

Chapitre 13 : Le phénomène d'induction électromagnétique

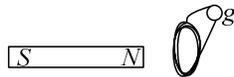
Remarque :

Le nom officiel du champ \vec{B} est l'« induction magnétique », qui peut porter confusion avec le nom du phénomène qu'on va étudier.

(On utilise plus couramment le champ magnétique)

I Mise en évidence expérimentale

A) Circuit déplacé dans un champ \vec{B} invariant

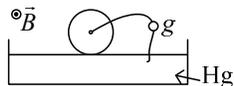


(g : galvanomètre, détecte un courant)

Lorsqu'on déplace la spire, g varie :

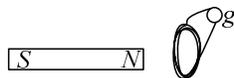
- Plus l'aimant est déplacé rapidement, plus g varie fort.
- Dès qu'on arrête l'aimant, g s'arrête.
- Lorsqu'on change le sens du déplacement, la variation se fait dans l'autre sens.
- Lorsqu'on inverse les pôles, tout est inversé.

Roue de Barlow :



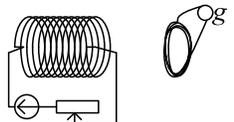
Quand la roue tourne, g varie, et on a les mêmes phénomènes (selon la vitesse ou le sens de rotation)

B) Circuit fixe dans un champ \vec{B} variable



On déplace cette fois l'aimant.

On observe les mêmes phénomènes.



On fait varier I dans la bobine ; on observe le même type de phénomène.

C) Cas mixte

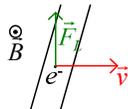
...

D) Conclusion

- On a un courant induit, même sans générateur. Ce courant dépend :
- Du sens de la variation/déplacement.
 - De l'amplitude de la variation/du déplacement.
 - De sa rapidité.

II Origine du courant induit

A) Cas de Lorentz : circuit déplacé/déformé dans un champ \vec{B} stationnaire



L'électron est alors soumis à une force de Lorentz $\vec{F}_L = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

La composante transverse provoque un champ de Hall. La composante longitudinale provoque un déplacement de l'électron dans le fil et donc un courant.

B) Cas de Neumann : circuit fixe dans un champ \vec{B} variable

Le champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ induit un champ \vec{E} , qui mettra alors en mouvement l'électron.

Ainsi, on observe des phénomènes similaires selon que \vec{B} varie ou le circuit, mais les phénomènes ne sont pas dus à la même cause.

III Etude quantitative de l'induction

A) Loi d'Ohm dans un champ magnétique

1) Introduction

On considère une distribution de charges, dans laquelle il y a n porteurs de charge q par unité de volume.

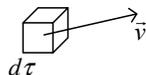
On suppose ces charges initialement fixes dans R .

Elles seront soumises aux forces $q\vec{E}$, $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$, et en négligeant le terme

d'inertie devant ces deux termes, on aura $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$.

On aura donc un courant $\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$

On considère un volume $d\tau$ de ces porteurs :



On note R^* le référentiel propre de l'élément (en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V} par rapport à R)

2) Loi d'Ohm dans R^*

- Expression :

$$m\vec{a}^* = q(\vec{E}^* + \vec{v}^* \wedge \vec{B}^*) - \frac{m}{\tau} \vec{v}^*$$

En négligeant encore $m\vec{a}^*$ devant les autres termes :

$$\vec{v}^* = \frac{q\tau}{m} (\vec{E}^* + \vec{v}^* \wedge \vec{B}^*)$$

$$\text{Donc } \vec{j}^* = \underbrace{\frac{nq^2\tau}{m}}_{\sigma} (\vec{E}^* + \vec{v}^* \wedge \vec{B}^*)$$

- Analyse :

- \vec{j}^* est colinéaire à \vec{v}^* , donc il y a dans \vec{E}^* une composante colinéaire à \vec{j} , et une orthogonale à \vec{j} qui annule $\vec{v}^* \wedge \vec{B}^*$.

$$\text{Donc } \vec{j}^* = \sigma \vec{E}_{\perp}^*, \text{ et } \vec{0} = \vec{E}_{\parallel}^* + \vec{v}^* \wedge \vec{B}^*$$

- Ordre de grandeur : en général, $\vec{E}_{\parallel}^* \ll \vec{E}_{\perp}^*$:

Pour un fil de section $s = 1\text{mm}^2$, parcouru par un courant $I = 1\text{A}$,

On aura un courant $j = 10^6 \text{A.m}^{-2}$, et $\sigma \sim 10^6 \text{S.m}^{-1}$, donc $E_{\parallel}^* \sim 1\text{V.m}^{-1}$.

