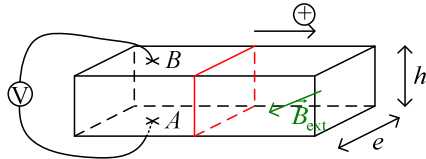


# Chapitre 9 : Actions magnétiques subies par les courants

## I Effet Hall

### A) Description



Lorsqu'il n'y a pas de champ extérieur, la tension est nulle par symétrie.

Lorsqu'on ajoute  $\vec{B}_{\text{ext}}$ , on observe une tension  $u_{AB} \neq 0$  (très faible : de l'ordre de  $10^{-5}$  V pour  $B = 1$  T)

### B) Interprétation

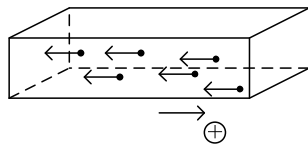
#### 1) Modèle

- On admet qu'il n'y a qu'un seul type de porteurs mobiles, de charge  $q$  et de vitesse moyenne  $\vec{v}$
- On néglige le champ  $\vec{B}$  créé par le conducteur lui-même (« champ propre »)

#### 2) En l'absence de champ extérieur

On suppose par exemple  $I > 0$ ,  $q < 0$  (dans les dessins)

- Densité de charge, intensité :



Dans un conducteur, en régime permanent, on a  $\rho = \rho_m + \rho_f = 0$

On a  $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , avec  $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ .

Comme  $\rho_f$  est uniforme,  $\rho_m$  l'est aussi et  $I = \rho_m \bar{v} S$

- Forces sur les porteurs :

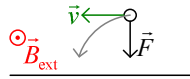
On a  $m\vec{a} = q\vec{E}_{\parallel} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$

En régime permanent, on peut négliger  $\vec{a}$ , et  $q\vec{E}_{\parallel} = \frac{m}{\tau} \vec{v}$

### 3) En présence de $\vec{B}_{\text{ext}}$ .

Le fait qu'on observe une tension non nulle indique qu'il y a un champ transversal  $\vec{E}_H$  qui apparaît (champ de Hall)

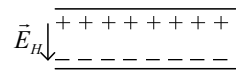
- Origine du champ de Hall :



$$\text{On a } \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On aura donc un excès de charges – en base et de charge + en haut.

On aura donc un nouveau champ  $\vec{E}_H$



Donc les particules vont être soumises à une nouvelle force  $\vec{F}' = q\vec{E}$  dirigée vers le haut, jusqu'à ce que cette force compense exactement  $\vec{F}$

Et on aura un nouveau régime permanent avec un léger excès de charge,

avec un écart relatif  $\frac{\Delta\rho_m}{\rho_m} \sim 10^{-20}$

- Le champ de Hall en régime permanent :

D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

On néglige ici encore  $m\vec{a}$  devant les autres termes (en régime permanent)

Ainsi, longitudinalement :

$$q\vec{E}_{\parallel} = \frac{m}{\tau}\vec{v}.$$

Donc les particules ont la même vitesse avant et après l'application du champ  $\vec{B}$ , et on aura toujours  $I = \rho_m vS$

Transversalement :

$$q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

D'où le calcul de  $\vec{E}_H$  en connaissant  $\vec{v}, \vec{B}$ .

- Tension de Hall :

$$\text{On a } U_{AB} = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = \int_A^B \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = \int_A^B vBdz = vBh$$

$$\text{Et donc } U_{AB} = \frac{IBh}{\rho_m S}$$

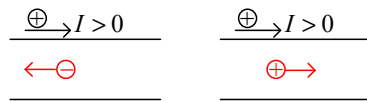
$$\text{Ou, avec } S = he : \boxed{U_{AB} = \frac{IB}{\rho_m e}}$$

Discussion :

- Il faut une épaisseur la plus petite possible pour une tension maximale
- $B$  doit aussi être le plus élevé possible
- On remarque qu'apparemment  $U_{AB}$  est indépendant de  $h$ , mais il vaut mieux quand même avoir  $h$  assez grand pour limiter l'effet Joule quand l'intensité est importante. Cependant, il faut que  $B$  soit uniforme, ce qui limite quand même  $h$ .

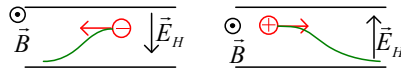
### C) Application

Etude de la conduction électrique



Que se soient les charges négatives qui se déplacent vers la gauche, ou les charges positives qui se déplacent vers la droite, on aura le même courant si on a la même orientation. Alors comment savoir quel est le signe des charges qui vont se déplacer ?

