Chapitre 24 : Propriétés métriques des arcs plans et gauches

Notations, conventions, rappels

ε désigne ici un espace affine euclidien (de dimension 2 ou 3), éventuellement orienté.

Rappel :

Un arc paramétré est dit simple, régulier ou birégulier lorsque tout point de l'arc l'est.

Par abus de langage, on appelle arc paramétré de classe C^k simple, régulier, ou plus simplement courbe de ε toute partie Γ de ε qui est le support d'au moins un arc paramétré régulier de classe C^k simple, régulier ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$)

A) Paramétrages admissibles des arcs et arcs orientés

On appelle paramétrage admissible de Γ toute application $\psi : I \to \varepsilon$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que ψ est de classe C^k, injective (on dit aussi simple), d'image Γ (on dit que Γ est le support de ψ) et $\vec{\psi}'$ ne d'annule pas (on dit aussi que ψ est régulier)

On rappelle que les autres paramétrages admissibles de Γ sont les $\psi \circ \theta$ où $\theta : J \to I$ est un C^k–difféomorphisme.

Lorsque, de plus, Γ est un arc orienté, on considèrera uniquement des paramétrages admissibles croissantes, c'est-à-dire conservant l'orientation.

B) Etude locale d'un arc plan

Lorsque ψ admet en t_0 au moins deux dérivées d'ordre r et $s > r$ non colinéaires, on sait décrire l'allure de l'arc au voisinage de $\psi(t_0)$ (allure ordinaire, rebroussements, inflexion).

NB : tous les arcs considérés sont, sauf exception signalée, de classe C^k ($k \geq 2$), simples, réguliers voire birégulier si nécessaire, orientés et contiennent au moins deux points (et donc une infinité)

I Abscisse curviligne, longueur, vecteur unitaire tangent

A) Mesure algébrique d'un sous–arc

Soit Γ un arc orienté et ψ un paramétrage admissible.

> Pour $(A,B) \in \Gamma^2$, on appelle longueur du sous–arc AB de Γ le nombre réel $\widehat{AB}_\Gamma = \int_a^b \|\vec{\psi}'(t)\| dt$ où a est le paramètre de A, b celui de B.

Remarque :

Un changement de variable dans l'intégrale montre que $\widehat{AB}_\Gamma$ est indépendant du choix du paramétrage admissible direct ψ choisi

B) Paramétrage normal et abscisse curviligne

On appelle paramétrage normal d'un arc C^k un paramétrage admissible $\psi : I \to \varepsilon$ tel que $\forall t \in I, \|\vec{\psi}'(t)\| = 1$.

Propriétés :
Soit ψ un paramétrage normal.
Alors $\forall t \in I, <\vec{\psi}'(t), \vec{\psi}''(t)> = 0$
Et pour $k \geq 2$, ψ est birégulier si et seulement si $\vec{\psi}''$ ne s'annule pas.

En effet :
Pour la première propriété, il suffit de dériver $t \mapsto <\vec{\psi}'(t), \vec{\psi}'(t)>$, constante égale à 1.
La deuxième découle ensuite de la première.

Exemple :
$t \mapsto (R\cos(1/R), R\sin(1/R))$ est un paramétrage normal du cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

Théorème :
Soit $\psi : I \to \varepsilon$ un paramétrage admissible de l'arc Γ, C^k, simple, régulier, orienté et $A_0 = \psi(t_0) \in \Gamma$. On considère l'application $s : M \in \Gamma \mapsto \widehat{A_0 M}_\Gamma$. Alors :

- $s : \Gamma \to \mathbb{R}$ est injective et a pour image un intervalle I_0 de $\mathbb{R}$.
- La réciproque $\sigma : I_0 \to \Gamma$ de s est un paramétrage admissible direct et normal de Γ.
- Inversement, si ρ est un paramétrage admissible direct et normal de Γ, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t, s(\rho(t)) = t + c$

Corollaire :
Un arc admet un paramétrage normal si et seulement si il est régulier.