Et les porteurs on une vitesse moyenne $\vec{v}^* \sim 10^{-5} \text{m.s}^{-1}$; pour un champ $\vec{B}^* \sim 1\text{T}$, on aura $E_{\perp}^* \sim 10^{-5} \text{V.m}^{-1}$.

- Ainsi, $\vec{j}^* = \sigma \vec{E}_{\parallel}^* \approx \sigma \vec{E}^*$.

3) Loi d'Ohm dans R .

- Expression :

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \vec{v}^*$$

(Les chocs sont dus au mouvement des électrons *par rapport* au réseau)

Donc en négligeant le terme inertiel :

$$\vec{j}^* = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Mais $\vec{j} = \vec{j}^* + \rho \vec{V}$, et pour un conducteur $\rho = 0$ (les porteurs en trop atteignent, même en régime variable, la surface en un temps de l'ordre de 10^{-18}s)

$$\text{Donc } \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- Ordre de grandeur :

On a $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}^*$

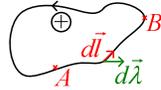
Et $\vec{v}^* \sim 10^{-5} \text{m.s}^{-1}$, $\vec{V} \sim 1\text{m.s}^{-1}$

$$\text{Donc } \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}).$$

B) Cas des circuits filiformes : théorème de Faraday

1) Cas de Lorentz (circuit déplacé dans un champ magnétique stationnaire)

- Loi d'Ohm globale :



On suppose \vec{B} stationnaire.

$$\text{On a } \frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Donc } \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = \vec{E} \cdot d\vec{l} + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Soit $(\vec{j} // d\vec{l})$:

$$\int_A^B \frac{j dl}{\sigma} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Mais } \vec{v} = \vec{v}^* + \vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt} + \frac{d\vec{\lambda}}{dt}$$

$$\text{Donc } \int_A^B \frac{j dl}{\sigma} = \int_A^B -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} + \int_A^B \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Soit } i_{AB} R_{AB} = V_A - V_B + e_{AB}, \text{ avec } e_{AB} = \int_A^B (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Où $i_{AB} R_{AB} = u_{AB} + e_{AB}$ (on est en ARQP magnétique)

- Champ électromoteur de Lorentz :

$$\text{On pose } \vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B}, \text{ avec } \vec{V} = \frac{d\vec{\lambda}}{dt}.$$

\vec{E}_m est homogène à un champ électrique, mais n'est pas un champ électrique

On dit qu'il est électromoteur car c'est comme si une force $q\vec{E}_m$ s'appliquait sur le circuit pour mettre les porteurs en mouvement.

- Force électromotrice d'induction :

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Pour tout le circuit, } e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

- Théorème de Faraday :

- Portion de circuit AB :

$$\text{On a } \vec{V} = \frac{d\vec{\lambda}}{dt}, \text{ soit } (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \wedge d\vec{l} \right) \cdot \vec{B}$$

Donc

$$e_{AB} = - \int_A^B \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \wedge d\vec{l} \right) \cdot \vec{B} = - \frac{1}{dt} \int_A^B d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l} \cdot \vec{B}$$

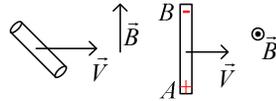
$$= - \frac{1}{dt} \int_A^B \delta^2 \vec{S}_c \cdot \vec{B} = - \frac{1}{dt} d\phi_c$$

$$\text{Soit } e_{AB} = - \frac{d\phi_c}{dt}.$$

- Pour le circuit tout entier, $e = -\frac{d\phi_c}{dt}$

Comme \vec{B} est stationnaire, $d\phi_c = d\phi$ et donc $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

- Exemples :
 - Déplacement d'une tige conductrice :

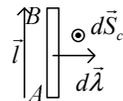


- (1) On a $\vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B}$
- (2) Il y a de plus un champ électrique à cause des charges qui s'accumulent, jusqu'à compenser \vec{E}_m .
- (3) En régime permanent, $i_{AB} = 0$ et $u_{AB} > 0$.