En fait, l'effet Hall est algébrique et permet de conclure :



Constante de Hall d'un matériau :

- Définition :

$$\text{On pose } R_H = \frac{U_{AB} e}{IB}$$

- Avec le modèle simplifié, on a ainsi  $R_H = \frac{1}{\rho_m}$

- Ordres de grandeur :

	Al	Cu	Ag	Fe	Pb
$R_H (\text{m}^3 \cdot \text{C}^{-1})$	$-0,3 \cdot 10^{-10}$	$-0,5 \cdot 10^{-10}$	$-0,9 \cdot 10^{-10}$	$0,2 \cdot 10^{-10}$	$0,1 \cdot 10^{-10}$

$$\text{Or, } \rho_m \sim \frac{-1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-30}} \sim -10^{-11} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

Ainsi, le modèle est valable pour l'aluminium, le cuivre ou l'argent, mais il ne convient pas pour le fer ou le plomb.

En fait, cet écart est dû à des effets quantiques.

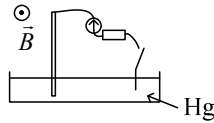
Mesure de  $\vec{B}$

$$\text{On a } R_H = \frac{U_{AB} e}{IB}$$

Ainsi, en connaissant (ou mesurant)  $U$ ,  $e$ ,  $I$ , on peut calculer  $B$ .  
(Utilisé pour les sondes à effet Hall)

## II Force magnétique exercée par un champ extérieur sur une distribution de courants

### A) Mise en évidence expérimentale



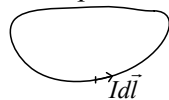
Lorsque l'interrupteur est fermé, on observe un déplacement :

- Orthogonal à  $\vec{B}$ .
- Dont le sens dépend de celui de  $\vec{B}$
- Et du sens de  $I$ .

### B) Loi de Laplace

#### 1) Distribution linéique

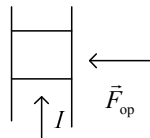
- Expression :



Un élément  $Id\vec{l}$  du circuit est soumis à une force  $d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

- Discussion :

- On a une relation analogue à  $d\vec{F} = dq\vec{E}$
- On considère ici cette formule comme un postulat (elle découle en fait d'autres postulats)
- On admet que la loi est valable même lorsque le champ n'est pas stationnaire (c'est faux en réalité)
- Comme  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur,  $d\vec{F}$  est un vecteur vrai (!)
- Attention : il n'y a pas de  $\mu_0$  dans l'expression de la loi.
- Cette formule (contrairement à celle de Biot et Savart) a un sens différentiellement :



On considère un élément de courant, qu'on a coupé dans le circuit, tout en le laissant en place (ainsi, le courant peut quand même passer). Ainsi, la force de Laplace, c'est  $-\vec{F}_{op}$  où  $\vec{F}_{op}$  est la force à exercer pour maintenir l'élément en place.

Certains disent qu'il y aurait aussi une force longitudinale (qu'on ne peut pas observer de cette manière), appelée force d'Ampère, et qui serait à l'origine d'explosions « inexplicables » de circuits.

## 2) Distributions surfaciques et volumiques

Pour un élément surfacique de courant,  $d\vec{F} = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}$

Et pour un élément volumique :  $d\vec{F} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$ .

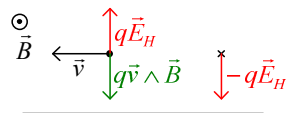
## C) Origine de la force de Laplace

### 1) Paradoxe

L'essentiel de la masse est représenté par les ions du réseau. Ainsi, la force de Laplace s'exerce sur les ions du réseau, alors que ceux-ci ne sont soumis à aucune force électromagnétique (ce sont les électrons qui sont en mouvement et sont donc soumis à l'action du champ)

### 2) Mécanisme de transmission

- Mécanisme :

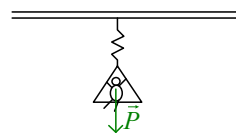


A cause du champ magnétique, il y a un champ de Hall  $q\vec{E}_H$  qui apparaît, et qui s'exerce donc aussi sur les ions du réseau.

Mais globalement, la force exercée sur l'ensemble {ions + électrons} vaut  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Ainsi, c'est une force de nature électrique qui déplace les ions du réseau.

- Comparaison :

Un ingénieur qui construit un télésiège doit prévoir à quelles forces sera soumis le câble.



Le skieur avec la nacelle est soumis à son poids. Mais il a un mouvement rectiligne, donc la force exercée par le ressort compense le poids.

Ainsi, le câble est soumis à une force égale au poids du skieur, mais qui *n'est pas* le poids du skieur (seul le skieur est soumis à son poids)

- On a  $d\vec{F} = \sum_{i \in dl} \vec{F}_i = \sum_{i \in dl} q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$

### 3) Force magnétique de Lorentz, force de Laplace

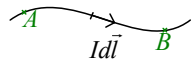
- La force de Lorentz (magnétique) :
  - S'exerce sur une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  :  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
  - Ne travaille pas.

