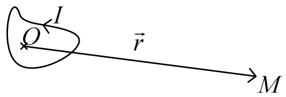
Chapitre 10 : Dipôle magnétique

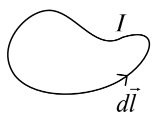
I Approche du dipôle magnétique : la boucle de courant

A) Définition



B) Moment magnétique

1) Définition

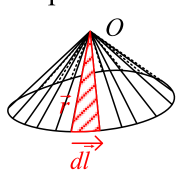


- On a $\vec{S} = \iint d\vec{S}$.
- On pose alors $\vec{\mathfrak{M}} = I\vec{S}$.

Ainsi, $\vec{\mathfrak{M}}$ est un pseudo-vecteur : $\vec{S}$ dépend à la fois du sens choisi pour $d\vec{l}$ *et* de la convention du trièdre direct (si on inverse $d\vec{l}$, on inverse $\vec{S}$ aussi, et c'est pareil pour le trièdre direct), donc $\vec{\mathfrak{M}} = I\vec{S}$ ne dépend plus que de la convention pour le trièdre.

2) Expression intégrale

On prend un cône centré en O qui s'appuie sur le contour :

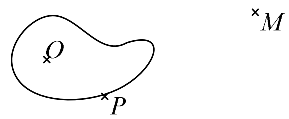


Le vecteur surface du petit triangle est $\frac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{l}$

On a alors $\vec{\mathfrak{M}} = I\oint \frac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{l}$

C) Champ magnétique créé par une boucle de courant

1) Potentiel vecteur $\vec{A}$.



On note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}' = \overrightarrow{PM}$.

On a alors $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{d\vec{l}}{r'}$

On pourrait faire un développement limité $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \overrightarrow{OP} + \dots$, mais on peut faire plus élégant :

- A l'ordre 0, $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r}$ et $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \oint d\vec{l} = \vec{0}$
- A l'ordre 1, on a d'après la formule de Kelvin :

$\oint_\Gamma f d\vec{l} = \iint_S d\vec{S} \wedge \vec{\nabla} f$

Et donc ici $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S d\vec{S} \wedge \underbrace{\vec{\nabla}_P \frac{1}{r'}}_{= \frac{\vec{r}'}{r'^3} \approx \frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S d\vec{S} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\iint_S d\vec{S}\right) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$

Soit $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}}$

Remarque :

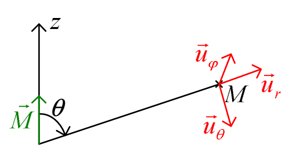
On a fait en fait dans le calcul un DL à l'ordre 0 de la dérivée plutôt qu'un DL à l'ordre 1 de la fonction elle-même.

L'égalité trouvée est analogue à $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

2) Champ magnétique

On a $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

- Expression en sphériques :



On a $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{M} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{M} \frac{\sin\theta}{r^2} \vec{u}_\varphi$

Et $\boxed{B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{M} \frac{2\cos\theta}{r^3},\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{M} \frac{\sin\theta}{r^3},\ B_\varphi = 0}$

On retrouve la même structure qu'en électrostatique !!

- On aura donc de même qu'en électrostatique $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi.r^3}\left(\dfrac{3\vec{\mathfrak{M}}\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{\mathfrak{M}}\right)$

3) Pseudo–potentiel

On avait $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, avec $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Ici, par analogie, $\vec{B} = -\vec{\nabla}V^*$ avec $V^* = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{\mathfrak{M}}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Le champ magnétique créé par une boucle de courant loin de cette boucle de courant dérive donc d'un potentiel scalaire.

Explication :

Quand on calcule la circulation du champ $\vec{B}$ à grande distance, on a $\vec{j} = \vec{0}$, et donc $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \vec{0}$

D) Action d'un champ $\vec{B}$ sur une boucle de courant

Ici, la boucle est considérée comme passive.

1) Champ $\vec{B}$ uniforme

Si le champ est uniforme, on aura :

- Une résultante $\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$
- Un moment $\boxed{\vec{M} = I\vec{S}\wedge\vec{B} = \vec{\mathfrak{M}}\wedge\vec{B}}$
- Une énergie potentielle $\boxed{E_p = -I\phi = -I\vec{S}\cdot\vec{B} = -\vec{\mathfrak{M}}\cdot\vec{B}}$

Remarque :

On trouve un résultat analogue à l'électrostatique pour les trois formules.