On a $R_{AB}i_{AB} = u_{AB} + e_{AB}$, donc on devrait avoir $e_{AB} < 0$:

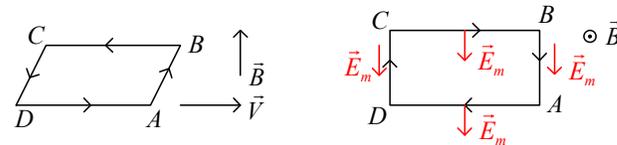
Théorème de Faraday :

Calcul de $d\phi_c$:



On a donc $d\phi_c > 0$, et $e_{AB} = -\frac{d\phi_c}{dt} < 0$.

- Déplacement d'un cadre rectangulaire :



- (1) On a $\vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B}$
 Dans les branches CB, DA , on a un effet Hall
 Dans les branches CD, BA , les charges $+$ s'accumulent en bas, les $-$ en haut.
- (2) Si \vec{B} est uniforme, on aura une tension entre A, B, C et D , mais pas de courant ($e = -\frac{d\phi}{dt} = 0$)
- (3) Si par exemple \vec{B} est décroissant dans le sens de \vec{V} , on aura une circulation des électrons de C vers B et donc un courant i positif (de B vers $C...$) : $Ri = u + e = -\frac{d\phi}{dt} > 0$.

2) Cas de Neumann

On prend cette fois un circuit fixe dans un champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ variable.

On aura $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- Loi d'Ohm globale

On a $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Donc entre deux points A et B du circuit :

$$\int_A^B \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} + \int_A^B -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Soit, en ARQP magnétique :

$$R_{AB} i_{AB} = u_{AB} + e_{AB} + 0 \quad (\text{on a } \vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt})$$

On retrouve donc la même loi.

- Champ électromoteur de Neumann :

On a $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

- C'est une partie du champ électrique.
- Il dépend du choix de jauge, donc on peut obtenir éventuellement des paradoxes...
- Force électromotrice d'induction :

$$e_{AB} = \int_A^B -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

On a $R_{AB} i_{AB} = u_{AB} + e_{AB}$, donc $u_{AB} + e_{AB}$ ne dépend pas du choix de jauge, alors que chacun des termes indépendamment en dépend.

En fait, on ne parle du cas de Neumann que lorsqu'on travaille avec un circuit entier.

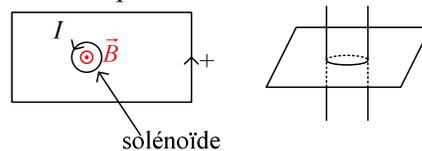
On a ainsi $Ri = 0 + e$ et $e = \oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$, indépendant du choix de jauge.

- Théorème de Faraday : comme le circuit est fixe,

$$\text{On a } e = \oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Soit $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

- Exemple :



On a $\phi = \mu_0 n I(t) \pi R^2$ (en ARQP magnétique)

On débranche le solénoïde.

Ainsi, $I(t)$ passe de I à 0.

Pendant la décroissance de ϕ , on aura $i > 0$ dans la spire.

3) Cas général

C'est lorsque le circuit se déplace dans un champ variable.

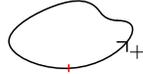
On aura alors $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$, et on aura toujours $e = -\frac{d\phi}{dt}$ (admis).

4) Courant et quantité d'électricité induits

- Courant induit :

On a $Ri = e = -\frac{d\phi}{dt}$, donc $i = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$, ce qui explique tous les résultats expérimentaux observés.

- Quantité d'électricité induite :



Si à t_1 on a un flux ϕ_1 , à t_2 un flux ϕ_2 , alors la quantité de charge traversant le circuit est $q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = \frac{-1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2)$, indépendante de la variation de flux pendant le déplacement.

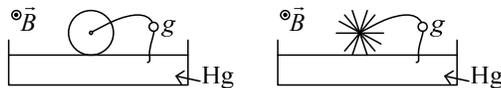
C) Cas des courants volumiques et surfaciques

Ce cas là est plus complexe :

- On ne peut déjà pas appliquer le théorème de Faraday.
- Quand on déplace un fil, on déplace en même temps la ligne de courant, alors que pour un volume ou une surface, on a un ou deux degrés de liberté supplémentaires :

Exemple :

Roue de Barlow :



On suppose que la deuxième roue est faite de telle sorte que dès qu'un rayon quitte le mercure, le suivant arrive, afin de ne pas ouvrir le circuit.

