

Chapitre 3 : Les conducteurs en équilibre dans le vide

I Propriétés des conducteurs en équilibre dans le vide

A) Définition

1) Conducteur

C'est un milieu contenant des charges mobiles, c'est-à-dire qui peuvent se déplacer, aussi petite que soit la force exercée sur eux.

C'est aussi un conducteur ohmique :

Densité de courant $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; σ est la conductivité électrique du milieu
(Loi phénoménologique)

2) Conducteur en équilibre

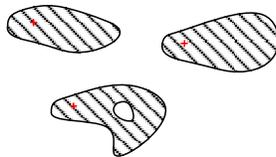
Le conducteur est en équilibre lorsque les charges sont fixes à l'intérieur (macroscopiquement), soit $\vec{j} = \vec{0}$

Comme la charge est une grandeur conservative,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Donc ρ est indépendant de t .

B) Dans la masse des conducteurs



1) Champ E .

$$\text{On a } \begin{cases} \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}, \text{ d'où } \boxed{\vec{E} = \vec{0}}.$$

2) Potentiel V .

On a $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Donc $\boxed{V \text{ est constant}}$ à l'intérieur de chaque conducteur.

3) Distribution de charges

$$\text{On a } \nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Donc } \rho = 0.$$

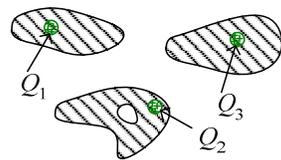
Donc le conducteur est globalement neutre à l'intérieur.

Remarques :

$$\text{On a } \rho_{\text{mobile}} + \rho_{\text{fixe}} = 0.$$

Nécessairement, un conducteur chargé ne peut l'être qu'en surface.

4) Conclusion



A $t = 0$, on laisse les charges se déplacer.

Ainsi, les charges excédentaires vont se déplacer vers la surface, et de façon que le champ soit nul dans tous les conducteurs.

L'épaisseur sur laquelle s'accumulent les charges est appelée épaisseur de Debye (de l'ordre de 10 à 100 Angström)

C) Au voisinage d'un conducteur



1) Potentiel

$$\text{On a } V(M) = V_{\text{int}} \text{ (car le potentiel est continu)}$$

2) Champ

$$\vec{E}_2 - \underbrace{\vec{E}_1}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

(C'est le théorème de Coulomb)

Attention :

D'après la formule, le champ ne dépend que de σ au voisinage ; mais en fait σ dépend de la répartition sur tout l'espace.

D) A la surface d'un conducteur

1) Potentiel

Toujours la même chose : $V = V_{\text{int}}$.

2) Champ



On a $\vec{E}(M) = \underbrace{\vec{E}_i(M)}_{dv} + \underbrace{\vec{E}_e(M)}_{cv}$, donc le champ n'est pas défini.

3) Pression électrostatique

- Analyse :

Les charges à la surface du conducteur cherchent à en sortir, et donc un élément de la surface est soumis à une force $d\vec{F}$.

- Vérification expérimentale :

- Conducteur dont la surface est mobile : bulle de savon

Lorsqu'on charge une bulle, on remarque que son volume augmente.

-  Papier d'argent,
pouvant se décoller

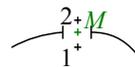
On remarque expérimentalement que si on charge la boule, le papier d'argent va effectivement se décoller.

- Expression de P_e :



L'élément est soumis à la force exercée par toutes les charges de l'espace sauf lui-même.

On a donc $d\vec{F} = dq \times \vec{E}_e(M)$



On a $\vec{E}_2 = \vec{E}_i(2) + \vec{E}_e(2)$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_i(1) + \vec{E}_e(1)$

Si 1 et 2 sont proches, $\vec{E}_e(M) \approx \vec{E}_e(1) \approx \vec{E}_e(2)$

On admet que le disque est assez petit pour que σ soit uniforme sur ce disque.

C'est alors un plan de symétrie, et $\vec{E}_i(1) = -\vec{E}_i(2)$

Donc $\underbrace{\vec{E}_2}_{=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}} + \underbrace{\vec{E}_1}_{=0} = 2\vec{E}_e(M)$, et $\vec{E}_e(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$

De plus, $dq = \sigma dS$, d'où $d\vec{F} = dq \cdot \vec{E}_e(M) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n} = P_e d\vec{S}$

Avec $P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

E) Dans un conducteur creux

On suppose qu'on a un conducteur de la forme :



1) Potentiel

On a $V = V_0 = \text{cte}$ dans le conducteur, donc V est uniforme sur la surface du conducteur.

