$ est différentiable en tout point de Ω , et $d(g \circ f)_A = dg_{f(A)} \circ df_A$

Par hypothèse de récurrence, $A \in \Omega \mapsto dg_{f(A)} \in L_C(F, G)$, qui est composé des applications f et dg , toutes deux de classe C^{k-1} , est de classe C^{k-1} .

df est aussi de classe C^{k-1} .

De plus, l'application $B : L_C(F, G) \times L_C(E, F) \rightarrow L_C(E, G)$ est bilinéaire continue,
 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$

donc de classe C^∞ :

Si $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ est bilinéaire continue, alors B est de classe C^∞ .

En effet :

B est différentiable en tout point de $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$, et

$$dB_{(a_1, a_2)} : E_1 \times E_2 \rightarrow F$$

$$(x_1, x_2) \mapsto B(a_1, x_2) + B(x_1, a_2)$$

Donc $dB : E_1 \times E_2 \rightarrow L_C(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire continue.

Donc dB est différentiable en tout point $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ et :

$$\forall (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2, d^2 B_{(a_1, a_2)} = dB$$

Donc $d^2 B$ est une application constante (qui prend la valeur dB sur $E_1 \times E_2$)

Donc $d^2 B$ est différentiable et $\forall (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2, d^3 B_{(a_1, a_2)} = 0$

C'est-à-dire $d^3 B = 0$, qui est de classe C^∞ .

Reprenons :

$B : L_C(F, G) \times L_C(E, F) \rightarrow L_C(E, G)$ est donc de classe C^∞ , et
 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$

$d(g \circ f)$ est la composée de $\Omega \rightarrow L_C(F, G) \times L_C(E, F)$ et de B , qui sont toutes
 $A \mapsto (dg_{f(A)}, df_A)$

deux de classe C^{k-1}

Donc $d(g \circ f)$ est de classe C^{k-1} par hypothèse de récurrence.

Donc $g \circ f$ est de classe C^k .

H) C^k -difféomorphisme

- Définition :

Soit Ω un ouvert de E , Ω' de F , et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$.

On dit que f est un homomorphisme lorsqu'elle est bijective et bicontinue, c'est-à-dire que f et f^{-1} sont continues.

On dit que f est un C^k -difféomorphisme (pour $k \geq 1$) lorsqu'elle est bijective et f, f^{-1} sont de classe C^k

(Un homomorphisme serait ainsi un « C^0 -difféomorphisme » – on n'emploie pas ce terme)

Proposition (lien entre df et $d(f^{-1})$) :

Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ un C^k -difféomorphisme.

Alors pour tout $A \in \Omega$, df_A est un isomorphisme bicontinu (c'est-à-dire un homomorphisme linéaire) entre E et F , et :

$$d(f^{-1})_{f(A)} = (df_A)^{-1} \in L_C(F, E)$$

Remarque :

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^p$ où $\Omega \neq \emptyset$ est un C^k -difféomorphisme, alors $n = p$ car df_A est alors un isomorphisme entre \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p .

Démonstration :

On a $f^{-1} \circ f = Id_\Omega$ et $f \circ f^{-1} = Id_{\Omega'}$.

Comme f et f^{-1} sont différentiables, on a :

$$d(Id_\Omega)_A = df_{f(A)}^{-1} \circ df_A$$

Or, $Id_\Omega = (Id_E)_{/\Omega}$ et Id_E , donc $d(Id_\Omega)_A = Id_E$

$$\text{Donc } df_{f(A)}^{-1} \circ df_A = Id_E$$

$$\text{Et de même } df_A \circ df_{f(A)}^{-1} = Id_F$$

Donc df_A est un isomorphisme, et df_A , $df_{f(A)}^{-1}$ sont continues, donc c'est un homomorphisme, et on a bien l'égalité donnée.

- Cas de la dimension 1 : $E = F = \mathbb{R}$.

Rappel :

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow J$, $k \geq 1$.

Alors f est un C^k -difféomorphisme lorsque f est bijective, de classe C^k et f^{-1} est de classe C^k .

Théorème (caractérisation des C^k -difféomorphismes) :

$f : I \rightarrow J$ est un C^k -difféomorphisme si et seulement si :

- (1) f est de classe C^k .
- (2) f' ne s'annule pas
- (3) $f(I) = J$ (surjective)

NB : ce théorème permet de ne pas avoir à étudier f^{-1} .

Avec (1) et (2), on voit que f est injective et que $f^{-1} : J \rightarrow I$ est de classe C^k

- Théorème d'inversion locale (hors programme) :

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ de classe C^k , $A \in \Omega$.

On suppose que df_A est un homéomorphisme de E dans F (c'est-à-dire que df_A est linéaire, bijective, bicontinue)

Alors $f(\Omega)$ est un voisinage de $f(A)$, et il existe un voisinage U de A dans Ω , un voisinage U' de $f(A)$ dans Ω' tels que $f|_U : U \rightarrow U'$ est un C^k -difféomorphisme.

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème, f est un C^k -difféomorphisme au voisinage de A .

Démonstration :

(1) Réductions :

On pose $L = df_A$.

En remplaçant f par $x \mapsto L^{-1}(f(x+A) - f(x))$, on peut supposer que $E = F$, $A = f(A) = 0$ et $df_A = \text{Id}$.

Par continuité de df en A , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \Omega, \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|df_x - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}$

Soit B_1 la boule fermée de centre 0 et de rayon α , et g définie par

$$\forall x \in \Omega, g(x) = x - f(x).$$

Ainsi, g est de classe C^1 sur l'intérieur de B_1 , de différentielle nulle en $A=0$ et $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur B_1 .