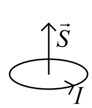
On n'a pas fait intervenir ici le fait que la boucle de courant était « petite » ; en fait, le champ varie avec une dimension caractéristique infinie, donc tout circuit fermé est de « petite dimension » devant cette distance.

- Quand on a une boucle de courant dans un champ uniforme, celle-ci n'a pas tendance à se déplacer globalement :

Il va s'orienter dans le sens du champ

L'énergie potentielle est minimale lorsque le moment magnétique est dans le sens de $\vec{B}$.

2) Champ $\vec{B}$ non uniforme



On suppose que $\vec{B}$ varie avec une distance caractéristique très grande devant les dimensions de la boucle de courant.

On a alors $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \approx \vec{B} \cdot \vec{S}$

- Résultante :

- Expression générale :

Translation élémentaire selon Ox :

$F_x = I \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = I\vec{S} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}$, soit $\boxed{F_x = \vec{\mathfrak{M}} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}}$

- Cas où $\vec{\mathfrak{M}}$ est indépendant de $\vec{B}$:

On a alors $F_x = \dfrac{\partial \vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}}{\partial x}$, et donc $\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B})}$

- Si $\vec{\mathfrak{M}}$ est induit par $\vec{B}$: on a alors $\vec{\mathfrak{M}} = \alpha \vec{B}$, donc $\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B})$

- Cas où localement $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}$:

On a alors $F_x = \mathfrak{M}_x \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \underbrace{\dfrac{\partial B_y}{\partial x}}_{\frac{\partial B_x}{\partial y}} + \mathfrak{M}_z \underbrace{\dfrac{\partial B_z}{\partial x}}_{\frac{\partial B_x}{\partial z}} = \vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{\nabla} B_x$

Et donc $\boxed{\vec{F} = \vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}}$.

- Moment :

On a $\vec{M}(O) = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}(O)$

- Energie potentielle :

On a $E_p = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}(O)$

- Conclusion :

- On a le même effet d'orientation que dans un champ uniforme.
- Et une force le déplaçant dans le sens des champs forts (lignes de champ plus resserrées)

II Dipôle magnétique

A) Définition

- C'est un objet ponctuel
- Caractérisé par son moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$
- Qui crée en tout point de l'espace un champ $\vec{B}$ de composantes sphériques

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{M} \dfrac{2\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{M} \dfrac{\sin\theta}{r^3} \\ B_\varphi = \quad 0 \end{cases}$$

B) Discussion

- C'est un modèle, un tel objet n'a pas d'existence physique.

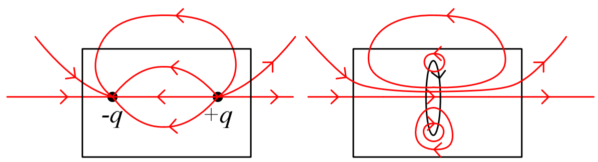
- On peut montrer que d'après le théorème de l'action et de la réaction, un être créant ce champ là est soumis dans un champ magnétique extérieur à une force

$$\begin{cases} F_x = \vec{\mathfrak{M}} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x} \\ \vec{M}(O) = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}(O) \\ E_p(O) = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}(O) \end{cases}$$

- Comparaison dipôles électrostatiques/magnétostatiques :

Les deux dipôles créent le même champ, subissent les mêmes actions.

- Comparaison des systèmes réels :



Lorsqu'on est à grande distance, la structure du champ est la même.

Mais lorsqu'on est proche, on n'a plus du tout la même chose (l'un est à divergence nul, et pas l'autre)

Remarque :

Le dipôle électrostatique a effectivement deux pôles.

Mais on ne peut pas en dire autant pour le dipôle magnétique.

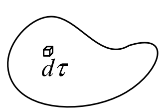
Par exemple, si on coupe un aimant en deux entre les pôles, on obtiendra toujours un pôle nord et un pôle sud sur chacun des deux bouts.

Et on peut couper ainsi de suite jusqu'à la dimension de l'électron, qu'on ne peut plus couper et qui possède aussi un moment magnétique.

