

# Chapitre 12 : L'énergie électromagnétique

## I L'énergie du champ électromagnétique

### A) Postulat

Un volume  $d\tau$  dans lequel règne un champ électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) possède une énergie  $dU_{em} = u_{em} d\tau$  où  $u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Pour un volume fini, on aura ainsi une énergie  $U_{em} = \iiint u_{em} d\tau$ .

Remarque :

Ce postulat généralise celui d'électrostatique.

De même qu'en général, on ne peut pas séparer  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , les deux termes n'ont pas ici de sens individuellement.

### B) Rayonnement

C'est la densité d'énergie électromagnétique  $u_{em}$  qui se propage avec  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

## II Bilan d'énergie électromagnétique

### A) Equation de bilan

#### 1) Bilan global

On considère une surface  $\Sigma$  dans un référentiel  $R$  :



$$\text{On a } \frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{j}_{u_{em}} \cdot d\vec{S} + \iiint \sigma_{u_{em}} d\tau$$

On note  $\vec{j}_{u_{em}} = \vec{\pi}$  : vecteur de Poynting

Et  $p = -\sigma_{u_{em}}$  : énergie magnétique qui disparaît par unité de temps.

$$\text{Ainsi, } \frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} - \iiint p d\tau$$

#### 2) Bilan local

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = -p$$

## B) Terme de création

### 1) Origine

- Le champ électromagnétique agit sur les charges, donc il y a un transfert d'énergie et donc une disparition d'énergie électromagnétique.
- Une charge  $q$  accélérée rayonne de l'énergie électromagnétique, donc crée un champ et donc de l'énergie.

### 2) Puissance volumique reçue par les porteurs

- Définition :

$p$  est la puissance volumique perdue par le champ, donc reçue par les porteurs :  $\delta^2 U_{em} = -p dt d\tau$ .

- Expression :

- Puissance  $P_i$  reçue par  $q_i$  :

On a une force de Lorentz  $\vec{F}_i = q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})$

Donc  $P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}$

- Puissance volumique :

On a  $dP = \sum_{i \in d\tau} P_i = \left( \sum_{i \in d\tau} q_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

Donc  $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ .

### 3) Cas des conducteurs ohmiques

- En régime permanent :

On a  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .

Donc  $p = \sigma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\sigma}$

Donc  $p > 0$ , c'est-à-dire que le champ électromagnétique fournit de l'énergie au porteur.

Globalement, on a ainsi  $P = \frac{U^2}{R} = RI^2$ .

- En régime sinusoïdal,

$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \text{Re}(\sigma) = \frac{1}{2} E^2 \text{Re}(\sigma)$ , avec  $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$ .

- Si  $\omega\tau \ll 1$ , c'est-à-dire  $\tau \ll T$ .

On a  $\sigma \approx \sigma_0$ , et  $\langle P \rangle = \frac{\sigma_0}{2} E^2 = \frac{j^2}{2\sigma_0}$  ( $E_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$ )

(Physiquement, le porteur de charge fait tellement de chocs qu'il ne « voit » pas le régime sinusoïdal)

- Si  $\omega\tau \gg 1$ ,  $\sigma = \frac{i\sigma_0}{\omega\tau}$ , et  $\langle P \rangle = 0$ .

(Ici, le porteur fait plusieurs allers-retours avant de faire un choc)

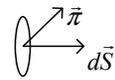
## C) Terme de flux

### 1) Origine

Le terme de flux vient de la propagation du champ électromagnétique.

### 2) Vecteur de Poynting

• Définition :



On a  $\vec{\pi} = \vec{j}_{u_{em}}$ , et  $\delta^2 U_{em} = \vec{\pi} \cdot d\vec{S} dt$

• Expression :

On a  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = -p$

Et  $u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ ,  $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} &= -\vec{j} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

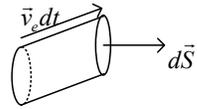
Ainsi,  $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$ .

On prend  $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$

• Discussion :

- En réalité, considérer le flux d'énergie à travers une petite surface n'a pas de sens physiquement, il n'en a que pour une surface fermée. On peut donc choisir en réalité  $\vec{X}$  comme on veut.
- En fait, quand on utilise cette sorte de « jauge », on trouve des résultats satisfaisant physiquement.