Ainsi, le deuxième circuit correspond à un circuit filiforme, et le premier surfacique.

Quand la deuxième roue tourne, les lignes de courant se déplacent avec le conducteur, alors que pour le premier, en régime permanent, le trajet des électrons ne varie plus, et donc la ligne de courant n'est pas fixe par rapport au conducteur.

Dans ces cas là, on est obligé de revenir aux calculs classiques :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

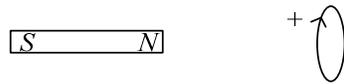
IV Loi de Lenz

A) Enoncé

Le phénomène d'induction agit en sens tel qu'il s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

B) Exemples

1) Champ \vec{B} et flux induit



On rapproche l'aimant de la spire.

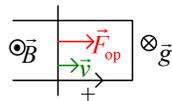
Ainsi, le flux ϕ_{ext} créé par cet aimant va augmenter, et donc $\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} > 0$, soit

$i < 0$. Donc la spire va créer un champ \vec{B}_{propre} dirigé vers la gauche.

Ainsi, en voulant augmenter \vec{B} , on a créé un champ \vec{B} opposé au champ extérieur.

Ou, avec les flux : on aura $\phi_{\text{propre}} < 0$, donc la spire tempère l'augmentation de flux.

2) Force de Laplace induite



Lorsqu'on déplace le rail, ϕ diminue, donc $e = -\frac{d\phi}{dt} > 0$, et on aura un

courant i positif dans le circuit.

Force de Laplace induite sur la tige : $\vec{F}_l = i \vec{l} \wedge \vec{B}$

Donc opposée au déplacement.

Remarque :

La loi de Lenz est une loi de modération, qui traduit la stabilité du système :

Si on imagine un monde « anti-Lenz », on aurait par exemple pour un petit déplacement de la tige précédente une force de Laplace qui pousserait la tige encore plus...

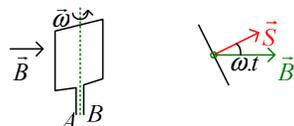
V Application des phénomènes d'induction

A) Générateurs

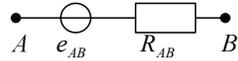
1) Principe

Le déplacement d'un circuit dans un champ \vec{B} stationnaire provoque un courant i .

2) Exemple



On a ainsi un dipôle électrocinétique :



Et $u_{AB} = -e_{AB} + Ri_{AB}$

Où $e_{AB} = -\frac{d\phi_c}{dt} \approx -\frac{d\phi}{dt}$ (en supposant A et B très proches)

On a $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \omega t$

Donc $e_{AB} = BS\omega \sin \omega t$

3) Bilan énergétique

- Analyse :

- Lorsque le générateur est en circuit ouvert, on a $i_{AB} = 0$.

Donc $u_{AB} = -e_{AB}$

Il n'y a pas de puissance électrique.

Et pas non plus de force de Laplace, donc le cadre tourne sans être ralenti.

- En circuit fermé :

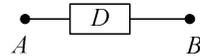
On a $i_{AB} \neq 0$

Donc il y a une puissance électrique

Mais aussi une force de Laplace induite résistance.

- Travail électrique fourni par le générateur au circuit extérieur :

- Rappel électrocinétique :



On note P_{AB} la puissance reçue par le dipôle D .

Lorsqu'une charge dq traverse D , elle a en A une énergie dqV_A , en B une énergie dqV_B

Donc l'énergie varie de $dq(V_B - V_A) = -dq.u_{AB}$

Donc D a reçu une énergie $dq.u_{AB}$.

Donc $P_{AB} = \frac{dq}{dt}.u_{AB}$

Ou $P_{AB} = i_{AB}.u_{AB}$.

- Pour le générateur :

La puissance électrique fournie est $P_f = -P_{reçue} = -u_{AB}i_{AB}$

Mais $Ri_{AB} = u_{AB} + e_{AB}$.

Donc $P_f = e_{AB}i_{AB} - r.i_{AB}^2$.