- La force de Laplace :
  - S'exerce sur un élément de courant
  - Résulte de la somme de plusieurs forces de Lorentz électriques et magnétiques.
  - Mais elle peut travailler (le travail des forces électriques n'est pas nul)

## D) Forces de Laplace sur un circuit filiforme

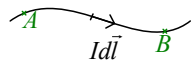
### 1) Résultante et moment

- Résultante :



On a  $\vec{F} = \int_A^B Id\vec{l} \wedge \vec{B} = I \int_A^B d\vec{l} \wedge \vec{B}$  (en régime permanent)

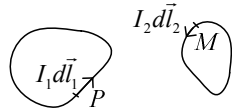
- Moment en  $O$  :



$\times O$

On a  $d\vec{M}(O) = \vec{OP} \wedge (Id\vec{l} \wedge \vec{B})$ , donc  $\vec{M}(O) = I \int_A^B \vec{OP} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})$

### 2) Force de Laplace entre deux circuits



- Action de  $d\vec{l}_1$  sur  $d\vec{l}_2$  :

$$\begin{aligned} \delta^2 F_{1 \rightarrow 2} &= I_2 d\vec{l}_2 \wedge d\vec{B}_1 = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \left( \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\vec{l}_1 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 d\vec{l}_2 \wedge \left( d\vec{l}_1 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Remarque :

On n'a pas de formule simple pour changer  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$  en  $\vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c})$

Donc ici le théorème de l'action et de la réaction n'est pas vérifié pour  $\delta^2 F_{1 \rightarrow 2}$ .

En fait, on a utilisé ici la loi de Biot et Savart différentielle. De plus, le théorème de l'action et de la réaction n'est pas valable en relativité (temps de propagation) quand l'interaction se fait entre deux systèmes spatialement séparés.

- Action de 1 sur 2 :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 d\vec{l}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{l}_1 - d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1 \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left( \oint_1 d\vec{l}_1 \oint_2 d\vec{l}_2 \cdot \left( -\vec{\nabla}_M \frac{1}{r} \right) - \oint_1 \oint_2 d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1 \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Mais  $\oint_2 d\vec{l}_2 \cdot \left(-\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}\right) = 0$  (gradient), donc  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1 \frac{\vec{r}}{r^3}$  et le théorème de l'action et de la réaction est bien vérifié globalement.

### 3) Circuit entier dans un champ $\vec{B}$ uniforme.

- Résultante :

On a  $\vec{F} = \oint Id\vec{l} \wedge \vec{B} = I(\oint d\vec{l}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$

- Moment :

On le calculera plus tard avec une autre méthode.

Mais déjà on voit qu'on a un couple, donc que  $\vec{M}$  ne dépend pas du point d'application.

## E) Définition légale de l'Ampère

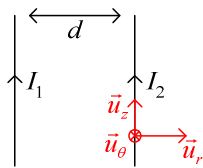
### 1) Définition

L'Ampère est l'intensité d'un courant continu qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, infini, parallèles, distants de un mètre, de section négligeable dans le vide, produit entre eux une force égale à  $2.10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$

Remarque :

La manipulation pour calculer une telle intensité n'est pas facile à réaliser... ! En fait, c'est plutôt une définition théorique, et le calcul réel de l'Ampère est fait avec d'autres manipulations.

### 2) Valeur de $\mu_0$ .



Le fil 1 crée un champ magnétique  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{u}_\theta$

Donc un élément  $I_2 d\vec{l}_2$  du fil 2 est soumis à une force

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= I_2 d\vec{l}_2 \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{u}_\theta \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{u}_r d\vec{l}_2 \end{aligned}$$

Si  $|I_1| = |I_2| = 1\text{A}$ ,  $d = 1\text{m}$  on a alors  $\left\| \frac{d\vec{F}_2}{d\vec{l}_2} \right\| = 2.10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$

Donc  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ SI}$

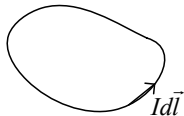
### 3) Valeur de $\epsilon_0$ .

On montrera plus tard que  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

Et on a  $c \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Donc  $\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi.10^9} \text{ SI}$

## III Forces magnétiques dues au champ propre



On a  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{propre}}$

En général, on peut négliger  $\vec{B}_{\text{propre}}$  devant  $\vec{B}_{\text{ext}}$

On va étudier ici le cas où  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$

### A) Mise en évidence expérimentale

#### 1) 1<sup>ère</sup> manipulation

Si on prend une spire :



Elle va se déformer sous l'action du courant jusqu'à devenir circulaire.