Donc d'après le théorème de Earnshaw, V est aussi uniforme dans la cavité, vide de charges.

Ou :

$\vec{\nabla}^2 V = 0$ dans la cavité, $V = \text{cte}$ sur la surface.

Donc d'après le théorème de Dirichlet, il n'y a qu'une seule solution.

On en connaît une : $V = V_0$, qui est donc la solution.

2) Champ

Comme le potentiel est constant, le champ est nul aussi dans la cavité.

3) Charges surfaciques

Il n'y a pas de charge sur la surface car sinon le champ serait discontinu à la traversée de la surface, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, tout se passe comme si il n'y avait pas de cavité

II Phénomène d'influence

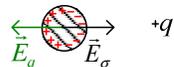
A) Définition

1) Exemple

On considère une sphère conductrice isolée, de charge globale $Q = 0$.

On a ainsi $\sigma = 0$.

On approche une charge ponctuelle de l'infini.



($q > 0$ par exemple)

Ainsi, on a toujours $Q = 0$, mais ici $\sigma \neq 0$.

E_σ augmente au fur et à mesure que σ augmente, donc à l'équilibre,

$\vec{E}_q + \vec{E}_\sigma = \vec{0}$. (\vec{E}_q : créé par q , dans le conducteur)

De plus, on a $V > 0$ dans le conducteur car le potentiel créé par σ est globalement nul au centre, alors que celui créé par q est positif.

2) Influence

C'est la modification d'électrisation d'un conducteur par modification des charges extérieures.

B) Charge d'un conducteur par contact/influence



1) Par contact

Lorsqu'on touche la sphère, les électrons vont sur la sphère, qui est conductrice.

2) Par influence

Etape 1 : on approche le bâton d'ébonite.



On a $Q = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$ et $V < 0$ (c'est le potentiel créé par les charges positives/négatives, qui s'annulent, plus celui créé par l'ébonite, négatif)

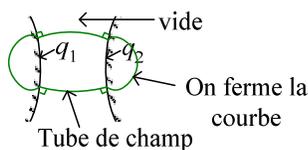
Etape 2 : on relie la sphère à la terre.



Ainsi, comme le potentiel était négatif, il va augmenter (jusqu'à 0) et des charges négatives vont partir, donc $Q > 0$.

Etape 3 : on retire la masse, puis l'ébonite.

C) Théorème des éléments correspondants



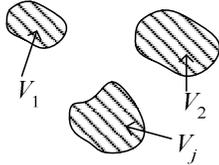
On a d'une part $\phi = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$, mais d'autre part $\phi = 0$.

En effet : à l'intérieur, le champ est tangent à la surface (on a supposé qu'on a un tube de champ), et à l'extérieur il est nul (pour un conducteur).

D'où $q_1 = -q_2$.

III Propriété des solutions de l'équation de Laplace

On considère ici des conducteurs fixes :



Chaque conducteur forme un volume équipotentiel, et on prend $V = 0$ à l'infini.
Que vaut alors le potentiel entre les conducteurs ?

On a déjà la relation $\vec{\nabla}^2 V = 0$.

A) Théorème d'unicité

Les potentiels à l'intérieur de chaque conducteur sont fixés, ainsi que celui à l'infini.

On a donc ici un problème de Dirichlet, dont il n'y a qu'une seule solution.

On peut en fait choisir pour chaque conducteur de spécifier soit V_i , soit q_i .

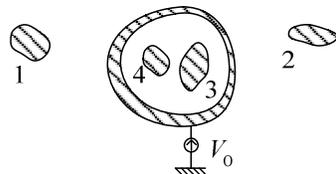
B) Théorème de superposition

Si l'équation $\vec{\nabla}^2 V = 0$ avec les conditions aux limites $\{V_i\}$ donne un potentiel $V(\vec{r})$, et avec les conditions aux limites $\{V'_i\}$ donne un potentiel $V'(\vec{r})$, alors on aura avec les conditions $\{\lambda V_i + \mu V'_i\}$ un potentiel $V''(\vec{r}) = \lambda V(\vec{r}) + \mu V'(\vec{r})$

(Vient directement de la linéarité et de l'homogénéité de l'équation de Laplace)

C) Théorème des écrans électriques

1) Enoncé, démonstration



A condition que le conducteur (0) contenant 4 et 3 soit *maintenu* au potentiel V_0 , le fait de modifier l'électrisation de 3 et 4 n'influe pas sur celle de 1 et 2, et vice-versa.