- Travail mécanique reçu par le cadre (fourni par l'opérateur)

On a $\delta W_{op} = M_{op}d\theta$

D'après le principe fondamental de la dynamique,

$0 = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{op} + M_L$, donc $M_{op} = -M_L$

Donc $\delta W_{op} = -\delta W_L$.

Mais d'après le théorème de Maxwell :

$$\delta W_L = i_{AB} d\phi = -e_{AB} i_{AB} dt \quad (\vec{B} \text{ est stationnaire})$$

$$\text{Donc } P_{f,op} = e_{AB} i_{AB}.$$

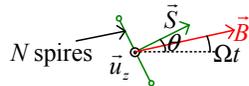
- Bilan :

On a perdu de l'énergie liée à la résistivité dans le cadre.

Mais l'énergie mécanique est transformée intégralement en énergie électrique (*puis* cette énergie est perdue un peu par effet Joule)

B) Moteurs

Moteur asynchrone monophasé :



On prend N spires, de résistance totale R , et d'auto-inductance L .

Les vecteurs \vec{S} (vecteur surface) et \vec{B} tournent autour de \vec{u}_z .

1) Analyse physique

- Si \vec{S} , \vec{B} ne vont pas à la même vitesse, le flux à travers les spires varie.
- La loi de Lenz indique déjà que si la spire tourne plus vite que \vec{B} , elle sera freinée et vice-versa.

2) Etude du fonctionnement en régime permanent

On suppose que $\theta = \omega t$ avec $\omega = \text{cte}$.

- Intensité induite :
- Equation d'évolution :

On a $Ri = e$

$$\text{Et } e = -\frac{d\phi}{dt}, \text{ avec } \phi = \phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{propre}}.$$

On admet (pour l'instant) que lorsqu'un circuit a une auto-inductance, $\phi_{\text{propre}} = Li$.

$$\text{Ainsi, } \phi = NBS \cos(\omega t - \Omega t) + Li = \phi_0 \cos(gt) + Li$$

Où $\phi_0 = NBS$ et $g = \omega - \Omega$ (« glissement »)

Ainsi, l'équation d'évolution donne :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = \phi_0 g \sin(gt)$$

- En régime sinusoïdal :

On cherche une solution de la forme $i = I_m \cos(gt + \varphi)$

Donc en complexe $\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$, et l'équation s'écrit $\underline{I}(R + jLg) = -\phi_0 g \cdot j$

- Moment induit :

- Instantané :

$$(1) \text{ On a } \vec{M}_L = Ni\vec{S} \wedge \vec{B} = -\phi_0 i \sin(gt) \vec{u}_z$$

(2) Autre méthode :

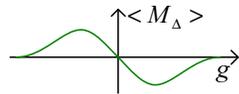
$$\text{On a } M_\Delta = i \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

On fait varier θ en maintenant tout le reste fixé :

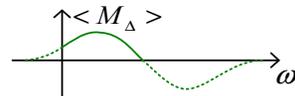
$$\phi = NSB \cos(\theta - \Omega t) \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\phi_0 \sin(\theta - \Omega t) \dots$$

- Moyen :

$$\begin{aligned} \langle M_\Delta \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I \times (\phi_0 j)^*) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(j I \phi_0) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{-jg\phi_0^2}{R + jLg} j\right) = -\frac{1}{2} \phi_0^2 g \frac{R}{R^2 + L^2 g^2} \end{aligned}$$



C'est-à-dire pour ω et avec un travail moteur :



3) Fonctionnement

- Charge :

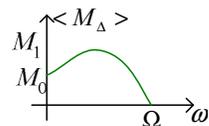
On suppose qu'on a un moment résistant $M_c > 0$ constant (plus la charge est importante, plus la résistance est importante)

- Evolution séculaire du rotor (c'est-à-dire du cadre) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \langle M_\Delta \rangle - M_c$$

- Différents régimes :

- Régime permanent : $\frac{d\omega}{dt} = 0$



Si $M_c > M_1$: pas de fonctionnement possible.

Si $M_c < M_0$: un seul point de fonctionnement possible.

Si $M_0 < M_c < M_1$: deux régimes de fonctionnement possibles.

- Stabilité :

Le régime à gauche est instable :

Si on a un point de fonctionnement à gauche, une petite diminution de ω donnera $\langle M_\Delta \rangle < M_c$, et donc $\frac{d\omega}{dt} < 0$, puis ω va chuter jusqu'à 0.