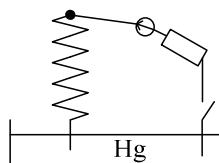
Problème :

$\vec{B}_{\text{propre}}$  est très faible.

Il faut donc un courant très important dans la fibre, et donc un fil suffisamment gros pour éviter qu'il ne fonde. Mais il faut aussi que la spire soit souple, donc assez fine aussi.

(On peut faire le montage avec un supraconducteur)

#### 2) Spirale de Roget



Lorsqu'on ferme l'interrupteur, la spirale se met à trembloter.

Interprétation :

Dans la spirale, le champ  $\vec{B}_{\text{propre}}$  est plus important (on se rapproche d'un solénoïde). Elle se contracte alors, et le circuit est coupé, puis elle se retend...



## B) Torseur des actions dues au champ propre

Si les seules forces exercées sont les forces de Laplace,

On a  $[\vec{F}_L] = \vec{0}$  (Théorème de l'action et de la réaction)

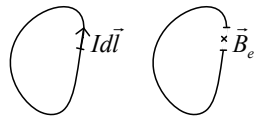
Et donc  $\vec{F} = \vec{0}$  (soit  $\vec{a} = \vec{0}$ )

Et  $\vec{M} = \vec{0}$ , donc  $\vec{\sigma} = \vec{cte}$

Pour la spirale de Roget, elle était fixée en haut donc le centre d'inertie se déplaçait. Si l'expérience avait été faite dans le vide, on aurait vu que la spirale se contractait et se dilatait sans se déplacer.

## C) Expression des forces dues au champ propre

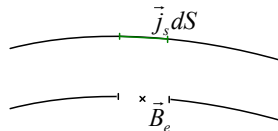
### 1) Schématisation linéique



L'élément est soumis à une force  $Id\vec{l} \wedge \vec{B}_e$

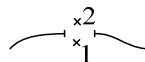
Mais le calcul de  $\vec{B}_e$  introduit des intégrales divergentes...

### 2) Schématisation surfacique



On a  $d\vec{F} = \vec{j}_s d\vec{S} \wedge \vec{B}_e$

• Cas général :



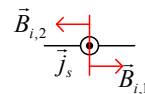
On a :

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{e,2} + \vec{B}_{i,2}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{e,1} + \vec{B}_{i,1}$$

Et  $\vec{B}_e \approx \vec{B}_{e,1} \approx \vec{B}_{e,2}$  (lorsqu'on est suffisamment proche de la surface)

On considère que  $\vec{j}_s$  est uniforme sur le petit disque (sinon, on le rétrécit)



Par symétrie, on a  $\vec{B}_{i,2} = -\vec{B}_{i,1}$

$$\text{Ainsi, } \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2\vec{B}_e$$

Et la relation de passage s'écrit  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

On a donc trois inconnues, et seulement deux équations.

Il n'y a donc pas de résultat général.

(En électrostatique, on avait en plus  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ )

- Cas où  $\vec{B}_2 = \vec{0}$  (exemple : nappe solénoïdale)

On aura ainsi  $\vec{B}_e = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

Et donc  $d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_s dS \wedge (-\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}) = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 \vec{n} dS$

$\frac{2}{1} \frac{\uparrow d\vec{F}}{\vec{B}_1 \neq \vec{0}} \vec{B}_2 = \vec{0}$

On définit la pression magnétostatique :  $P_m = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2$

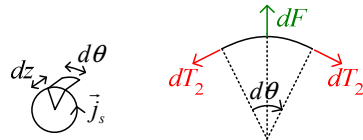
Remarque : elle est analogue à la pression électrique :  $P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

Mais ici, la force de pression magnétostatique est dirigée vers la région de champ nul.

- Application :

Force exercée sur une spire de solénoïde :

- Pour une nappe solénoïdale infinie :



On a à l'équilibre  $\frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 \times R d\theta dz = dT \times 2 \sin \frac{d\theta}{2} = dT d\theta$

Donc  $\frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 R dz = dT$

Soit  $\frac{dT}{dz} = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 R$

- Pour un solénoïde :

On note  $t$  la tension d'une spire.

On a ainsi  $dT = t \cdot ndz$

Soit  $t = \frac{dT}{dz} \frac{1}{n}$ .

Et avec la relation précédente (en remplaçant  $j_s$  par  $nI$ ) :

$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 R$ . Et donc  $t = \frac{1}{2} \mu_0 n I^2 R$

## IV Travail des forces de Laplace

### A) Travail des forces de Laplace intérieures

#### 1) Cas d'un circuit indéformable (solide)

On aura pour un solide  $W_{\text{int}} = 0$

## 2) Cas d'un circuit déformable

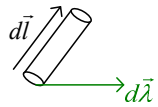
On a  $W_{\text{int}} \neq 0$

Mais généralement, on néglige ce travail devant celui des forces extérieures (si on ne peut pas, c'est gênant...)