Démonstration :
Soient $M, M' \in \Gamma$, supposons que $s(M) = s(M')$
Il existe $t, t' \in I$ tels que $\psi(t) = M$, $\psi(t') = M'$.
Ainsi, $s(M) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\psi}'(u)\| du$, $s(M') = \int_{t_0}^{t'} \|\vec{\psi}'(u)\| du$.
Donc $\int_{t_0}^{t'} \|\vec{\psi}'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\psi}'(u)\| du$, c'est-à-dire $\int_{t}^{t'} \|\vec{\psi}'(u)\| du = 0$
Comme $\vec{\psi}$ est un paramètre admissible de l'arc régulier, on a $\forall t \in I, \|\vec{\psi}'(u)\| \neq 0$
Donc $t = t'$, c'est-à-dire $M = M'$.
On a, pour tout $t \in I$, $s(\psi(t)) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\psi}'(u)\| du = h(t)$.
Alors h est définie et dérivable sur I, et $\forall t \in I, h'(t) = \|\vec{\psi}'(t)\| > 0$
Donc h est un C^k–difféomorphisme de I dans son image, qui est I_0 (car $h(I) = s(\psi(I)) = s(\Gamma) = I_0$). Donc h est inversible, et on a $\forall t \in I, \psi(t) = s^{-1}(h(t))$, c'est-à-dire $\forall x \in I_0, \sigma(x) = s^{-1}(x) = \psi(h^{-1}(x))$.
Donc σ est un paramétrage admissible direct de Γ (car h^{-1} est un C^k–difféomorphisme croissant et ψ est un paramétrage admissible direct de Γ)

De plus, $\forall x \in I_0, \sigma'(x) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(x))}\psi'(h^{-1}(x)) = \dfrac{\vec{\psi}'(h^{-1}(x))}{\left\|\vec{\psi}'(h^{-1}(x))\right\|}$,

donc $\forall x \in I_0, \left\|\sigma'(x)\right\| = 1$

Donc σ est même un paramétrage normal de Γ.

Soit maintenant $\rho : I' \to \varepsilon$ un paramétrage admissible direct normal de Γ.

On note $t_0 \in I'$ tel que $\rho(t_0) = A_0$.

Soit $t' \in I'$; en notant $M = \rho(t')$, il existe $t \in I_0$, tel que $\sigma(t) = M$.

Alors $\widehat{A_0 M}_\Gamma = \int_0^t \left\|\vec{\sigma}'(u)\right\| du = \int_{t_0}^{t'} \left\|\vec{\rho}'(u)\right\| du$

Donc comme les deux paramétrages sont normaux, on a $t = t' - t_0$

Donc $\sigma(t' - t_0) = \sigma(t) = M = \rho(t')$, c'est-à-dire $s(\rho(t')) = t' - t_0$

Comme c'est valable pour tout $t' \in I'$, on a bien en posant $c = -t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I', s(\rho(t)) = t + c$.

C) Vecteur unitaire tangent

Si ψ est un paramétrage admissible de Γ, on appelle vecteur unitaire tangent en $A \in \Gamma$ de paramètre a le vecteur $\vec{T}_\Gamma(A) = \dfrac{\vec{\psi}'(a)}{\left\|\vec{\psi}'(a)\right\|}$. Si ψ est un paramétrage normal, on a ainsi $\vec{T}_\Gamma(A) = \vec{\psi}'(a)$.

Théorème :

Le vecteur unitaire tangent ne dépend pas du paramétrage admissible *direct* choisi.

Si Γ est paramétré par une abscisse curviligne $s \mapsto M(s)$ et si $A = M(a)$, on a $(\vec{T}_\Gamma)(A) = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}(a)$

D) Cas d'un arc non orienté régulier et simple

Un tel arc peut être muni de deux orientations. Les mesures algébriques, abscisses curvilignes, vecteurs unitaires tangents obtenus pour ces deux orientations seront deux à deux opposés.

On appelle longueur d'un sous–arc (A, B) de Γ le réel positif $\lg_\Gamma(AB) = \left|\widehat{AB}_\Gamma\right|$

II Repère de Frenet, courbure d'un arc orienté

Sauf dans le paragraphe relatif aux arcs gauches, les arcs ici sont tous plans.