On a ainsi séparé l'espace en deux parties totalement indépendantes.

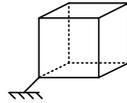
Démonstration :

A l'extérieur, l'espace entier privé de 1 et 2 et le contenu de 0 vérifie l'équation de Laplace $\vec{\nabla}^2 V = 0$ avec les conditions aux limites V_1, V_2, V_0, V_∞ (où $V_\infty = 0$), donc admet une unique solution, qui est indépendante de 3 et 4.

De même à l'intérieur, l'espace délimité par le « creux » de 0 sans 3 et 4 vérifie la même équation avec les conditions aux limites V_3, V_4, V_0 donc la solution est aussi indépendante de 1 et 2.

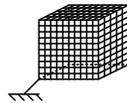
2) Application

- Blindage électrostatique :



Tout ce qui est à l'intérieur est entièrement protégé (mais ce n'est pas très utile, si on ne peut pas y accéder...)

- Cage de Faraday :



On a aussi une protection.

Cette protection est d'autant meilleure que le pas du maillage est petit, et lorsqu'on est à une distance au moins égale à celle du pas.

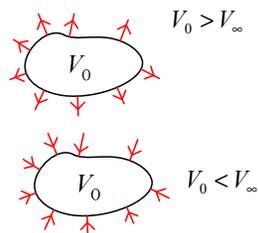
Remarque :

Les trois théorèmes sont conséquences uniquement de l'équation de Laplace, et peuvent donc être adaptés à d'autres cas que l'électrostatique.

IV Conducteur seul dans l'espace

A) Lignes de champ et densité de charge

1) Lignes de champ



(Découle du théorème de Earnshaw)

2) Densité de charge

Si $V_0 > V_\infty$, on a $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} > 0$

Si $V_0 < V_\infty$, on a $\sigma < 0$

B) Capacité

1) Définition

On a $Q = C(V_0 - V_\infty)$, où C est une constante, appelée capacité du conducteur.

Démonstration (de la relation) :

Etat 1 : les conditions $\begin{cases} V_0 \\ V_\infty \\ \nabla^2 V = 0 \end{cases}$ déterminent un unique potentiel $V(\vec{r})$, d'où un

champ $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, puis $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$, donc $Q = \oiint \sigma \cdot dS$.

Ainsi, $Q = f(V_0, V_\infty)$.

Etat 2 : les conditions $\begin{cases} V_0+k \\ V_\infty+k \\ \nabla^2 V = 0 \end{cases}$ donnent le potentiel $V(\vec{r})+k$, donc E ne

change pas, et Q non plus. Donc $Q = f(V_0 - V_\infty)$.

Etat 3 : les conditions $\begin{cases} \lambda V_0 \\ \lambda V_\infty \\ \nabla^2 V = 0 \end{cases}$ donnent le potentiel $\lambda V(\vec{r})$, d'où un champ

$\lambda \vec{E}$, donc Q devient λQ .

Donc $Q = C \times (V_0 - V_\infty)$

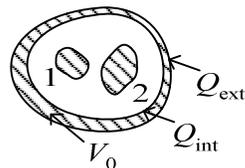
Ou $Q = CV$ avec $V = V_0 - V_\infty$.

- Unité : Farad
- C 'est une caractéristique géométrique (indépendant du milieu d'après la démonstration)
- $C > 0$.

2) Capacité d'un conducteur creux

- A l'intérieur :

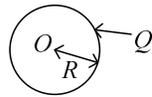
Avec le théorème de Gauss, $Q_1 + Q_2 + Q_{\text{int}} = 0$



- A l'extérieur :

On a les conditions aux limites V_0, V_∞ , l'équation $\nabla^2 V = 0$. Donc $Q_{\text{ext}} = C(V_0 - V_\infty)$, C étant indépendant des charges intérieures (dans la démonstration précédente, les calculs ne dépendent que des conditions aux limites)

3) Capacité d'un conducteur sphérique



On a $V = V(O) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(= \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$, donc $C = 4\pi\epsilon_0 R$.