Si au contraire la perturbation se fait dans le sens de l'augmentation de ω , ω va continuer à augmenter jusqu'à atteindre l'autre point de fonctionnement. Pour la raison inverse, le régime de fonctionnement à droite est stable.

Condition de démarrage :

Il faut pour pouvoir démarrer $M_0 > M_c$ ($\frac{d\omega}{dt} > 0$)

Pour $M_0 < M_c < M_1$, il faut aider le moteur au début pour atteindre un point de fonctionnement.

4) Evolution séculaire

On a $\dot{\theta} = \omega \neq \text{cte}$

- Evolution instantanée :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = M_{\Delta} - M_c$$

- Temps caractéristique :

- En régime établi :

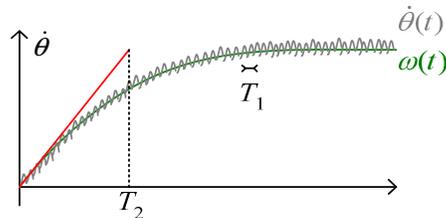
(1) $\dot{\theta}$ dépend de t ($\dot{\theta}$ varie périodiquement avec une période T_1)

(2) On a $\langle \dot{\theta} \rangle = \omega$

- En régime lentement variable :

(1) On a $\langle \dot{\theta} \rangle_{T_1} = \omega$

(2) ω varie avec un temps caractéristique $T_2 \gg T_1$



- Equation séculaire :

$$\text{On a } J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \langle M_{\Delta} \rangle - M_c$$

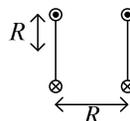
- Condition de démarrage :

Il faut qu'à $\omega = 0$, on ait $\frac{d\omega}{dt} > 0$, soit $M_0 > M_c$

On a donc une condition de démarrage plus restrictive que la condition de fonctionnement.

5) Réalisation d'un champ tournant

Bobines de Helmholtz :



On suppose les bobines parcourues par un même courant i_1 .

A l'intérieur, \vec{B} est sensiblement uniforme, et si $i_1 = i_0 \cos \Omega t$, on aura $\vec{B}_1 = B_0 \cos \Omega t \cdot \vec{u}_x$

Et si on ajoute deux autres bobines orthogonalement aux autres, parcourues par un courant $i_2 = i_0 \sin \Omega t$, on aura un champ $\vec{B}_2 = B_0 \sin \Omega t \cdot \vec{u}_y$

Et donc par superposition $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, qui sera un champ tournant.

C) Courants de Foucault

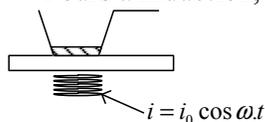
1) Définition

Ce sont les courants d'induction volumiques (ou surfaciques) :

Pour un conducteur immobile dans un champ \vec{B} variable, ou en mouvement dans un champ \vec{B} stationnaire (ou en mouvement dans un champ variable)

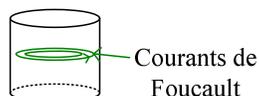
2) Effets

- Effet Joule :
 - Fours à induction, cuisinières à induction :



On se retrouve ici dans un cas de Neumann.

- Chauffage des pièces métalliques dans un moteur.
Pour l'éviter, on fait un feuilletage :



On coupe le cylindre en tranches dans le sens vertical, et on ajoute des feuilletés isolants :



Ainsi, la pièce conduit toujours dans le bon sens (vertical), mais les courants de Foucault ne passent plus.

- Freinage :
 - Principe :
C'est le cas de Lorentz : les forces de Laplace s'opposent au mouvement.
 - Caractéristique :

Il est d'autant plus efficace que les courants de Foucault sont importants.

Pour un freinage efficace, il faut donc une vitesse plus grande.

Application : poids lourds :

Freins de Foucault :

On produit un champ magnétique autour des disques des roues pour freiner la rotation du disque.

Mais il faut en plus un frein classique (les freins de Foucault ne sont plus assez efficaces à petite vitesse)

Intérêt :

Le frein classique est lié au frottement, et donc diminue rapidement lorsque la température augmente.

