Chapitre 6 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

I Postulat de Lorentz

Dans un référentiel galiléen, une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ est soumise à une force $\boxed{\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$.

Ce postulat *définit* en même temps le champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$. (C'est une triple définition)

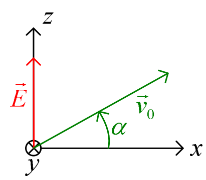
S'il n'y a pas de champ $\vec{B}$, on retrouve la loi de Coulomb.

La formule est valable pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ quelconques, pas nécessairement uniformes ou stationnaires.

II Particule dans un champ $\vec{E}$ uniforme et stationnaire

A) Mouvement

On a $m\vec{a} = q\vec{E}$

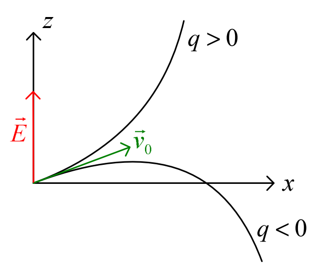


A $t = 0$, $\vec{r} = \vec{0}$, $v_{0_y} = 0$.

On a $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \dfrac{q}{m} E \end{cases}$, donc $\begin{cases} \dot{x} = \text{cte} = v_{0_x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \dfrac{q}{m} E.t + v_{0_z} \end{cases}$, puis $\begin{cases} x = v_{0_x} t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2}\dfrac{q}{m} E.t^2 + v_{0_z} t \end{cases}$

Ou $\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha.t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2}\dfrac{q}{m} E.t^2 - v_0 \sin \alpha.t \end{cases}$

Donc l'équation de la trajectoire est $z = \dfrac{1}{2}\dfrac{q}{m}\dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - \tan \alpha.x$



B) Bilan énergétique

On a $m\vec{a} = q\vec{E}$

Donc $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l} = q\vec{E}\cdot d\vec{l}$

Soit $md\vec{v}\cdot\vec{v} = -qdV$

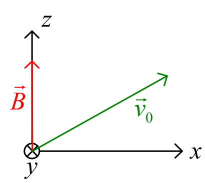
Donc $d\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{E_c} + d\underbrace{(qV)}_{E_p} = 0$

III Particule dans un champ $\vec{B}$ uniforme et stationnaire

A) Mouvement

On a $m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

1) Méthode 1



On a $m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix}$

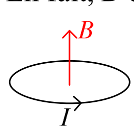
Donc :

$$\begin{cases}\ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y}\\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x}\\ \ddot{z} = 0\end{cases}$$

Remarque :

Les équations semblent au premier abord traduire un phénomène irréversible

En fait, B est changé en $-B$ quand $t\mapsto -t$. Visualisation :



Quand on change le sens du temps, le courant sera dans l'autre sens, et donc B aussi.

Ainsi, B est non seulement un pseudo-vecteur (dépend de l'orientation fixée), mais il dépend aussi de l'orientation choisie pour le temps.

Remarque : on a la même chose pour les vecteurs instantanés de rotation.

- Mouvement selon Oz :

$\dot{z} = \text{cte} = v_{0_z}$, donc $z = v_{0_z} t$

- Mouvement selon xOy :

- Pulsation cyclotron :

On note $\omega = \dfrac{qB}{m}$, et on note la pulsation cyclotron $\boxed{\omega_c = |\omega| = \left|\dfrac{qB}{m}\right|}$.

- Ainsi, les équations deviennent $\begin{cases} \ddot{x} = \omega.\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega.\dot{x} \end{cases}$

On note $u = x + iy$. Ainsi, on a l'équation différentielle $\ddot{u} = -i\omega.\dot{u}$

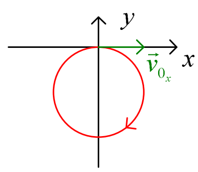
Donc $\dot{u} = \dot{u}_0 e^{-i\omega.t}$, où $\dot{u}_0 = v_{0_x} + iv_{0_y} = v_{0_x}$

D'où $u = \dfrac{v_{0_x}}{-i\omega}\left(e^{-i\omega.t} - 1\right)$

Soit $\begin{cases} x = \dfrac{v_{0_x}}{\omega}\sin\omega.t \\ y = \dfrac{v_{0_x}}{\omega}\cos(\omega.t) - 1 \end{cases}$, ou $x^2 + \left(y + \dfrac{v_{0_x}}{\omega}\right)^2 = \dfrac{v_{0_x}^2}{\omega^2}$

La trajectoire est donc un cercle de rayon $R = \left|\dfrac{v_{0_x}}{\omega}\right| = \left|\dfrac{mv_{0_x}}{qB}\right|$ et de centre $\left(0, -\dfrac{v_{0_x}}{\omega}\right)$

Il manque le sens de parcours de ce cercle :



(Ici, $v_{0_x} > 0$, $q > 0$, $B > 0$)

Le cercle est donc parcouru dans le sens anti-trigonométrique quand $\omega > 0$

Donc il est décrit à la vitesse angulaire $-\omega$.

- Mouvement résultant :

- Si $\vec{v}_0 = \vec{0}$, on a $\vec{v} = \vec{0} \quad \forall t$

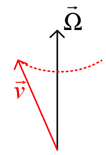
Un champ $\vec{B}$ est donc incapable de mettre en mouvement une particule immobile

- Si $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, on a un mouvement circulaire uniforme
- Pour $\vec{v}_0$ quelconque, on a un mouvement circulaire en plus d'un déplacement rectiligne uniforme, donc un mouvement hélicoïdal de pas constant.