Le calcul de la dérivée de $t \mapsto g(t.N + (1-t).M)$ montre que pour tout $(N, M) \in B_1^2$, $g(N) - g(M) = \int_0^1 dg_{(tN+(1-t)M)}(\overline{NM}) dt = \int_0^1 (\text{Id} - df_{(tN+(1-t)M)})(\overline{NM}) dt$

$$\text{Et donc } \|g(N) - g(M)\| \leq \frac{\|\overline{NM}\|}{2}$$

(2) Maintenant :

Pour $x, x' \in B_1$, on a

$$\|f(x) - f(x')\| = \|(g(x') - g(x)) - (x - x')\| \geq \|x - x'\| - \frac{\|x - x'\|}{2} \geq \frac{\|x - x'\|}{2}$$

Donc f est injective sur B_1 .

Soit $y \in \overline{B}(f(A), \frac{\alpha}{2})$.

On note $h_y : x \mapsto x - f(x) + y$, définie sur B_1 .

Alors :

B_1 est complète (car fermée dans un espace complet)

h_y stabilise B_1 car pour $\|x\| \leq \alpha$, on a

$$\|h_y(x)\| = \|g(x) + y\| \leq \|g(x) - g(0)\| + \|y\| \leq \frac{\|x\|}{2} + \|y\| \leq \alpha$$

Et g est $1/2$ -lipschitzienne sur B_1 donc $h_y = g + y$ aussi.

Donc d'après le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in B_1$ tel que $h_y(x) = x$ c'est-à-dire tel que $f(x) = y$.

On pose $\omega = f^{-1}(B_o(0, \frac{\alpha}{2})) \cap B_o(0, \alpha)$. Comme f est continue, c'est un voisinage ouvert de 0, et on a de plus $f(\omega) = B_o(0, \frac{\alpha}{2})$.

En effet, on a déjà $f(\omega) \subset B_o(0, \frac{\alpha}{2})$ par définition de ω . Inversement, si $\|y\| < \frac{\alpha}{2}$, il existe $x \in B_1$ tel que $f(x) = y$, mais l'inégalité $\|y\| = \|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \geq \frac{\|x\|}{2}$ montre que $\|x\| < \alpha$ et donc $x \in \omega$. Donc $y = f(x) \in f(\omega)$, d'où l'autre inclusion.

Ainsi, $f : \omega \rightarrow B_o(0, \frac{\alpha}{2})$ est continue, bijective. Sa réciproque est de plus aussi continue car lipschitzienne :

Pour $y = f(x)$, $y' = f(x') \in B_o(0, \frac{\alpha}{2})$, on a :

$$\|y - y'\| = \|f(x) - f(x')\| \geq \frac{\|x - x'\|}{2}, \text{ soit}$$

$$\forall (y, y') \in B_o(0, \frac{\alpha}{2}), \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| \leq 2\|y - y'\|.$$

Donc $\hat{f} : \omega \rightarrow \omega' = B_o(0, \frac{\alpha}{2})$ est un homéomorphisme ; on pose alors $\hat{g} = \hat{f}^{-1}$. \hat{g} est donc déjà continue.

(3) Montrons que \hat{g} est différentiable sur ω' .

Déjà, pour $a \in \omega$, on a $\|df_a - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}$, donc df_a est un automorphisme de E .

Soit $b = \hat{f}(a) \in \omega'$. Pour k tel que $b+k \in \omega'$, on pose $h = \hat{g}(b+k) - a$.

Par continuité de \hat{g} , h tend vers 0 quand k tend vers 0, et comme f est différentiable en a , on a le développement :

$$b+k = f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h), \text{ c'est-à-dire } k = df_a(h) + o(h).$$

On a donc au voisinage de 0 la majoration : $\|k\| \leq (\|df_a\| + \frac{1}{2})\|h\| \leq 2\|h\|$

Et on peut donc écrire $\hat{g}(b+k) = \hat{f}^{-1}(b) + h = \hat{f}^{-1}(b) + df_a^{-1}(k) + df_a^{-1}(o(k))$

Donc \hat{g} est différentiable en $b = \hat{f}(a)$, de différentielle df_a^{-1} .

(4) Enfin, g est de classe C^k :

L'application $d\hat{g} : a \in \omega' \mapsto d\hat{g}_a \in L(E)$ est de classe C^{k-1} car composée de $df : a \mapsto df_a$ qui est C^{k-1} et de $\varphi \in GL(E) \mapsto \varphi^{-1}$ qui est de classe C^∞ .

Corollaire (théorème de l'application ouverte) :

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ de classe C^1 . On suppose que pour tout $A \in \Omega$, $df_A : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme (linéaire). Alors f est une application ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de Ω , $f(U) \subset F$ est ouvert.

Démonstration :

Soit $U \subset \Omega$ un ouvert, et $A \in U$

Alors le théorème précédent s'applique à $f|_U : U \rightarrow F$, de classe C^1 , en A et en particulier, $f(U) = f|_U(U)$ est un voisinage de $f(A)$ dans F .

Donc $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points.

- Théorème d'inversion globale (caractérisation des difféomorphismes) :

Exemple :

L'exponentielle complexe :

$$\text{On note } E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

Alors E est de classe C^∞ , et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{Jac}(E)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ (de déterminant } e^{2x} \neq 0)$$

Donc $dE_{(x,y)} \in L(\mathbb{R}^2)$ est un automorphisme de \mathbb{R}^2 .