Le frein de Foucault lui n'en dépend pas (ou très peu)

VI Compléments

A) Résolution des problèmes d'induction

1) Conducteurs filiformes

- Cas de Neumann :

On a affaire à un problème d'électricité :

$$\begin{cases} Ri = e \\ e = -\frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

- Cas de Lorentz :

On a un problème de mécanique et d'électricité (« électromécanique »)

- Equation électrique :

$$\text{On a } R_{AB} i_{AB} = u_{AB} + e_{AB}$$

$$\text{Ou } Ri = e$$

$$\text{Et } e_{AB} = -\frac{d\phi_c}{dt} \text{ ou } e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

- Equation mécanique :

Principe fondamental de la dynamique.

2) Conducteurs non filiformes

- Loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- Equation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ donc sur un contour } \Gamma \text{ fixe : } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

3) Mouvement de charges électrostatiques

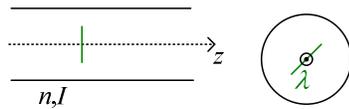
Un champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ variable va induire un champ \vec{E} , et une charge ponctuelle q sera mise en mouvement par ce champ :

- On utilise le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- Et l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer \vec{E} : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

B) Tige chargée dans un solénoïde infini



On fait passer l'intensité de I à 0 dans le solénoïde.
On observe alors une rotation de la tige.

1) Analyse physique

- La tige ne se mettra pas en mouvement
- Ca ne peut être que sous l'action de \vec{E} induit par la variation de \vec{B} .

2) Symétries

Pour \vec{B} : tout plan orthogonal à Oz est de symétrie pour \vec{j} , donc d'antisymétrie pour \vec{B} .

On a $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, donc un plan de symétrie pour \vec{B} sera d'antisymétrie pour \vec{E} . Donc $\vec{E} = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$.

On a en ARQP magnétique : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$.

3) Calcul de \vec{E} .

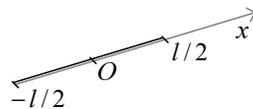
On prend un disque de rayon r centré sur l'axe :

$$\text{On a } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Donc } 2\pi r \cdot E = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi r^2$$

$$\text{Donc } \vec{E} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \frac{r}{2} \vec{u}_\theta.$$

4) Rotation de la tige



On a $d\vec{F} = \lambda dx \cdot \vec{E}$, donc

$$dM_\Delta = \lambda x dx \cdot E = \lambda x dx \left(-\frac{1}{2} \mu_0 n x \frac{di}{dt} \right) = -\frac{1}{2} \lambda \mu_0 n x^2 \frac{di}{dt} dx$$

$$\text{Puis } M_{\Delta} = -\frac{1}{2} \lambda \mu_0 n \frac{di}{dt} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = -\frac{1}{24} \mu_0 n \lambda^3 \frac{di}{dt}$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$J_{\Delta} \dot{\theta} = M_{\Delta}$$

$$\text{Soit } \frac{ml^2}{12} \ddot{\theta} = -\frac{1}{24} \mu_0 n \lambda^3 \frac{di}{dt}$$

$$\text{Puis } \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 n \lambda^3}{m} \frac{di}{dt}$$

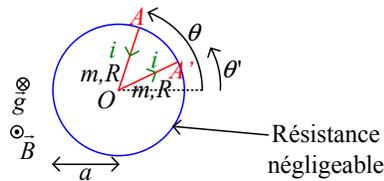
A $t = 0$, $\theta = 0$ et $i = I$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $\dot{\theta} = \omega_f$ et $i = 0$.

$$\text{On a alors } \omega_f = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n \lambda^3}{m} I.$$

La vitesse angulaire trouvée est indépendante de la vitesse avec laquelle i passe de I à 0.

C) Entraînement par induction



La tige OA est manipulée par l'opérateur, et OA' est libre.

- On commence par déplacer OA à vitesse angulaire ω_0 constante.

- Analyse physique :

Déjà, on aura une variation de flux, donc une force électromotrice.

La loi de Lenz indique que OA' va suivre OA .

On est dans le cas de Lorentz.