Remarque : depuis un autre point,

$$V = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dS}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1}{4\pi} \iint \frac{dS}{r}$$

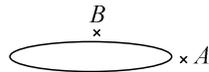
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Donc $\iint \frac{dS}{r} = 4\pi.R$, résultat purement géométrique !!

V Compléments

A) Pouvoir des pointes

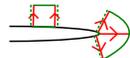
1) Influence de la courbure de conducteur sur le champ au voisinage



Alors $\|\vec{E}(A)\| \gg \|\vec{E}(B)\|$, c'est-à-dire $|\sigma_A| \gg |\sigma_B|$.

Démonstration :

- $\|\vec{E}\|$ diminue d'autant plus vite que la courbure est importante. En effet :
 - Qualitativement,



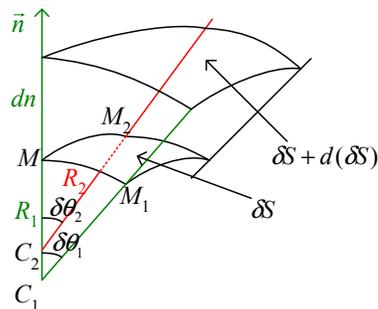
Le flux passant à travers les parois en pointillé est nul (les parois suivent un tube de champ)

Donc le champ entrant par le bas (la gauche) sort par en haut (la droite)

Donc sur le « plat », le champ varie très peu, alors qu'au niveau de la pointe il diminue très brutalement.

- Quantitativement :

A partir d'un point M de la surface, on la parcourt dans deux directions :



On a $E \delta S = (E + dE)(\delta S + d(\delta S))$

Soit $E \delta S = E \delta S + dE \cdot \delta S + Ed(\delta S) + dEd(\delta S)$

Soit, au deuxième ordre, $\frac{dE}{E} = \frac{-d(\delta S)}{\delta S}$.

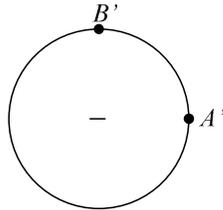
On a $\delta S = R_1 \delta \theta_1 \cdot R_2 \delta \theta_2$ (on assimile la surface à un rectangle)

Donc $\frac{d(\delta S)}{\delta S} = \frac{dn}{R_1} + \frac{dn}{R_2}$ (on différencie logarithmiquement)

Donc $\frac{dE}{E} = -dn \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{-2}{R} dn$, où $\frac{2}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

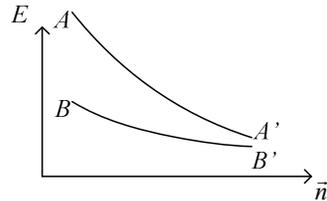
Donc $E = E_0 e^{-\frac{2n}{R}}$.

- Champ à grande distance :



A grande distance, la charge équivaut à une charge ponctuelle, donc les champs se rapprochent.

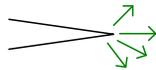
On a donc une variation de la forme :



D'où le résultat voulu.

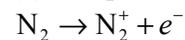
2) Manifestation du pouvoir des pointes

- Effet de \vec{E} sur les particules :



- Si la pointe est chargée positivement :

(1) Les particules de l'air vont s'ioniser :



(2) N_2^+ est repoussé violemment par le champ.

A cause des chocs, d'autres molécules partent aussi.

On a donc un déplacement global de matière, appelé vent électrique.

(3) Les électrons vont sur la pointe.

La pointe va donc se décharger,

La quantité de mouvement des électrons est la même que celle des ions N_2^+ , donc les électrons vont faire reculer la pointe.

- Si la pointe est chargée négativement :

(1) On a toujours ionisation des particules de l'air $N_2 \rightarrow N_2^+ + e^-$.

Les ions N_2^+ vont aller sur la pointe, qui va reculer et se décharger.

On aura ici encore un vent électrique à cause des électrons.

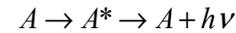
(2) Pression électrostatique :

Si le champ est assez important, des électrons vont quitter la pointe.

- Effets macroscopiques :

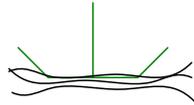
Luminescence :

Les chocs entre particules vont exciter celles-ci, qui vont se désexciter en émettant des photons :



On a donc un effet de luminescence.