Mais E n'est pas injective, puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 E(x,y) = E(x,y+2\pi)$

On peut appliquer le théorème d'inversion locale :

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe U voisinage ouvert de (x,y) et U' voisinage ouvert de $E(x,y)$ tels que $E|_U : U \rightarrow U'$ est un C^∞ -difféomorphisme. Donc E est un C^∞ -difféomorphisme local (mais pas global, car non injectif)

On peut appliquer le théorème de l'application ouverte : $E(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 (c'est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

Théorème d'inversion globale (caractérisation des difféomorphismes) :
 Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow \Omega' \subset F$, où Ω est ouvert, de classe C^k , avec $\Omega' = f(\Omega)$.
 On suppose que :
 (1) Pour tout $A \in \Omega$, df_A est un homéomorphisme de E dans F .
 (2) f est injective.
 Alors Ω' est un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est un C^k -difféomorphisme.
 (La réciproque est vraie)

Démonstration :

Déjà, d'après le théorème de l'application ouverte, Ω' est un ouvert.

Comme f est supposée injective, $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est bijective et de classe C^k .

On doit montrer que $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ est de classe C^k .

Soit $B \in \Omega'$, et $A = f^{-1}(B)$

On peut appliquer le théorème d'inversion locale en A : il existe un voisinage U ouvert de A , U' de B tels que $f|_U : U \rightarrow U'$ est un C^k -difféomorphisme.

Alors $(f^{-1})|_{U'} = (f|_U)^{-1}$ est de classe C^k .

Donc f^{-1} est de classe C^k au voisinage de B , et comme c'est valable pour tout $B \in \Omega'$, $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ est de classe C^k .

Exemples :

- En reprenant l'exemple précédent, pour que E soit un C^∞ -difféomorphisme, on peut prendre $U = \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$

Et $E(U) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbb{R}_-\}$.

En effet :

E est de classe C^∞

Pour tout $(x, y) \in U$, $\text{jac}(E)_{(x,y)} = e^{2x} \neq 0$

E est injective sur U .

En effet, si $E(x, y) = E(x', y')$ pour $(x, y), (x', y') \in U$, alors $e^{x+iy} = e^{x'+iy'}$

Donc $x + iy - (x' + iy') \in 2i\pi\mathbb{Z}$,

Donc $x = x'$, et $y - y' \in 2\pi\mathbb{Z}$,

Donc comme $y, y' \in]-\pi, \pi[$, on a bien $(x, y) = (x', y')$

Donc E est bien un C^∞ -difféomorphisme.

- Passage en polaire :

On note P l'application $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$

On cherche un ouvert U maximal tel que $P|_U : U \rightarrow P(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

Déjà, P est de classe C^∞ , et pour $(r, t) \in \mathbb{R}^2$.

Et $\text{Jac}(P)(r, t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}$. Donc $\text{jac}(P)(r, t) = r$

On suppose $r > 0$:

Prenons $U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$.

Sur U , le théorème d'inversion globale s'applique.

En effet, P est de classe C^∞ , le déterminant jacobien ne s'annule pas, et P est injectif.

Donc $P_{|U} : U \rightarrow P(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme et $U' = P(U)$ est ouvert.

On a $P(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leq 0\}$.

De plus, U est maximal, au sens que si on ajoute un ouvert ω à U , $P_{|\omega \cup U}$ n'est plus injectif.

Morale :

Les parties de \mathbb{R}^2 sur lesquelles on peut passer en polaire sont les complémentaires d'une $\frac{1}{2}$ droite passant par O .

Etude de $P^{-1} : U' \rightarrow U$
 $(x,y) \mapsto (r,t) = P^{-1}(x,y)$

On pose $P^{-1}(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$. On cherche à calculer $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}$.

On a, pour $(x,y) \in U'$, $\text{Jac}(P^{-1})_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = (\text{Jac}(P)_{P^{-1}(x,y)})^{-1}$

Or, $\text{Jac}(P)_{(r,t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}$

Donc $(\text{Jac}(P)_{(r,t)})^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos t & r \sin t \\ r \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Donc $\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) = \cos t = \cos(\beta(x,y))$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sin t}{r} = \frac{-\sin(\beta(x,y))}{\alpha(x,y)} \dots$

Remarque :

On peut déterminer α, β en résolvant :

$$\begin{cases} r \cos t = x \\ r \sin t = y \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} \alpha(x,y) = r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \beta(x,y) = t = \text{Arctan}(y/x) \end{cases} \quad (x > 0)$$

• Composition :

Théorème :

Un composé de C^k -difféomorphismes est un C^k -difféomorphisme.

La réciproque d'un C^k -difféomorphisme aussi.

Démonstration :

Découle de la définition.

Exercice :

On cherche une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $\varphi : (x,y) \mapsto (x + a \sin y, y + b \sin x)$ soit un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

On doit montrer que :

φ est de classe C^∞ , son déterminant jacobien ne s'annule pas, que φ est injective et $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Déjà, φ est de classe C^∞ .

On a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Jac}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & a \cos y \\ b \cos x & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $1 - ab \cos y$

Il faut donc déjà que $|ab| < 1$.

Cette condition est suffisante : on suppose maintenant que $|ab| < 1$:

On considère le système $(S) \begin{cases} x + a \sin y = u \\ y + b \sin x = v \end{cases}$, montrons que le système admet une unique solution pour tous $u, v \in \mathbb{R}$.

On a l'équivalence : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + a \sin y = u \\ y + b \sin(u - a \sin y) = v \end{cases}$

Et en notant $g_u : y \mapsto y + b \sin(u - a \sin y)$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, g'_u(y) = 1 - ab \cos(u - a \sin y) > 0$$

Donc g_u est strictement croissante. Comme de plus $\lim_{y \rightarrow +\infty} g_u(y) = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow -\infty} g_u(y) = -\infty$, g_u est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Donc l'équation $g_u(y) = v$ a une unique solution $y \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in \mathbb{R}$

Donc (S) a une unique solution.