A) Repère de Frenet

Soit Γ un arc orienté C^k, simple, régulier, du plan orienté ε. En tout point $M \in \Gamma$, on définit le repère orthonormé direct mobile de Frenet $(M, \vec{T}, \vec{N})$ où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent et $\vec{N}$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{T}$, c'est-à-dire que si R est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ de ε et $\vec{k}$ un vecteur unitaire directement orthogonal à ε, on a $\vec{N} = R(\vec{T}) = \vec{k} \wedge \vec{T}$.

B) Si $k \geq 2$: courbure, formule de Frenet

Théorème :

Soit $s \in I \mapsto M(s)$ un paramétrage normal C^k ($k \geq 2$) de Γ.

Alors il existe une application $\gamma : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-2} telle que

$$\forall s \in I, \frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma(s)\vec{N} \text{ et } \forall s \in I, \frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -\gamma(s)\vec{T}$$

$M(s_0)$ est birégulier sur Γ si et seulement si $\gamma(s_0) \neq 0$

Définition :

$\gamma(s)$ est la courbure algébrique en $M(s)$. En un point birégulier $R(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$ est le rayon de courbure algébrique.

Propriété :

On a $\gamma(s) = < \dfrac{d\vec{T}}{ds}(s), \vec{N}(s) >$

C) Arcs gauches : droites et plans remarquables en dimension 3

On suppose ici que ε est un espace euclidien orienté de dimension 3 ou plus et on considère un arc $t \mapsto \psi(t) \in \varepsilon$.

Outre la tangente, on considèrera le plan normal (perpendiculaire à la tangente au point $M = \psi(t)$). En un point birégulier, on définit le plan osculateur : c'est le plan passant par $M = \psi(t)$ dirigé par le système libre $(\vec{\psi}'(t), \vec{\psi}''(t))$: il contient la tangente.

On considère aussi parfois la droite du plan osculateur passant par M et perpendiculaire à la tangente : on l'appelle normale principale ; la perpendiculaire en M au plan osculateur s'appelle binormale.

III Rectification : exemples de calcul et formules usuelles

Soit Γ un arc C^k ($k \geq 1$), régulier, simple, orienté.

On utilise la notation différentielle : si $t \mapsto \psi(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + ... \in \varepsilon$ est un paramétrage admissible, par exemple au point $A = \psi(a)$, dx désigne la valeur de la différentielle $f'(t)dt$ en $t = a$.

A) Utilisation de la formule locale

Théorème :

Si Γ est un arc birégulier tangent en $O = M(t_0)$ à $x'x$, le rayon de courbure en O est $R = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x^2(t)}{2y(t)}$.

Remarque :

S'il s'agit d'étudier la courbure en un seul point, on peut se ramener à ce cas par changement de repère orthonormal.

Démonstration : admis

B) Choix du paramètre

t désigne un paramètre quelconque, s un paramètre normal (une abscisse curviligne). Plus généralement, si $s \mapsto u = f(s)$ est un difféomorphisme, on peut considérer le paramétrage admissible $u \mapsto M(f^{-1}(u))$.

On va examiner le cas des paramètres usuels :

Exemples :

(1) En coordonnées cartésiennes, l'abscisse x est un paramètre admissible si et seulement si $x'(s)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire si et seulement si Γ n'a aucune tangente parallèle à $y'y$. On a un énoncé analogue pour y.

(2) (Un relèvement de) l'angle polaire $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est un paramètre admissible si et seulement si aucune tangente à Γ ne passe par O. En effet, si Γ ne passe pas par O, le théorème de relèvement permet d'écrire $\overrightarrow{OM}(s) = \rho(s)\vec{u}_\theta(s)$ (où ρ, θ sont de classe C^k et $\rho > 0$), d'où $\vec{M}'(s) = \rho'(s)\vec{u}_\theta(s) + \rho(s)\theta'(s)\vec{v}_\theta(s)$. On voit donc que θ' ne s'annule pas si et seulement si $\vec{M}'(s)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

(3) (Un relèvement de) l'angle $\alpha(s) = (\vec{i}, \vec{T}(s))$ est un paramètre admissible si et seulement si Γ est birégulier. On a en effet $\alpha'(s) = \gamma(s)$.