Différents effets :



- Si la foudre tombe sur ou à proximité du bateau, il apparaît au voisinage du mât (pointe) un halo luminescent (connu sous le nom de feu de Saint-Elme)

- Câble haute tension :

Les câbles ont dans une certaine direction un rayon de courbure très important, et on voit donc apparaître une « gaine » luminescente (effet Corona)

- Décharge d'un condensateur.

- Vent électrique, recul du conducteur.

3) Application pratique

- Protection des condensateurs :

On met des boules métalliques aux sommets des plaques du condensateur.

Remarque :

On a alors des pointes inversées, dont on peut montrer qu'elles ont l'effet inverse par rapport aux pointes normales.

- Dans un avion, on ajoute des pointes sur l'avion pour lui permettre de se décharger.

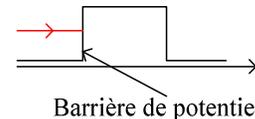
- Canon à émission de champ (= canon à électron)

Pour une pointe en tungstène (W) de rayon $r \sim 10^{-7}$, un potentiel négatif de quelques kV, on obtient un champ E d'environ 10^{10} V.m^{-1} .

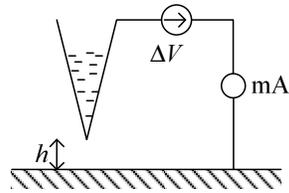
On aura donc des électrons qui vont être émis par la pointe ; on a ainsi créé une source quasi-ponctuelle.

- Microscope à effet tunnel :

Effet tunnel :



On montre en mécanique quantique qu'une particule arrivant avec une énergie inférieure à celle de la barrière de potentiel a quand même une certaine probabilité de la traverser (probabilité d'autant plus faible que l'écart entre l'énergie et la hauteur de la barrière est grand)



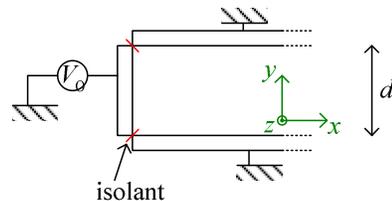
Classiquement, on devrait avoir $I = 0$.

Quantiquement, certains électrons vont quand même passer, et on a $I(h, \Delta V)$ (I est une fonction décroissante de h et croissante de ΔV)

Intérêt :

Permet d'obtenir la topographie d'un milieu avec une très bonne précision (de l'ordre de l'atome)

B) Exemple de résolution de l'équation de Laplace



On considère que les plaques ont une extension infinie par rapport à z (ainsi, le problème est invariant par translation), et on veut connaître V dans le domaine central.

1) Mise en équation

- On a un problème bidimensionnel : $V(x, y)$

- $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

- Conditions aux limites :

$$V(0, y) = V_0, \forall y \in]0; d[$$

$$V(x, 0) = V(x, d) = 0, \forall x \in]0; +\infty[$$

A l'infini, l'influence de V_0 ne se fait plus sentir, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, y) = 0, \forall y \in]0; d[$$

2) Séparation des variables

On cherche une solution de la forme $V(x, y) = X(x)Y(y)$

Donc dans l'équation :

$$X''Y + XY'' = 0, \text{ soit } \frac{X''}{X''} = \frac{-Y}{Y''}. \text{ Comme } X \text{ ne dépend que de } x, Y \text{ que de } y,$$

$$\text{on a } \frac{X''}{X''} = \frac{-Y}{Y''} = \text{cte} = \frac{1}{\lambda}.$$

3) Détermination de X, Y .

- Pour X :

On a $X'' - \lambda X = 0$.

On ne peut pas avoir $\lambda < 0$ car sinon on obtiendrait une solution sinusoïdale qui ne vérifierait pas les conditions aux limites (à l'infini)

Donc $\lambda = k^2$, où $k > 0$.

Donc $X = Ae^{-kx} + Be^{kx}$.

Comme $X \xrightarrow{+\infty} 0$, on a $B = 0$, donc $X = Ae^{-kx}$.

On prend $A = 1$ (on renvoie la constante sur $Y \dots$)

Donc $X = e^{-kx}$

- Pour Y :

On a $Y'' + k^2 Y = 0$

Donc $Y = C \sin ky + D \cos ky$

Comme $Y(0) = 0$, $D = 0$.