### 3) Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique



La surface est traversée par l'énergie qui était contenue dans le cylindre.

On a

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{em} &= \vec{\pi} \cdot d\vec{S} dt \\ &= u_{em} d\vec{S} \cdot \vec{v}_e dt\end{aligned}$$

Donc  $\vec{\pi} = u_{em} \vec{v}_e$ , ou  $\vec{v}_e = \frac{\vec{\pi}}{u_{em}}$ .

## III L'énergie du champ magnétostatique

### A) Densité d'énergie magnétostatique

$$\text{On a } u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

En magnétostatique, les équations de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont découplées, et on peut alors considérer qu'il y a une part d'énergie électrostatique  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  et une part

magnétique  $u_{ms} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$ .

### B) Energie magnétostatique d'une répartition finie de courant

On considère une répartition finie de courant  $\vec{j}$ .

On cherche l'énergie magnétostatique contenue dans tout l'espace.

$$\text{On a } U_{ms} = \iiint u_{ms} d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau$$

$$\text{Et } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\text{Donc } U_{ms} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} d\tau$$

$$\text{Mais } \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Donc } U_{ms} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} d\tau$$

Calcul des termes :

$$\text{On a } \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \oiint \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On calcule sur une sphère de rayon  $r$ , qu'on fait ensuite tendre vers  $+\infty$ .

Pour  $r$  assez grand :



Il n'y a pas de terme monopolaire, donc  $\vec{A} \propto \frac{1}{r^2}$  au moins.

De plus,  $\vec{B} \propto \frac{1}{r^2}$ , et  $S \propto r^2$ .

Donc le flux total à travers la surface est en  $\frac{1}{r^2}$  et tend vers 0.

On a pour l'autre terme  $\frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}_{\mu_0 \vec{j}} d\tau = \frac{1}{2} \iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$

Donc  $U_{ms} = \frac{1}{2} \iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$ .

Remarque :

- Pour connaître l'énergie dans *tout* l'espace, on n'a besoin de sommer que sur la répartition.
- Cette formule est valable aussi en ARQP magnétique.
- De façon analogue, on aura  $U_{es} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint E^2 d\tau = \frac{1}{2} \iiint \rho V d\tau$

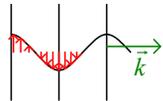
## IV Compléments

### A) Quantité de mouvement du champ

#### 1) Dualité onde-corpuscule

- Onde électromagnétique :

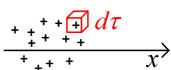
Pour une onde plane, on a une évolution en  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .



Dans le vide,  $\square \vec{E} = \vec{0}, \square \vec{B} = \vec{0}$

On a donc une relation  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .

- Flux de photons :



- On note  $n$  le nombre de photons par unité de volume. On a  $dN = n d\tau$
- Energie d'un photon =  $\hbar\omega = h\nu$
- Vitesse  $\vec{v} = c\vec{u}_x$
- Quantité de mouvement  $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$ .

## 2) Energie

- Ondulatoire :

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \bar{B}^2$$

- Corpusculaire :

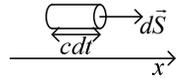
$$u_{em} = nh\nu = n\hbar\omega$$

## 3) Vecteur de Poynting

- Ondulatoire :

$$\text{On a } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \wedge \bar{B}$$

- Corpusculaire :



$$\text{On a } \delta^2 U_{em} = cdS \cdot dt \times nh\nu$$

$$\text{Donc } \vec{\pi} = u_{em} c \vec{u}_x = nh\nu c \vec{u}_x$$

Donc l'énergie se propage à la vitesse  $\vec{v}_e = c\vec{u}_x$ .