## B) Travail des forces de Laplace extérieures

On se limite au champ extérieur  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}}$

### 1) Travail élémentaire



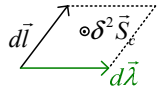
On a  $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Donc  $\delta^2 W = d\vec{F} \cdot d\vec{\lambda} = I (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\lambda} = I (d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$

• Surface coupée (ou balayée) :

On pose  $d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l} = \delta^2 \vec{S}_c$

Justification :

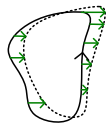


$\delta^2 S_c$  correspond à la surface « fauchée » par  $d\vec{l}$  sur le déplacement.

• Flux coupé :

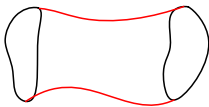
$\delta^2 \phi_c = \vec{B} \cdot \delta^2 \vec{S}_c$  : flux de  $\vec{B}$  à travers la surface coupée.

Ainsi,  $\delta^2 W = I \delta^2 \phi_c$



Et, pour le circuit tout entier :

$$\delta W = I d\phi_c$$



Pour un parcours quelconque, on aura ainsi  $W = \int I d\phi_c$  ( $I$  peut varier pendant le déplacement)

Remarque :

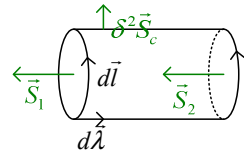
$I$  et  $d\phi_c$  dépendent de l'orientation du circuit, mais pas  $\delta W$

## 2) Déplacement à intensité constante

On aura dans ce cas  $W = I\phi_c$

## 3) Déplacement à intensité constante dans un champ stationnaire

- On aura  $\phi_c = \phi_l$ , où  $\phi_l$  est le flux à travers la surface parcourue par le circuit.
- Orientation des surfaces :



$\vec{S}_1$  et  $\delta^2 \vec{S}_c$  sont orientés compatiblement avec la surface, mais pas  $\vec{S}_2$

Dans l'autre sens (Si  $d\vec{\lambda}$  est dans l'autre sens), c'est  $\vec{S}_1$  et  $\delta^2 \vec{S}_c$  qui ne sont plus orientés compatiblement avec la surface, mais  $\vec{S}_2$  l'est.

Dans tous les cas,  $\delta^2 \vec{S}_c$  et  $\vec{S}_1$  ont la même « compatibilité » et  $\vec{S}_2$  l'opposée.

- Théorème de Maxwell :

Pour une surface fermée, on a  $\phi = 0$

Donc  $\phi_1 + \phi_c - \phi_2 = 0$

C'est-à-dire  $\phi_c = \phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$

Et donc  $W = I\Delta\phi$

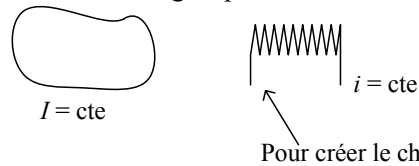
## 4) Energie potentielle associée aux forces de Laplace sur un circuit à intensité constante dans un champ magnétique stationnaire

- Expression :

On a  $\delta W_L = Id\phi = d(I\phi)$ , qui est une différentielle totale.

On a donc une énergie potentielle  $E_p = -I\phi$  (à une constante près)

- Bilan énergétique total :



On aura une variation d'énergie magnétique totale :

$$dU_m = \delta W_{op} + \delta W_{g,1} + \delta W_{g,2}$$

Où  $\delta W_{op} = -\delta W_L = dE_p = -Id\phi$  et  $\delta W_{g,1}, \delta W_{g,2}$  sont les travaux dus aux générateurs pour maintenir le courant constant dans les deux circuits (On verra que  $I$  et  $i$  peuvent varier par induction, et que  $\delta W_{g,1} = \delta W_{g,2} = +Id\phi$ )

Ainsi,  $dU_m = Id\phi$

- Règle du flux maximal :

On considère un circuit dont l'intensité est constante, soumis uniquement aux forces de Laplace dans  $\vec{B}$  stationnaire, et initialement immobile.

On aura ainsi nécessairement  $W_L > 0$  (puisque c'est la force qui le mettra en mouvement)

Et donc  $\Delta E_p < 0$ , soit  $\Delta(I\phi) > 0$

Ainsi, le déplacement se fait en sorte que  $I\phi$  augmente.

## C) Calcul du torseur des forces de Laplace par le théorème des travaux virtuels

### 1) Déplacement virtuel

On considère un circuit déformable, parcouru par un courant  $I(t)$  dans un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

On voudrait calculer  $\vec{F}(t_0), \vec{M}(t_0)$  à un instant  $t_0$  quelconque.