Donc f est un C^∞ -difféomorphisme si et seulement si $|ab| < 1$

IV Cas des fonctions à valeurs réelles

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ où E est un espace de Banach.

On note, pour $A, B \in E$, $[A, B] = \{tB + (1-t)A, t \in [0;1]\}$

A) Cas où E est un espace euclidien : gradient

Si f est différentiable en A , alors $df_A \in E'$ est une forme linéaire.

Définition :

On appelle gradient de f en A l'unique vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f(A) \in E$ tel que $\forall \vec{h} \in E, df_A(\vec{h}) = \langle \overrightarrow{\text{grad}}f(A), \vec{h} \rangle$

Remarque :

On a vu que l'existence et l'unicité d'un tel vecteur est aussi valable dans un espace de Hilbert, donc on peut étendre la définition.

Proposition (gradient en base orthonormée de E) :

Soit $\mathfrak{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Si $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en A , on a alors $\overrightarrow{\text{grad}}f(A) = \sum_{j=1}^p (\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A) \varepsilon_j$,

C'est-à-dire que pour tout $\vec{h} = \sum_{j=1}^p x_j \varepsilon_j \in E$, on a :

$$df_A(\vec{h}) = \langle \overrightarrow{\text{grad}}f(A), \vec{h} \rangle = \sum_{j=1}^p x_j (\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A)$$

Démonstration :

Le vecteur convient effectivement.

Remarque :

A $\|\vec{h}\|$ fixé, $df_A(\vec{h})$ est maximal lorsque \vec{h} est dans la direction de $\overrightarrow{\text{grad}f(A)}$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}f(A)}$ indique la direction dans laquelle la variation de f est maximale.

Exemple :

(1) $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Où \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique)
 $\vec{x}=(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$

Alors f_i est linéaire, continue, donc différentiable et $\forall A \in \mathbb{R}^n, df_i(A) = f_i$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}f_i} = \varepsilon_i$ (où ε_i est le i -ème vecteur de la base canonique)

(2) $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ , et :
 $A \mapsto \det A$

$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}) d \det_A(H) = \text{Tr}({}^t \text{com}(A)H)$

Si on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M \times N)$, on a alors :

$\overrightarrow{\text{grad} \det}(A) = \text{com}(A)$

Propriété (En dimension 2 : gradient en coordonnées polaires) :

On note E le plan euclidien orienté rapporté à (\vec{i}, \vec{j}) orthonormée.

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On pose, pour (r, t) tel que $(r \cos t, r \sin t) \in \Omega$,
 $F(r, t) = f(r \cos t, r \sin t)$.

Alors F est de classe C^1 et pour tout (r, t) tel que $r \cos t \vec{i} + r \sin t \vec{j} \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}f}(r \cos t, r \sin t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \vec{j} \\ &= \frac{\partial F}{\partial r}(r, t) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial t}(r, t) \vec{u}_{t+\pi/2} \end{aligned}$$

Où $\vec{u}_r = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$.

Démonstration :

On sait que $P :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un C^∞ -difféomorphisme local.
 $(r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$

Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note alors (r_0, t_0) tel que $\begin{cases} x_0 = r_0 \cos t_0 \\ y_0 = r_0 \sin t_0 \end{cases}$

Alors P réalise un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage de (r_0, t_0) dans un

voisinage de (x_0, y_0) , et $\text{Jac}(P)_{(r,t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}$

On a $F(r, t) = f(r \cos t, r \sin t) = (f \circ P)(r, t)$

Donc : $\frac{\partial F}{\partial r}(r, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \circ P(r, t) \cdot \cos t + \frac{\partial f}{\partial y} \circ P(r, t) \cdot \sin t$

Et $\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \circ P(r, t) \cdot (-\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y} \circ P(r, t) \cdot \cos t$

Donc $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \circ P(r, t) = \cos t \cdot \frac{\partial F}{\partial r}(r, t) - \frac{\sin t}{r} \frac{\partial F}{\partial t}(r, t) \\ \frac{\partial F}{\partial y} \circ P(r, t) = \sin t \cdot \frac{\partial F}{\partial r}(r, t) + \frac{\cos t}{r} \frac{\partial F}{\partial t}(r, t) \end{cases}$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{\text{grad}} f \circ P(r, t) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, t)(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial t}(r, t)(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j})$$

B) Accroissements finis

- Théorème (formule intégrale) :

Soit Ω un ouvert de E , $A, B \in E$ tels que $[A, B] \subset \Omega$

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

$$\text{Alors } f(B) - f(A) = \int_0^1 df_{tB+(1-t)A}(B-A) dt$$

Si l'espace est euclidien (ou de Hilbert),

$$\begin{aligned} f(B) - f(A) &= \int_0^1 \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(tB + (1-t)A), B - A \rangle dt \\ &= \langle \int_0^1 \overrightarrow{\text{grad}} f(tB + (1-t)A) dt, B - A \rangle \end{aligned}$$

Démonstration :

On pose $\varphi(t) = f(tB + (1-t)A) = f(A + t(B-A))$ pour $t \in [0, 1]$

Alors φ est la composée de $\sigma : t \mapsto tB + (1-t)A$ et de f , qui sont de classe C^1 donc φ est C^1 et $\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = (df)_{tB+(1-t)A}(\sigma'(t)) = (df)_{tB+(1-t)A}(B-A)$

$$\text{Donc } f(B) - f(A) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$$

Remarque :

Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow E$ continue par morceaux, où E est un espace de Hilbert, et $v \in E$.

$$\text{Alors } \int_0^1 \langle \alpha(t), v \rangle dt = \langle \int_0^1 \alpha(t) dt, v \rangle$$

Démonstration :

Si E est de dimension finie, il suffit d'en prendre une base et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Cas général :

On suppose $v \neq 0$ (le cas $v = 0$ est évident).