## 4) Densité de quantité de mouvement

- Corpusculaire :

Un volume  $d\tau$  de photons a une quantité de mouvement  $d\vec{p}$  :

$$d\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x \times nd\tau$$

$$\text{Donc } \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{h\nu n}{c} \vec{u}_x = \frac{\vec{\pi}}{c^2}$$

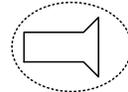
- Ondulatoire :

Pour que les deux aspects de l'onde coïncident, on admet que le champ électromagnétique a aussi une densité de quantité de mouvement

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{\pi}}{c^2} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \bar{E} \wedge \bar{B}, \text{ soit } \boxed{\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \epsilon_0 \bar{E} \wedge \bar{B}}$$

- Exemple :

- On prend une lampe de poche, dans le vide, soumise à aucune force :



Si on ne considère pas la quantité de mouvement du champ électromagnétique, le système est isolé. Pourtant, lorsque la lampe est allumée, on observe un déplacement dans le sens opposé à l'ampoule, ce qui indique une variation de la quantité de mouvement du système.

- On a réussi à faire léviter des petits objets dans un laser suffisamment intense.

### 5) Densité de moment cinétique

On a  $d\vec{\sigma}(O) = \vec{OP} \wedge d\vec{p}$ , et donc  $\frac{d\vec{\sigma}(O)}{d\tau} = \vec{OP} \wedge (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$ .

### B) Energie magnétique d'un ensemble de conducteurs filiformes



On va montrer que  $U_{ms} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \phi_k$  où  $\phi_k$  est le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit  $k$ .

#### 1) Démonstration

On a  $U_{ms} = \frac{1}{2} \iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau = \frac{1}{2} \sum_k \iiint_k \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$

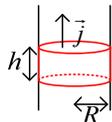
Et donc en schématisation filiforme :

$$U_{ms} = \frac{1}{2} \sum_k \oint_k I_k d\vec{l} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \int_k \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \phi_k$$

#### 2) Discussion

- On a l'énergie *totale* dans tout l'espace, C'est-à-dire l'énergie d'interaction entre les circuits et l'énergie propre.
- Energie propre d'un conducteur :  
Comme on a une schématisation filiforme, le champ est divergent au voisinage de la répartition et donc  $\phi_{k \rightarrow k}$  est infini, donc l'énergie propre aussi.
- Cas particulier :  
Si les  $C_k$  sont indéformables et que l'intensité reste constante, l'énergie propre de chaque circuit est constante (mais infinie)  
Et pour un déplacement,  $\Delta U_m = \Delta U_{\text{interaction}} = \sum_k \frac{1}{2} I_k \Delta \phi_k$ , qui pour le coup est finie.

### C) Bilan énergétique d'un conducteur ohmique



On suppose que  $\vec{j}$  est uniforme, et que le conducteur a une conductivité  $\sigma$ .

Puissance électromagnétique entrante :

$$P = -\oiint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \frac{-1}{\mu_0} \oiint \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

• Symétries, invariance :

- On a  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_z$

-  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

Donc le vecteur de Poynting est dirigé selon  $\vec{u}_r$ , c'est-à-dire que l'énergie électromagnétique dissipée par effet Joule sort par les parois latérales.

• Champs :

$$\vec{B}(R^+) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta \text{ (théorème d'Ampère)}$$

$$\vec{E}(R^+) = \vec{E}(R^-) = \frac{\vec{j}}{\sigma} \text{ (continuité de la composante tangentielle)}$$

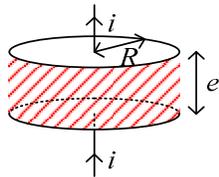
$$\text{Donc } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{j}{\sigma} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\text{Donc } P = \frac{I \cdot j}{2\pi \cdot R \sigma} \times 2\pi \cdot R h$$

Et, avec  $I = j \cdot S$  :

$$P = I^2 \frac{h}{\sigma \cdot S} = I^2 \rho.$$

## D) Bilan énergétique de la charge d'un condensateur



### 1) Champ électromagnétique

$$\text{On a en ARQP } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\text{Et } \vec{B} = \frac{r}{2} \mu_0 \frac{d\sigma}{dt} \vec{u}_\theta$$

### 2) Vecteur de Poynting

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{-r}{2\epsilon_0} \sigma \frac{d\sigma}{dt} \vec{u}_r$$

Ainsi, l'énergie du condensateur arrive non pas par le bas, mais par les parois latérales du condensateur.