On fait un « arrêt sur image à  $t_0$  », et on réalise un déplacement virtuel.

Ainsi, pendant ce déplacement,  $I = \text{cte}$ ,  $\vec{B}$  est stationnaire, et le circuit est indéformable.

### 2) Résultante

- Cas général :

Pour une translation virtuelle selon l'axe  $Ox$  :

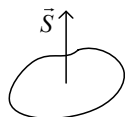
$$\delta W = F_x dx$$

$$\text{Et } \delta W = Id\phi_c = Id\phi$$

$$\text{Donc } F_x = I \frac{d\phi_c}{dx} = I \frac{d\phi}{dx}$$

$$\text{Ou } F_x = I \frac{\partial \phi_c}{\partial x} = I \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

- Circuit fermé dans un champ uniforme :



$$\text{On aura } \phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

(où  $\vec{S}$  est le vecteur surface correspondant au contour)

$$\text{Et donc pour un déplacement } d\phi = d(\vec{B} \cdot \vec{S}) = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Pour une translation, le vecteur surface ne change pas, et donc  $d\vec{S} = \vec{0}$ ,

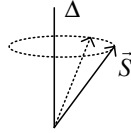
D'où  $d\phi = 0$ , puis  $F_x = 0$  et donc  $\vec{F} = \vec{0}$

### 3) Moment

- Cas général : rotation virtuelle d'un angle  $d\theta$  autour de  $\Delta$  :  
On a  $\delta W_L = M_\Delta d\theta$ , et  $\delta W_L = Id\phi_c = Id\phi$

Donc  $M_\Delta = I \frac{\partial \phi_c}{\partial \theta} = I \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$

- Circuit entier dans un champ uniforme :



On a ici aussi  $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

Et donc  $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Mais  $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{S}$  où  $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}$

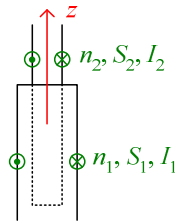
Donc  $d\phi = \vec{B} \cdot (d\theta \vec{u} \wedge \vec{S}) = (\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u} d\theta$

Ainsi,  $M_\Delta = I \frac{d\phi}{d\theta} = (I \vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}$ , et  $M_\Delta = \vec{M} \cdot \vec{u}$ , et ce  $\forall \vec{u}$ .

Donc  $\vec{M} = I \vec{S} \wedge \vec{B}$

## V Compléments

### A) Solénoïde plongeur

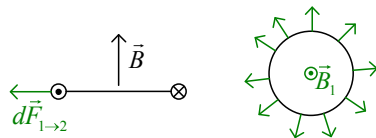


Chacun des deux solénoïde est semi-infini, 2 (le plus fin) vers le haut et 1 vers le bas. On suppose de plus que 2 est enfoncé très profondément (c'est-à-dire là où le champ créé par 1 est uniforme)

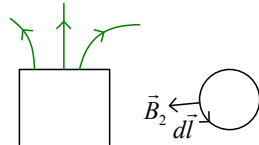
On voudrait connaître la résultante des forces de Laplace de 1 sur 2.

#### 1) Analyse

- Par symétrie, cette force s'exerce déjà selon l'axe  $z$ .
- Pour une spire « tout en bas » (là où  $\vec{B}$  est uniforme) :



- A la sortie :



On aura ici une résultante selon l'axe vertical.

L'analyse est déjà satisfaisante puisqu'on sent bien que des spires tout en bas n'auront aucun intérêt à se déplacer puisqu'elle voient un champ uniforme. C'est la même chose à une distance infinie, puisqu'elles voient alors un champ nul. Reste maintenant à voir ce qui se passe à la sortie du solénoïde, où elles vont tenter de satisfaire à la règle du flux maximal.

## 2) Théorème des travaux virtuels

Pour une translation de  $dz$  le long de l'axe  $Oz$ , on calcule la différence de flux  $d\phi$  entre les deux positions.

Pour calculer cette différence de flux, on peut imaginer qu'au lieu de déplacer tout le solénoïde, on « coupe » les spires tout en bas et on les replace tout en haut (à l'infini)

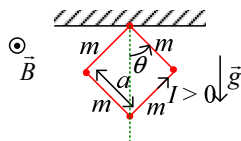
Ainsi, le flux qui traverse les  $n_2 dz$  spires était avant de  $S_2 B_1 n_2 dz$  (le champ est uniforme dirigé selon  $Oz$ ), et devient nul à l'infini

$$\text{On aura ainsi } d\phi = \phi_f - \phi_i = n_2 dz (0 - S_2 B_1) = -S_2 B_1 n_2 dz$$

$$\text{Soit } F_z = I_2 \frac{d\phi}{dz} = -\mu_0 n_1 n_2 I_1 I_2 S_2$$

Et si  $I_1 I_2 > 0$  (c'est-à-dire si les deux courants sont dans le même sens), on aura  $F_z < 0$ , c'est-à-dire une force dirigée vers le bas.