Si α est en escalier sur $[0, 1]$, on a bien le résultat.

Sinon, soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors φ en escalier sur $[0, 1]$ tel que $\|\alpha - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\|v\|}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \langle \alpha(t), v \rangle dt - \langle \int_0^1 \alpha(t) dt, v \rangle \right| &\leq \left| \int_0^1 \langle \alpha(t) - \varphi(t), v \rangle dt - \langle \int_0^1 \alpha(t) - \varphi(t) dt, v \rangle \right| \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_0^1 \langle \varphi(t), v \rangle dt - \langle \int_0^1 \varphi(t) dt, v \rangle \right|}_{=0} \\ &\leq \int_0^1 |\langle \alpha(t) - \varphi(t), v \rangle| dt + \left| \langle \int_0^1 \alpha(t) - \varphi(t) dt, v \rangle \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\alpha(t) - \varphi(t)\| \|v\| dt + \left\| \int_0^1 \alpha(t) - \varphi(t) dt \right\| \|v\| \\ &\leq \|\alpha - \varphi\|_\infty \|v\| + \|\alpha - \varphi\|_\infty \|v\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- Inégalité des accroissements finis :

Théorème :

Soit $\Omega \subset E$ ouvert convexe, $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

(1) On suppose qu'il existe M positif tel que pour tout $A \in \Omega$, $\|df_A\| \leq M$

Alors $\forall A, B \in \Omega, |f(B) - f(A)| \leq M \|B - A\|_E$

(2) Si E est un espace euclidien (ou de Hilbert) :

On suppose qu'il existe M positif tel que $\forall A \in \Omega, \|\overrightarrow{\text{grad}} f(A)\|_E \leq M$.

Alors $\forall A, B \in \Omega, |f(B) - f(A)| \leq M \|B - A\|_E$

Démonstration :

On a, pour tous $A, B \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |f(B) - f(A)| &= \left| \int_0^1 df_{tA+(1-t)B}(B-A) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |df_{tA+(1-t)B}(B-A)| dt \leq \int_0^1 \|df_{tA+(1-t)B}\| \|B-A\| dt \end{aligned}$$

Si E est un espace de Hilbert :

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire, continue et on a déjà vu que $\|\varphi\| = \|\vec{a}\|_E$.
 $\vec{v} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle$

Le résultat à montrer en découle.

Remarque :

Si Ω est connexe par arcs (non convexe) :

On admet que deux points de Ω peuvent être joints par un chemin de classe C^1 (on peut faire un chemin polygonal par morceaux, puis « affiner »... Ou C^1 par morceaux et continue suffit)

Soient $A, B \in \Omega$, $\sigma : [0,1] \rightarrow \Omega$ de classe C^1 tel que $\sigma(0) = A$, $\sigma(1) = B$.

Alors pour $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on a

$$f(B) - f(A) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \sigma(t)) dt = \int_0^1 df_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) dt$$

S'il existe M positif tel que $\forall H \in \Omega, \|df_H\| \leq M$, alors

$$|f(B) - f(A)| \leq M \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt, \text{ et } \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt \text{ correspond à la longueur de l'arc } \widehat{AB}_\sigma$$

Ainsi, $|f(B) - f(A)| \leq M \cdot dg_\Omega(A, B)$

Où $dg_\Omega(A, B)$ est la distance géodésique de A à B dans Ω , c'est-à-dire la borne inférieure de l'ensemble des longueurs des arcs \widehat{AB}_σ pour σ de classe C^1 reliant A et B .

- Application :

Théorème : caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

Soit Ω un ouvert convexe, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est constante si et seulement si elle est de classe C^1 et $\forall A \in \Omega, df_A = 0$

Complément : c'est valable si Ω est connexe.

Démonstration :

Si f est constante, alors elle a des dérivées partielles nulles donc de classe C^1 .

Et pour tout $A \in \Omega$, on a $\forall \vec{u} \in E, df_A(\vec{u}) = D_{\vec{u}}f(A) = 0$ donc $df_A = 0 \in E'$

La réciproque, c'est l'inégalité des accroissements finis avec $M = 0$.

Si Ω est seulement connexe :

On suppose que $A \in \Omega, df_A = 0$

(Le sens direct est vrai pour la même raison que précédemment)

Soit $A_0 \in \Omega, X = \{B \in \Omega, f(A_0) = f(B)\}$

Comme f est de classe C^1 , elle est continue donc X est fermé dans Ω .

De plus, $X \neq \emptyset$ car $A_0 \in X$.

Enfin, X est ouvert, car pour $B \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B_0(B, r) \subset \Omega$, mais comme une boule est convexe, d'après le point précédent,

$$\forall M \in B_0(B, r), f(M) = f(B) = f(A_0)$$

Donc $B_0(B, r) \subset X$, ce qui montre que X est aussi ouvert, donc $X = \Omega$ puisque Ω est connexe.

- Fonctions convexes sur un ouvert convexe Ω :

Définition :

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall (A, B) \in \Omega^2, \forall t \in [0, 1], f(t.A + (1-t).B) \leq t.f(A) + (1-t)f(B)$$

Rappel :

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

Remarque :

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tous $A, B \in \Omega$, $f|_{[A, B]}$ est convexe, ou encore si et seulement si pour tous $A, B \in \Omega$, $t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ est convexe (définie sur $[0; 1]$)

En effet :

Si f est convexe, alors $\psi_{A, B} : t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ est la composée de $t \mapsto t.A + (1-t).B$ qui est affine et de f qui est convexe, donc est convexe.