Comme $Y(d) = 0$, $\sin kd = 0$, soit $k = \frac{n\pi}{d}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $Y(y) = C \sin \frac{n\pi}{d} y$

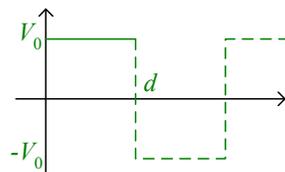
Mais on devrait avoir $Y(y) = V_0, \forall y \in]0; d[\text{ (}\otimes\text{)}$.

4) Détermination de V .

On a trouvé une famille de solutions $Y_n(y) = C_n \sin \frac{n\pi}{d} y$ de l'équation.

Et $V_n = X(x)Y_n(y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\frac{n\pi}{d} x}$ vérifie l'équation et toutes les conditions aux limites sauf la première.

On vérifie aisément que toute combinaison linéaire des V_n vérifie aussi les conditions aux limites autres que $V(0, y) = V_0, \forall y \in]0; d[$. On cherche donc une combinaison pour laquelle $\forall y \in]0; d[, V_0 = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi}{d} y$ (sous forme d'une série de Fourier) :



Calcul de la série :

$$\text{On a } \int_0^d V_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) dy = \sum_n C_n \underbrace{\int_0^d \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) dy}_{=0 \text{ sauf si } n=m}$$

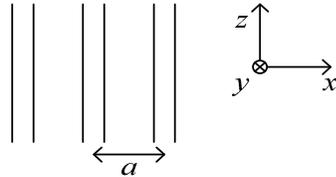
$$\text{Donc } V_0 \frac{d}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = C_m \frac{d}{2},$$

Donc $C_m = 0$ si m est pair, $C_m = \frac{4V_0}{m\pi}$ si m est impair.

$$\text{D'où } V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m \text{ impair}} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\frac{n\pi}{d} x}$$

C) Potentiel créé par une grille

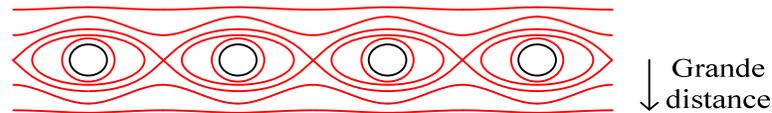
On prend une grille, dont tous les fils sont de même rayon R et espacés régulièrement de a :



On met tous les fils au même potentiel V_0 .

On a ainsi un potentiel $V(x, y)$ au voisinage de la maille.

1) Allure des équipotentiels



2) Détermination du potentiel

- Séparation des variables :

On cherche $V(x, y) = X(x)Y(y)$

On obtient ainsi l'équation :

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\text{Donc } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{cte} = -k^2$$

- Calcul de X :

On obtient l'équation différentielle : $X'' + k^2 X = 0$

Si $k^2 \geq 0$, on obtient des solutions périodiques : c'est ce qu'on veut.

On a donc $X = A \cos(kx + \varphi)$, avec $X(x) = X(x + a)$

$$\text{Donc } k = \frac{2n\pi}{a}$$

On a donc des solutions $X_n(x) = A_n \cos\left(n \times \frac{2\pi}{a} x + \varphi_n\right)$

- Calcul de Y :

On a pour Y l'équation $Y'' - k^2 Y = 0$

Dont les solutions sont $Y = B e^{-ky} + C e^{ky}$

Pour avoir des solutions non divergentes, on doit donc avoir :

$$\text{Si } y \geq 0, Y = Be^{-ky}$$

$$\text{Si } y \leq 0, Y = Ce^{ky}$$

Pour $y \geq 0$: (on obtient ensuite le cas $y \leq 0$ par symétrie)

$$\text{On a des solutions } Y_n = e^{-\frac{2n\pi}{a}y}$$

$$\text{Et donc } V_n = A_n e^{-\frac{2n\pi}{a}y} \cos\left(n \times \frac{2\pi}{a}x + \varphi_n\right)$$

• Conditions aux limites :

On se place en O :

Par continuité du potentiel, pour $x^2 + y^2 = R^2$ on doit avoir $V = V_0$

On peut donc écrire le potentiel sous forme d'une série

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = \underbrace{V_0}_{=\text{cte}} + V_1 + \dots$$

Où les termes V_1, \dots décroissent avec une distance caractéristique $\delta_n = \frac{na}{2\pi}$

Ainsi, à une distance de l'ordre de a , il n'y a quasiment plus de variation de la part de V_n