(Puisque $\vec{T}(s) = \cos\alpha(s).\vec{i} + \sin\alpha(s).\vec{j}$ et donc en dérivant,
$\gamma(s)\vec{N}(s) = \alpha'(s)(-\sin\alpha(s).\vec{i} + \cos\alpha(s).\vec{j}) = \alpha'(s)\vec{N}(s)$)

C) Paramétrage normal d'un arc plan

Dans ce cas, on a :

$$\vec{T}(s) = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds},\ \vec{N}(s) = R(\vec{T}(s)) = \vec{k} \wedge \vec{T}(s),\ \gamma(s) = \text{Mixte}(\vec{T}(s), \vec{T}'(s))$$

où $\text{Mixte}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{i} \times \vec{v} \cdot \vec{j} - \vec{u} \cdot \vec{j} \times \vec{v} \cdot \vec{i}$, invariant par changement de base orthonormée directe. (et changé en l'opposé pour un changement indirect)

D) Paramétrage quelconque des coordonnées cartésiennes en dimension 2 ou 3 (ou plus) dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},...)$: cinématique.

Γ désigne ici l'arc $t \mapsto M(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + ...$

On pose $v = v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \left\|\vec{M}'(t)\right\|$ (vitesse algébrique). On a alors :

$v = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + ...}$ et $M'(t) = v\vec{T}$ ou $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \dfrac{dx}{ds}\vec{i} + \dfrac{dy}{ds}\vec{j} + ...$

En dimension 2, on a ainsi :

$\vec{M}'(t) = v\vec{T}$, $\vec{M}''(t) = v'(t)\vec{T} + v^2(t)\gamma\vec{N}$

D'où $\gamma v^3 = \text{Mixte}(\vec{M}'(t), \vec{M}''(t))$ et $\dfrac{1}{R} = \gamma = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$.

E) Coordonnées cartésiennes dans un plan euclidien orienté

Ici, le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est supposé orthonormé direct. On note $\alpha(s)$ un relèvement de classe C^{k-1} de l'angle $(\vec{i},\vec{T}(s))$. On a alors :

$\vec{T}(s) = \cos\alpha(s).\vec{i} + \sin\alpha(s).\vec{j}$

Et donc $\cos\alpha(s) = \dfrac{dx}{ds}$, $\sin\alpha(s) = \dfrac{dy}{ds}$, $\tan\alpha(s) = \dfrac{dy}{dx}$

On a aussi $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}$

Attention : la connaissance de $\tan\alpha$ ne détermine α que modulo π, ce qui est insuffisant quand l'orientation intervient. (On ne peut par exemple déterminer $\vec{T}$ et $\vec{N}$ qu'au signe près)

F) Coordonnées polaires (ou cylindriques)

- En dimension 2 ou 3 :

On prend comme paramètre (un relèvement de) l'angle polaire $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{OM}(s))$ (ou $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{Om}(s))$ en cylindriques...).

On pose $\vec{u}_\theta = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$

On a alors $\overrightarrow{OM} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta + z(\theta)\vec{k}$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta + z'(\theta)\vec{k}$,

$\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2 + z'(\theta)^2}$ et $\vec{T} = \dfrac{\rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta + z'(\theta)\vec{k}}{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 + z'(\theta)^2)^{1/2}}$

- En dimension 2, on a aussi :

$\vec{T} = \dfrac{\rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta}{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{1/2}}$, $\vec{N} = \dfrac{-\rho(\theta)\vec{u}_\theta + \rho'(\theta)\vec{v}_\theta}{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{1/2}}$, $\gamma v^3 = \text{Mixte}(\vec{M}'(\theta), \vec{M}''(\theta))$

Soit $\gamma = \dfrac{\rho(\theta)^2 + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho'(\theta)}{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{3/2}}$

G) Coordonnées polaires

On note V un relèvement de l'angle orienté $(\vec{u}_\theta, \vec{T})$.

On a $\alpha = V + \theta$, $T = \cos V.\vec{u}_\theta + \sin V.\vec{v}_\theta = \dfrac{d\rho}{ds}\vec{u}_\theta + \rho\dfrac{d\theta}{ds}\vec{v}_\theta$

Donc $\cos V = \dfrac{d\rho}{ds}$, $\sin V = \rho\dfrac{d\theta}{ds}$, $\tan V = \rho\dfrac{d\theta}{d\rho} = \dfrac{\rho}{\rho'}$.