## B) Losange articulé



On considère un losange, accroché au plafond, articulé, dont chaque branche est de masse  $m$  et de côté  $a$ . On suppose le losange parcouru par un courant  $I$  uniforme et soumis à un champ gravitationnel et magnétique.

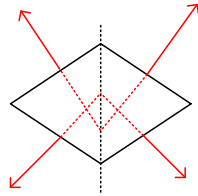
On cherche la position d'équilibre du losange.

### 1) Analyse

- Déjà, si  $\vec{g} = \vec{0}$ , on aura  $\theta = \pi/4$  pour satisfaire la règle du flux maximal.
  - Si  $\vec{B} = \vec{0}$ , on aura  $\theta = 0$ .
- Donc  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

## 2) Calcul direct ?

On regarde la force exercée sur chaque branche :



Mais par symétrie, on aura une résultante et un moment nul ☹.

En plus, il faudrait connaître aussi l'action exercée par le plafond sur le losange.

## 3) Calcul par l'énergie

Le losange est soumis :

- A son poids  $\vec{P} = 4m\vec{g}$ , d'énergie potentielle  $E_p = -4mgz = -4mga \cos \theta$
- A la force de Laplace :  $E_p = -I\phi = -IB \times 2a^2 \cos \theta \sin \theta$
- A la réaction du plafond qui ne travaille pas.

A l'équilibre,  $E_p$  est extrémal :

On a

$$E_p = -4mga \cos \theta - IB \times 2a^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$= -4mga \cos \theta \left( 1 + \frac{IBa}{2mg} \sin \theta \right) = -\alpha \cos \theta (1 + \beta \sin \theta)$$

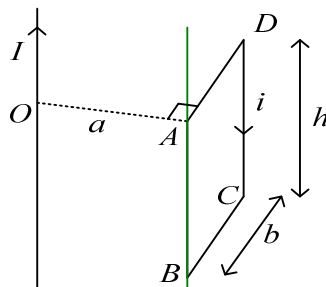
Et donc à l'équilibre :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -\alpha (-\sin \theta - \beta \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta) = 0$$

$$\text{Soit } \beta - \sin \theta - 2\beta \sin^2 \theta = 0$$

$$\text{D'où } \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\beta^2}}{4\beta}$$

## C) Travail de déplacement d'un cadre



Dans l'état initial,  $\widehat{O\hat{A}D} = \frac{\pi}{2}$ . On tourne le cadre autour de l'axe vert en maintenant  $i$  et  $I$  constant, jusqu'à l'état final  $\widehat{O\hat{A}D} = \pi$ .



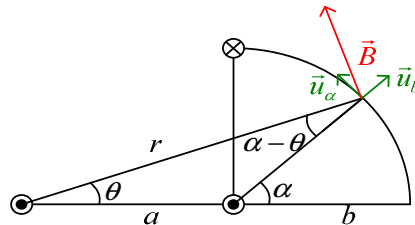
On suppose l'action très lente. On cherche le travail effectué par l'opérateur.

### 1) Bilan énergétique

$$\text{On a } W_{\text{OP}} = -W_{\text{Laplace}} = -i\phi_c = -i\Delta\phi$$

### 2) Calcul par le flux coupé

- Le segment  $AB$  ne bouge pas, et ne coupe donc pas de flux.
- Pour les segments  $AD$ ,  $BC$ , on n'a pas non plus de flux coupé, puisque le champ  $\vec{B}$  rase la surface coupée.
- Reste le calcul pour  $CD$  :



- Pour un déplacement d'un angle de  $d\alpha$ , on a une surface coupée :

$$d\vec{S}_c = d\vec{\lambda} \wedge \vec{DC} = bd\alpha \cdot \vec{u}_\alpha \wedge (-h\vec{u}_z) = -bh \cdot d\alpha \vec{u}_b$$

- Et un champ magnétique, avec les notations du schéma :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (\sin(\alpha - \theta) \vec{u}_b + \cos(\alpha - \theta) \vec{u}_\alpha)$$

- Donc le flux coupé lors du déplacement  $d\alpha$  :

$$d\phi_c = \vec{B} \cdot d\vec{S}_c = \frac{-\mu_0 I}{2\pi r} bh \sin(\alpha - \theta) d\alpha$$