Réciproquement, si $\psi_{A, B}$ est convexe pour tous $A, B \in \Omega$, alors

$$\forall A, B \in \Omega, f(t.A + (1-t).B) = \psi_{A, B}(t) = \psi_{A, B}(t \times 1 + (1-t) \times 0)$$

$$\leq t \underbrace{\psi_{A, B}(1)}_{f(A)} + (1-t) \underbrace{\psi_{A, B}(0)}_{f(B)}$$

Proposition :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , Ω un convexe.

Alors f est convexe si et seulement si $\forall (A, B) \in \Omega^2, (df_A - df_B)(A - B) \geq 0$

Démonstration :

On introduit comme précédemment $\psi_{A, B} : t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ définie sur $[0; 1]$.

Alors $\psi_{A, B}$ est de classe C^1 , et $\forall t \in [0; 1], \psi'_{A, B}(t) = df_{tA+(1-t)B}(A - B)$

Si f est convexe, alors pour tous $A, B \in \Omega$, $\psi_{A, B}$ l'est c'est-à-dire que $\psi'_{A, B}$ est croissante donc $\psi'_{A, B}(1) - \psi'_{A, B}(0) = (df_A - df_B)(A - B) \geq 0$

Réciproquement, supposons que $\forall (A, B) \in \Omega^2, (df_A - df_B)(A - B) \geq 0$; Soient alors $A, B \in \Omega^2$. On a, pour $t, t' \in [0; 1]$ avec $t' > t$,

$$\begin{aligned} \psi'_{A,B}(t') - \psi'_{A,B}(t) &= (df_{t'A+(1-t')B} - df_{tA+(1-t)B})(A - B) \\ &= (df_{t'A+(1-t')B} - df_{tA+(1-t)B})\left(\frac{1}{t'-t}(t'A + (1-t')B - tA - (1-t)B)\right) \\ &= \frac{1}{t'-t} (df_{t'A+(1-t')B} - df_{tA+(1-t)B})(t'A + (1-t')B - tA - (1-t)B) \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\psi'_{A,B}$ est croissante, donc $\psi_{A,B}$ est convexe et f aussi.

C) Développements limités et formule de Taylor

- A l'ordre 1 :
Voir différentiabilité.

Théorème :

Soit $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

Alors pour tout $A \in \Omega$, f admet au voisinage de A le développement

$$f(A + H) = f(A) + (df_A)(H) + o(\|H\|)$$

Si E est de dimension finie, $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , alors pour tout

$$H = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E, \quad f(A + H) = f(A) + \sum_{j=1}^p h_j (\partial_{j, \mathfrak{B}} f)(A) + o(\|H\|)$$

Démonstration :

Si f est de classe C^1 , elle est différentiable en tout point.

- Matrice hessienne et différentielle seconde pour E de dimension finie.

Soit $\mathfrak{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Pour tout $A \in \Omega$, $df_A \in E^* = E'$ est définie par

$$\forall H = \sum_{j=1}^p h_j \varepsilon_j \in E, \quad df_A(H) = \sum_{j=1}^p h_j (\partial_j f)(A)$$

Comme f est de classe C^2 , $df : \Omega \rightarrow E^*$ est de classe C^1 , c'est-à-dire que les $\partial_j f$ sont de classe C^1 .

On note $(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ la base duale de \mathfrak{B} .

$$\text{Ainsi, } df_A = \sum_{j=1}^p (\partial_j f)(A) \varepsilon_j^*$$

On cherche les dérivées par rapport à ε_k de $df : A \mapsto df_A$:

$$\text{On a } \forall A \in \Omega, (\partial_k(df))(A) = \sum_{j=1}^p \partial_k(\partial_j f)(A) \varepsilon_j^*$$

Pour $\vec{h} = \sum_{j=1}^p h_j \varepsilon_j$, $\vec{k} = \sum_{j=1}^p k_j \varepsilon_j$, on a ainsi :

$$d^2 f_A(\vec{h}) = \sum_{i=1}^p \partial_i(df)(A) h_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\partial_i \partial_j f)(A) h_i \varepsilon_j^*$$

$$\text{Puis } d^2 f_A(\vec{h}) = \sum_{i=1}^p \partial_i (df)(A) h_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\partial_i \partial_j f)(A) h_i \varepsilon_j^*$$

De plus, $(d^2 f_A(\vec{h}))(\vec{k})$ est symétrique en (\vec{h}, \vec{k}) d'après le théorème de Schwarz.

Donc $B_A : (\vec{h}, \vec{k}) \in E^2 \mapsto (d^2 f_A(\vec{h}))(\vec{k}) \in \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique.

La matrice de B_A dans la base \mathfrak{B} , $((\partial_i \partial_j f)(A))_{\substack{i=1..p \\ j=1..p}}$ s'appelle matrice hessienne de

f en A relativement à \mathfrak{B} .

Exemple :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . La matrice hessienne de f (relativement à la base canonique) est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

- Formule de Taylor à l'ordre 2 :

Théorème :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $A \in \Omega$.

Au voisinage de A , f admet le développement limité :

$$f(A+H) = f(A) + \underbrace{\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(A)}_{df_A} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \right)}_{(d^2 f_A(H))(H)} + o(\|H\|^2)$$

Où $H = (h_1, \dots, h_n)$.

Remarque :

Pour un espace E de Banach, $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 ,

$$f(A+H) = f(A) + df_A(H) + \frac{1}{2} (d^2 f_A(H))(H) + o(\|H\|^2)$$

Démonstration :

Soit $r > 0$ tel que $B_0(A, r) \subset \Omega$.

Pour $\|H\| < r$, posons $\varphi(t) = f(A+tH)$, $t \in [0, 1]$.