III Complément

Les milieux magnétiques

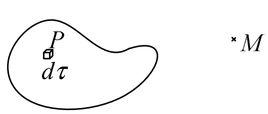
1) Vecteur aimantation



Dans un volume $d\tau$, on aura un moment magnétique $d\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M} d\tau$

$\vec{M}$ s'appelle le vecteur aimantation. Il peut dépendre de la position, et éventuellement du temps.

2) Densité de courant lié



On cherche le champ magnétique en M, connaissant $\vec{M}(\vec{r})$ dans le volume.

- Expression :

Un volume $d\tau$ en P produit un potentiel vecteur $d\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{\mathfrak{M}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$

Et donc $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau$

On a $\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla}_P \frac{1}{r}$

Et de façon générale, $\vec{\nabla} \wedge (f\vec{X}) = f.\vec{\nabla} \wedge \vec{X} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{X}$,

soit $\vec{\nabla} f \wedge \vec{X} = \vec{\nabla} \wedge (f\vec{X}) - f.\vec{\nabla} \wedge \vec{X}$.

Et donc :

$$\begin{aligned}
\vec{A}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\iiint \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}}{r} d\tau - \iiint \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{M}}{r} d\tau \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\iiint \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}}{r} d\tau + \oiint \frac{\vec{M} \wedge d\vec{S}}{r} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\iiint \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}}{r} d\tau + \oiint \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} dS \right)
\end{aligned}$$

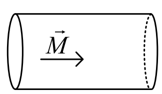
On note alors $\vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \vec{j}_{\text{lié}}$, $\vec{M} \wedge \vec{n} = \vec{j}_{s,\text{lié}}$

Ainsi, l'égalité devient :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_{\text{lié}}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint \frac{\vec{j}_{s,\text{lié}}}{r} dS$$

Ainsi, le champ créé par la répartition est le même que celui créé par une répartition de courant ayant une répartition surfacique $\vec{M} \wedge \vec{n}$ et une répartition volumique $\vec{\nabla} \wedge \vec{M}$.

- Exemple :



On suppose $\vec{M}$ uniforme.

Ainsi, la répartition est équivalente à une répartition où :

$\vec{j}_{\text{lié}} = \vec{0}$

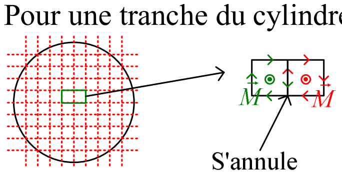
Sur les côtés, $\vec{j}_{s,\text{lié}} = \vec{0}$

Et sur la face latérale $\vec{j}_{s,\text{lié}} = M\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = M\vec{u}_\theta$

C'est comme si on avait une nappe solénoïdale.

Justification :

Pour une tranche du cylindre, coupée en petits cubes de courant :



Ainsi, le courant s'annule partout sauf à l'extérieur.

« Si la matière est aimantée, c'est parce qu'elle est parcourue par des petits courants à l'échelle microscopique » (Ampère)

C'est en partie vrai : il y a en effet un mouvement magnétique orbital de l'électron.

Mais il y a en plus de cela un moment de spin (« tourner sur soi-même »), qu'on modélise par une rotation de l'électron sur lui-même. En réalité, l'électron ne tourne pas véritablement sur lui-même : le spin est une caractéristique purement quantique d'une particule ; ceci se justifie par le fait que même des particules non chargées ont un moment de spin.

3) Equations locales du champ

- On a $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- Et $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}})$

Soit $\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}}$

On introduit $\vec{H}$ tel que $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

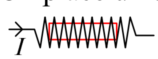
Ainsi, l'équation devient $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}}$

$\vec{H}$ s'appelle l'excitation magnétique.

L'équation traduit ainsi le fait qu'il existe un champ gouverné par les courants libres.

Exemple :

On place un barreau de fer dans un solénoïde :



Ainsi, il y aura création d'un champ $\vec{H} = nI.\vec{u}_z$

$\vec{B}$ est alors la somme de $\mu_0 \vec{H}$ et de ce qui est créé par le barreau de fer (mais ce dernier dépend aussi de l'excitation magnétique)

Ainsi, $\vec{H}$ aura une action directe et indirecte sur le champ $\vec{B}$.

4) Cas des milieux LHI (Linéaires Homogènes Isotropes)

- Linéarité : on a $\vec{M} = \tilde{\chi}(\vec{H})$, où $\tilde{\chi}$ est une application linéaire : tenseur de susceptibilité magnétique
- Susceptibilité :

On a dans un milieu LHI $\vec{M} = \chi \vec{H}$ (linéarité et isotropie), et χ est indépendant de la position (homogénéité)

χ s'appelle la susceptibilité magnétique.