2) Méthode 2

On a $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, donc $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{q}{m}\vec{B} \wedge \vec{v} = -\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

On a donc un mouvement de précession du vecteur vitesse :



Ainsi, la composante de la vitesse colinéaire à $\vec{\Omega}$ (donc à $\vec{B}$) est constante, donc on a un mouvement rectiligne parallèlement $\vec{\Omega}$, et la rotation uniforme de la composante normale de la vitesse traduit une accélération centrale, donc un mouvement de rotation…

B) Bilan énergétique

On a $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Donc $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = q\underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0}dt$

Donc l'énergie cinétique est constante.

Ainsi, le champ magnétique ne peut non seulement pas mettre en mouvement la particule, mais il ne peut pas modifier le module de sa vitesse.

Remarque :

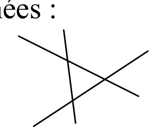
Lorsque $\vec{B}$ dépend du temps, on verra qu'il induit nécessairement un champ $\vec{E}$ qui pourra alors mettre la particule en mouvement.

C) Application

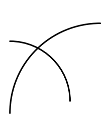
Carl Anderson, physicien des particules élémentaires, a mis en évidence des rayons cosmiques : ce sont des particules venant de l'espace qui ont une énergie cinétique énorme (à peu près celle d'une balle de tennis à grande vitesse). Ces particules, lorsqu'elles ont des chocs avec d'autres, créent ainsi des gerbes de particules élémentaires :

Chambre à brouillard : c'est un lieu rempli de particules dans un état métastable de vapeur sursaturante. Lorsqu'il y a un choc avec les particules de cette chambre, l'équilibre est alors rompu et on observe une traînée de liquide (qui revient rapidement à l'état vapeur ensuite).

Pour mettre en évidence ces rayons cosmiques, on prend une « photo » de ces traînées :

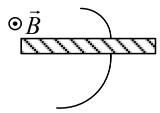


Pour savoir si la particule est chargée, on applique un champ $\vec{B}$ uniforme dans la chambre :



Ainsi, on a affaire à des particules chargées, mais on ne sait pas si cette charge est positive ou négative (les traînées se font trop rapidement pour voir dans quel sens elles se forment)

Astuce : on place une barre de plomb au milieu de la chambre :



A la traversée de la plaque de plomb, la vitesse de la particule va diminuer, et on n'aura donc pas le même rayon de courbure avant et après. Dans le cas schématisé, la particule se déplaçait donc du bas vers le haut. Vu le champ, on a donc affaire à une charge positive.

Par d'autres moyens, on montre que la masse de cette particule est la même que celle de l'électron, et a la même charge (au signe près) que l'électron. Cette particule est appelée posit(r)on.

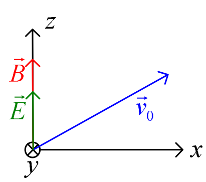
Remarque :

On pouvait réaliser la même chose avec un liquide sous–saturant (chambre à bulle, 1960), mais c'est plus difficile à réaliser ; cependant, les mesures sont plus précises (il y a plus de chances d'y avoir un choc, donc une traînée plus « complète »)

IV Action de deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes et stationnaires

On a ici $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

A) Si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires



On aura ici un système d'équations différentielles ($\omega = \dfrac{qB}{m}$) :

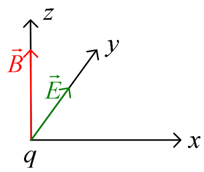
$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega.\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega.\dot{x} \\ \ddot{z} = qE/m \end{cases}$$

Ainsi, B n'agit que sur les composantes x, y et E sur la composante z.

Ainsi, on aura un mouvement dans xOy circulaire uniforme (vitesse angulaire $-\omega$), et un mouvement le long de Oz uniformément accéléré.

Ce qui correspond à une ellipse à pas variable.

B) Si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et que la vitesse de départ est nulle



1) Analyse trop sommaire

On remarque que le champ $\vec{B}$ va provoquer un mouvement circulaire, et $\vec{E}$ un mouvement selon l'axe des y.

Ainsi, on peut penser que globalement on aura une dérive de la charge le long de y. Mais on va voir que c'est faux.

2) Mouvement

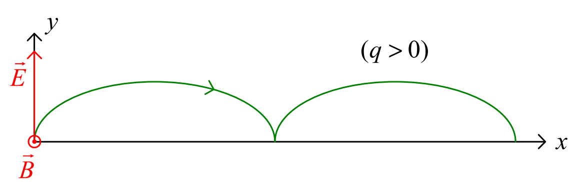
$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega.\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega.\dot{x} + qE/m \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

- Selon Oz, on aura $z = \text{cte} = 0$
- Dans xOy :

On pose $u = x + i.y$

Après calcul, on trouve que $\begin{cases} x = \dfrac{E}{B\omega}(\omega.t - \sin \omega.t) \\ y = \dfrac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega.t) \end{cases}$

Ainsi, y reste bornée, mais x augmente (correspond à l'équation paramétrique d'une cycloïde) :



3) Discussion

- L'analyse était fausse :

Plus la particule va vite, plus B incurve la trajectoire, et lorsque la vitesse devient aussi orthogonale à $\vec{E}$, la particule continue vers le bas en ralentissant…

Mathématiquement, l'analyse fausse faite au départ consistait à considérer que $\begin{cases} \ddot{x} = \omega.\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega.\dot{x} + qE/m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega.\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega.\dot{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = qE/m \end{cases}$ ce qui est évidemment faux !

- Vitesse de dérive :

C'est le mouvement moyen de la particule (sur un temps $\tau >> \frac{2\pi}{\omega}$)

On a alors $< x >= \dfrac{E}{B} t$, $< y >= \dfrac{E}{B\omega}$.

La position moyenne de la particule est donc légèrement au dessus de 0, et on a une vitesse moyenne uniforme $\boxed{v_D = \dfrac{E}{B}}$ (indépendant de la masse de la particule)