Alors φ est de classe C^2 , et $\forall t \in [0, 1]$, $\varphi'(t) = df_{A+tH}(H) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(A+tH)$

Puis $\varphi''(t) = ((d^2 f_{A+tH})(H))(H) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A+tH)$

D'après la formule de Taylor intégral à φ entre 0 et 1,

$$f(A+H) - f(A) - df_A(H) = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0) = \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\alpha \in]0, r]$ tel que

$$\forall H \in E, \|H\| < \alpha \Rightarrow \left\| d^2 f_{A+H} - d^2 f_A \right\| < \varepsilon \quad (\text{car } A \mapsto d^2 f_A \text{ est continue})$$

Ainsi, pour $\|H\| < \alpha$,

$$f(A+H) - f(A) - df_A(H) - \frac{1}{2} (d^2 f_A(H))(H) = \int_0^1 (1-t) (\varphi''(t) - (d^2 f_A(H))(H)) dt$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 |\dots| &\leq \int_0^1 \left| (d^2 f_{A+tH})(H) - (d^2 f_A)(H) \right| dt \\
 &\leq \int_0^1 \left\| (d^2 f_{A+tH})(H) - (d^2 f_A)(H) \right\| \times \|H\| dt \\
 &\leq \int_0^1 \underbrace{\left\| d^2 f_{A+tH} - d^2 f_A \right\|}_{\leq \varepsilon \text{ car } \|tH\| \leq \alpha} \times \|H\|^2 dt \leq \varepsilon \|H\|^2
 \end{aligned}$$

D) Extremums

- Condition suffisante d'existence :

Théorème des bornes :

Soit K un compact de E , non vide, et $f : K \rightarrow F$ continue.

Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

- Condition nécessaire d'extremum sur un ouvert pour une fonction de classe C^1

Théorème :

Soit Ω un ouvert de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

On suppose que f atteint en A un extremum local.

Alors $df_A = 0$.

Définition :

Un point A en lequel df_A est nulle est appelé point critique de f .

Si $E = \mathbb{R}^n$: A est un point critique si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$ ou

encore si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \vec{0}$

Corollaire : le théorème s'énonce aussi ainsi :

Tout extremum sur un ouvert d'une fonction de classe C^1 est un point critique.

Démonstration (du théorème) :

Si A est un extremum local, alors pour tout $\vec{u} \in E$,

$\varphi_{\vec{u}} : t \mapsto f(A + t\vec{u}) \in \mathbb{R}$, définie au voisinage de 0, est de classe C^1 , présente un extremum en $t = 0$.

Donc $\varphi'_{\vec{u}}(0) = 0$. Mais $\varphi'_{\vec{u}}(0) = df_A(\vec{u})$

Donc $\forall \vec{u} \in E, df_A(\vec{u}) = 0$, donc $df_A = 0$

Remarque :

Soit $K \neq \emptyset$ un compact de E , $U = \overset{\circ}{K}$, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur U .

Alors f présente un maximum et un minimum sur K , qui sont atteints :

- Soit en des points critiques de f
- Soit sur $\partial K = K \setminus U$

- Rappel sur la dimension 1 :

Soit $I =]a, b[$ un segment de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et on suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Si $f''(x_0) > 0$, alors $f(x_0)$ est un minimum local strict

Si $f''(x_0) < 0$, alors $f(x_0)$ est un maximum local strict

Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire.

(Extremum strict :

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}, f(x) > f(x_0)$)

- Etude au voisinage d'un point critique :

Théorème (hors programme) :

Soit $A \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que A est un point critique de f .

On note H la matrice hessienne de f en A relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n .

Alors :

- (1) Si $f(A)$ est un minimum local, alors H est symétrique positive
- (2) Si $f(A)$ est un maximum local, alors H est symétrique négative.
- (3) Si H est définie positive, alors $f(A)$ est un minimum local strict
- (4) Si H est définie négative, alors $f(A)$ est un maximum local strict.

Rappel : H est positive si $\forall U \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tUHU \geq 0$

Démonstration :

(1) Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, posons $\varphi_{\vec{u}}(t) = f(A + t\vec{u})$ pour t au voisinage de 0.

Alors $\varphi_{\vec{u}}(0)$ est un minimum local de $\varphi_{\vec{u}}$

Comme $\varphi_{\vec{u}}$ est de classe C^2 , $\varphi'_{\vec{u}}(0) \geq 0$.

$$\text{Or, } \varphi''_{\vec{u}}(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ où } \vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$$

$$\text{Donc } \varphi''_{\vec{u}}(0) = {}^tUHU \geq 0 \text{ où } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Donc comme c'est valable pour tout $\vec{u} \in E$, H est bien positive.

(3) On utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 :

Prenons $\| \cdot \|$ définie sur \mathbb{R}^n par $\|X\| = \sqrt{{}^tXHX}$

($X \mapsto {}^tXHX$ est une forme quadratique définie positive)

D'après la formule de Taylor, au voisinage de A , on a :

$$f(A + \vec{u}) = f(A) + \underbrace{df_A(\vec{u})}_{=0} + \frac{1}{2} {}^tUHU + o(\|U\|^2)$$

$$\text{Donc } f(A + \vec{u}) - f(A) = \frac{1}{2} {}^tUHU + o(\|U\|^2)$$

Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall u \in \mathbb{R}^n, \|u\| < \alpha \Rightarrow \left| o(\|U\|^2) \right| < \frac{1}{2} {}^tUHU$

Donc pour $\|u\| < \alpha$, $f(A + \vec{u}) > f(A)$.

- Description des points critiques :

Définition :

Soit $A \in \Omega$ un point critique de f de classe C^2 . On note H la matrice hessienne de f

Si H est définie positive, A est un minimum local strict

Si H est définie négative, A est un maximum local strict.