Ainsi, on aura un champ $\vec{B} = \mu_0 (1+\chi) \vec{H}$

On note alors $\mu_r = 1 + \chi$, perméabilité relative du milieu.

- Equation de Maxwell-Ampère :

On a $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}})$

Et $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}}$

Donc $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{j}_{\text{libre}}}$

(μ_r est indépendant de la position pour un milieu homogène)

5) Principaux comportements magnétiques de la matière

- Paramagnétisme :

- Ce sont des substances telles que chaque entité élémentaire possède individuellement un moment magnétique $\vec{\mu}_i \neq \vec{0}$
- Collectivement :

(1) Si $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$, l'agitation thermique l'emporte sur les interactions et on a une aimantation globale $\vec{M} = \vec{0}$.

(2) Si $\vec{B}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$, chaque moment magnétique s'oriente selon $\vec{B}_{\text{ext}}$, mais l'agitation thermique a quand même un effet significatif. On a donc une *tendance* générale à s'orienter selon $\vec{B}_{\text{ext}}$. On aura ainsi $\vec{M} \neq \vec{0}$, dirigé dans le même sens que $\vec{B}_{\text{ext}}$.

(3) Tant que $\vec{B}_{\text{ext}}$ n'est pas trop fort, on peut considérer que le milieu est LHI et on aura ainsi $\chi > 0$ (de l'ordre de l'unité)

- Ce type de comportement peut être observé dans n'importe quel type de milieu (gaz, liquide, solide)

- Diamagnétisme :

- C'est lorsque individuellement, $\vec{\mu}_i = \vec{0}$
- Et collectivement,

(1) Si $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$, alors $\vec{M} = \vec{0}$

(2) Si $\vec{B}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$, $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{B}_{\text{ext}}$ mais de sens opposé (correspond à un phénomène d'induction magnétique)

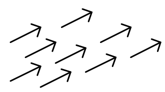
(3) Si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est assez faible, le milieu est considéré comme LHI et on aura alors $\chi < 0$ (mais $\chi > -1$ aussi). χ est ici de l'ordre de -10^{-2}

(4) Le milieu est ainsi attiré vers des régions de champ faible.

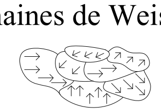
- On trouve ce type de comportement dans tout type de matière aussi.

- Ferromagnétisme :

- C'est lorsque $\vec{\mu}_i \neq \vec{0}$
- Mais les moments magnétiques interagissent fortement les uns avec les autres :



On a ainsi une structure assez ordonnée. En fait les particules sont ordonnées de cette façon sur de petits domaines seulement (visibles au microscope), appelés domaines de Weiss :



- Collectivement :

(1) Lorsque $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$, on a globalement $\vec{M} = \vec{0}$

(2) Lorsque $\vec{B}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$, les domaines de Weiss bien orientés vont grignoter sur les autres. Ainsi, tous (ou presque) vont se réorienter.

Ainsi, $\vec{M}$ et $\vec{B}_{\text{ext}}$ seront de même sens, avec un rapport très élevé (de l'ordre de 10^4) ; on verra plus tard que le milieu n'est pas LHI, donc on ne peut pas définir χ.

(3) Si on remet à nouveau un champ magnétique nul, $\vec{M}$ ne disparaît pas nécessairement. Pour recréer un domaine de Weiss, il faudrait qu'une particule parvienne à retourner une partie des autres autour d'elle, ce qui demande donc de l'énergie. On a ainsi un état métastable

- Ce type de comportement traduit un phénomène d'hystérésis, puisque l'organisation du milieu dépend de son « histoire »
- On trouve des solides ferromagnétiques, mais parfois aussi des fluides (qu'on appelle ferrofluides)

• On trouve aussi d'autres types de comportement :

- Ferrimagnétisme :

Lorsqu'on a deux types de particules, avec une organisation de la forme :

$\Big\uparrow \uparrow \Big\uparrow \uparrow \Big\uparrow \uparrow$

- Antiferromagnétique :

$\Big\uparrow \Big\downarrow \Big\uparrow \Big\downarrow \Big\uparrow \Big\downarrow$

- Etc…