De plus, on a la relation géométrique  $\frac{\sin(\alpha - \theta)}{a} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{r}$ ,

$$\text{Soit } \sin(\alpha - \theta) = \frac{a}{r} \sin(\pi - \alpha)$$

Et, d'après la relation de Al Kashi :  $r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - \alpha)$

$$\text{Donc } d\phi_c = \frac{-\mu_0 I}{2\pi} h \frac{ab \sin \alpha d\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} h \frac{d(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

$$\text{Par intégration, } \phi_c = \frac{\mu_0 I}{4\pi} h \left[ \ln(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} h \ln \left( \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\text{Donc } W_{\text{OP}} = -i\phi_c = \frac{\mu_0 I i}{4\pi} h \ln \left( \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right)$$

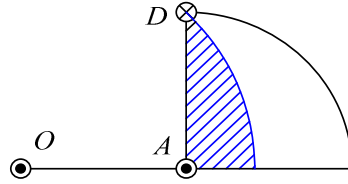
### 3) Par variation de flux

Par le théorème de Maxwell,  $W_{\text{OP}} = -i(\phi_f - \phi_i)$

On a  $\phi_f = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot x} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$

Pour le flux initial :

On va prendre une autre surface que celle correspondant au cadre, mais s'appuyant sur le même contour (pour faciliter les calculs) :

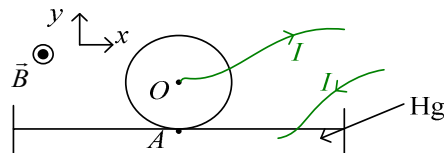


On fait en sorte que le champ soit rasant au niveau du trait en bleu, c'est-à-dire qu'on prend pour cette ligne une portion du cercle de centre O et de rayon  $OD = \sqrt{a^2 + b^2}$  (ainsi, comme  $\vec{B}$  est porté uniquement par la composante orthoradiale, il n'y aura pas de flux à travers cette surface)

La seule portion de surface à travers laquelle  $\vec{B}$  fluxera sera donc celle « en bas » sur le schéma, c'est-à-dire  $\phi_i = \int_a^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot x} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

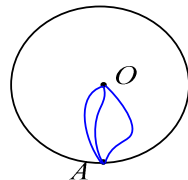
En sommant, on obtient bien la même égalité que précédemment.

## D) Roue de Barlow



On cherche le mouvement de la roue, c'est-à-dire en fait le moment du torseur de force de Laplace.

### 1) Analyse



On ne sait pas à priori comment seront les lignes de courant, mais on suppose qu'elles ne varient pas au cours du temps (par rapport au référentiel du laboratoire)

### 2) Calcul direct : loi de Laplace

- Pour un élément  $d\vec{l}$  d'un tube de courant placé en  $M(x, y, z)$  et parcouru par une intensité  $\delta I$ , cet élément est soumis à une force  $\delta^2 F = \delta I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$

C'est-à-dire à un moment par rapport à  $O$  :

$$\begin{aligned}\delta^2 M_z &= (\overrightarrow{OM} \wedge \delta^2 \vec{F}) \cdot \vec{u}_z \\ &= \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left( \delta I \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \vec{u}_z\end{aligned}$$

En utilisant la schématisation surfacique, ( $dz = 0, z = 0$ ), on obtient :

$$\delta^2 M_z = -B \delta I (x dx + y dy)$$

- Dans tout le tube de courant (parcouru aussi pas une intensité  $\delta I$ ),

$$\begin{aligned}\delta M_z &= -B \delta I \int_A^O x dx + y dy \\ &= -B \delta I \left( \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^O + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{-R}^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} B R^2 \delta I\end{aligned}$$

(Où  $R$  est le rayon de la roue)

- Pour tout le courant, on obtient ainsi  $M_z = \frac{1}{2} B R^2 I$

### 3) Par le théorème des travaux virtuels

On réalise une rotation virtuelle, à intensité constante, d'un angle  $d\theta$  (en fait, la liaison avec le mercure sera coupée, et l'intensité vient « de nulle part », mais c'est uniquement une transformation virtuelle, donc le fait qu'on ne puisse pas la faire réellement n'est pas important)

On obtient alors pour un tube de courant traversé par une intensité  $\delta I$  :

$$\delta M_z = \delta I \frac{d\phi_c}{d\theta}.$$

Si on avait réalisé une rotation complète ( $d\theta = 2\pi$ ), le flux coupé aurait été celui à travers toute la roue, c'est-à-dire  $B \times \pi R^2$ .

$$\text{Ainsi, par proportionnalité, on a } d\phi_c = B \cdot \pi R^2 \times \frac{d\theta}{2\pi}$$

(Peu importe la forme de la ligne de courant, en fin de compte on obtient la même chose)

$$\text{Et donc } \frac{d\phi_c}{d\theta} = \frac{1}{2} B R^2, \text{ puis } \delta M_z = \frac{1}{2} B R^2 \delta I \text{ et enfin } M_z = \frac{1}{2} B R^2 I.$$