Si H n'est ni positive ni négative, A est un col, c'est-à-dire que pour tout voisinage V de A , il existe $M, N \in V$ tels que $f(M) < f(A) < f(N)$

- Cas de la dimension 2 :

Théorème :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $A \in \Omega$.

On pose $p = \frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$

Ainsi, la matrice hessienne de f en A est $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Alors :

(1) A est un point critique si et seulement si $p = q = 0$.

(2) On suppose que $p = q = 0$:

Si $\Delta = r.t - s^2 > 0$, alors A est un extremum local strict :

Un minimum local strict si $r > 0$ (ou $r+t > 0$)

Un maximum local strict si $r < 0$ (ou $r+t < 0$)

Si $\Delta < 0$, alors A est un col.

Si $\Delta = 0$, A est dégénéré : on ne peut en général rien dire.

Démonstration :

Soient λ, μ les deux valeurs propres (réelles) de H . On a alors $\lambda\mu = \det H = \Delta$

Si $\Delta > 0$, on a :

- Soit $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ donc H est définie positive donc on a un minimum local strict (et $r+t = \text{Tr}(H) = \lambda + \mu > 0$)

- Soit $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ donc H est définie négative donc on a un maximum local strict.

Si $\Delta < 0$, H n'est ni positive ni négative donc A est un col

Si $\Delta = 0$, on peut supposer que $\lambda = 0$:

- Soit $\mu > 0$ et A n'est pas un maximum local

- Soit $\mu < 0$ et A n'est pas un minimum local

- Soit $\mu = 0$ et il n'y a rien à dire (sauf que $H = 0$)

Proposition :

Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Alors f est convexe si et seulement si pour tout $A \in \Omega$, $H_A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ est

symétrique positive.

Démonstration :

La condition est nécessaire :

Si f est convexe, alors pour tous $A, B \in \Omega$, $\varphi_{A,B} : t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ est convexe (car f est convexe et $t \mapsto t.A + (1-t).B$ est affine)

Donc $\forall t \in [0,1], 0 \leq \varphi''_{A,B}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t.A + (1-t).B)$

Où $\vec{u} = A - B = (u_1, \dots, u_n)$

Avec $t=1$, on obtient $\forall U \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t U H_A U \geq 0$

La condition est suffisante :

Si H_A est symétrique positive, alors $\forall A, B \in \Omega, \forall t \in [0,1], \varphi''_{A,B}(t) \geq 0$ donc $\varphi_{A,B}$ est convexe. En particulier, $\forall t \in [0,1], \varphi_{A,B}(t.1 + (1-t).0) \leq t.\varphi_{A,B}(1) + (1-t).\varphi_{A,B}(0)$

C'est-à-dire $\forall t \in [0,1], f(t.A + (1-t).B) \leq t.f(A) + (1-t).f(B)$

- Laplacien, fonctions sous-harmoniques, principe du maximum.

Pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $A \in \Omega$, on pose

$$(\Delta f)(A) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(A) = \text{Tr}(H_A)$$

Définition :

On dit que f est harmonique lorsqu'elle est de classe C^2 et $\Delta f = 0$, et sous-harmonique lorsque $\forall A \in \Omega, \Delta f(A) \geq 0$

Remarque :

Si f est convexe et de classe C^2 , elle est sous-harmonique (car alors H_A est symétrique positive pour tout $A \in \Omega$, donc $\text{Tr}(H_A) \geq 0$)

Exercice :

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , borné, et $K = \bar{U}$, compact.

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur K et de classe C^2 sur U telle que $\forall A \in U, \Delta f(A) \geq 0$

Alors $\sup_K f = \sup_{\partial K} f$

Démonstration :

Si $\forall A \in U, \Delta f(A) > 0$:

Alors d'après le théorème des bornes, il existe $M_0 \in K$ tel que $f(M_0) = \sup_K f$

Si on avait $M_0 \in U$, alors M_0 serait un point critique et un maximum local. Donc H_{M_0} serait symétrique négative et donc $\Delta f(M_0) = \text{Tr}(H_{M_0}) \leq 0$, ce qui est faux.

Si maintenant $\forall A \in U, \Delta f(A) \geq 0$:

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(M) = f(M) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2$. Alors g_ε est continue sur K .

Sur U , on a $\forall M \in U, \Delta g_\varepsilon(M) = \Delta f(M) + 2n\varepsilon > 0$

Donc le cas précédent s'applique et pour tout $M \in K$,

$$f(M) \leq g_\varepsilon(M) \leq \sup_{\partial K} g_\varepsilon(M)$$

Or, K est borné, donc il existe $c > 0$ tel que $\forall M \in K, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq c$ où $M = (x_1, \dots, x_n)$

Pour $M \in \partial K$, $g_\varepsilon(M) \leq f(M) + \varepsilon.c$, donc $\forall M \in K, f(M) \leq g_\varepsilon(M) \leq \sup_{\partial K} f + \varepsilon.c$

Comme c'est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\forall M \in K, f(M) \leq \sup_{\partial K} f$

- Exemple : problème de Laplace.

Soit K un compact, $U = \overset{\circ}{K}$. Soit $\varphi : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$, continue.

On cherche s'il existe $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f|_{\partial K} = \varphi$ et f est de classe C^2 harmonique sur U : $\Delta f = 0$.

Ce problème a au plus une solution.

Démonstration :

Si f et g sont deux solutions, alors $f - g$ est sous-harmonique ($\Delta(f - g) = 0 \geq 0$) sur U , continue sur K et nulle sur ∂K .

Donc $f - g \leq \sup_{\partial K} (f - g) = 0$, et de même $g - f \leq \sup_{\partial K} (g - f) = 0$. Donc $f = g$.