- Equation électrique :

On a $2Ri + 0 = e$ (il n'y a pas de résistance dans le cerceau)

D'après le théorème de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt}, \text{ et } \phi = B \times \pi a^2 \times \frac{\theta - \theta'}{2\pi} = \phi_0 (\theta - \theta') \text{ où } \phi_0 = \frac{B a^2}{2}$$

Ainsi, $e = \phi_0 (\dot{\theta} - \omega_0)$

Autre méthode : champ électromoteur de Lorentz :

$$\oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Donc

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} &= \int_0^{A'} (r \dot{\theta}' \vec{u}'_{\theta} \wedge B \vec{u}_z) \cdot dr \vec{u}'_r + \int_{A'}^0 (r \dot{\theta} \vec{u}_{\theta} \wedge B \vec{u}_z) \cdot dr \vec{u}_r \\ &= \frac{1}{2} B a^2 \dot{\theta}' - \frac{1}{2} B a^2 \omega_0 \end{aligned}$$

Ainsi, en reportant l'expression de e : $2Ri = \phi_0 (\dot{\theta}' - \omega_0)$

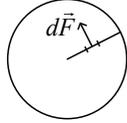
- Equation mécanique :

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à OA' par rapport à l'axe Oz ,

$$J_{\Delta} \dot{\theta}' = M_L.$$

(Tous les moments de réaction sont nuls : pour le centre, il est sur Oz , et pour le cerceau, la droite d'action passe toujours par l'axe)

Calcul direct :



$$\text{On a } d\vec{F} = id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Donc

$$\begin{aligned} dM_L &= (r \cdot \vec{u}_r \wedge (id\vec{l} \wedge \vec{B})) \cdot \vec{u}_z \\ &= (r \cdot \vec{u}_r \wedge (dr \cdot \vec{u}_r \wedge B \vec{u}_z)) \cdot \vec{u}_z \\ &= -r \cdot i \cdot dr \cdot B \end{aligned}$$

Puis en intégrant, $M_L = -i\phi_0$

On pouvait aussi utiliser le théorème des travaux virtuels :

$$M_L = i \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta'} \right)_{\theta}$$

- Mouvement :

$$\text{On a alors } 2R \frac{J_{\Delta}}{\phi_0^2} \dot{\omega}' + \omega' = \omega_0 \text{ où } \omega' = \dot{\theta}'.$$

$$\text{Donc } \omega' = \omega_0 (1 - e^{-t/\tau}) \text{ où } \tau = \frac{2RJ_{\Delta}}{\phi_0^2}$$

- Discussion :

Le résultat est déjà satisfaisant d'après l'analyse.

Au bout d'un temps infini, les deux tiges vont à la même vitesse, donc $\frac{d\phi}{dt} = 0$,

soit $i = 0$, et donc la deuxième tige tourne toute seule.

Si la résistance est infinie, il n'y a pas de mouvement

Si le champ devient très faible, on a le même effet.

Lorsque $R \rightarrow 0$, on a $\omega' = \omega_0$, donc la deuxième tige se met à tourner dès que la première démarre.

- Bilan énergétique :

Puissance cinétique :

$$P_c = \frac{dE_c}{dt} = J_{\Delta} \dot{\theta}' \ddot{\theta}' \quad (E_c = J_{\Delta} \dot{\theta}'^2)$$

Puissance Joule :

$$P_j = 2Ri^2$$

Puissance de l'opérateur :

On applique le théorème du moment cinétique à OA :

$$J_{\Delta} \frac{d\omega_0}{dt} = M_L + M_{op}$$

$$\text{Donc } M_{op} = -M_L = -i\phi_0$$

(i est inversé dans OA par rapport à OA' , donc $M_{L,OA} = -M_{L,OA'}$)

Donc $P_{op} = M_{op} \times \omega_0 = -i\phi_0\omega_0$

On doit avoir $P_{op} = P_c + P_j$, et on peut vérifier que le résultat est cohérent...

• A $t = 0$, les tiges sont au repos : $\dot{\theta} = \dot{\theta}' = 0$

Pour $t > 0$, on fait un mouvement quelconque avec la tige OA , et on note

$$\Delta\theta = \int_0^{+\infty} \dot{\theta} dt$$

On cherche alors $\Delta\theta'$

On a $2Ri = \phi_0(\dot{\theta}' - \dot{\theta})$, donc $J_{\Delta}\ddot{\theta}' = \frac{\phi_0^2}{2R}(\dot{\theta} - \dot{\theta}')$

Donc en intégrant, $J_{\Delta}\dot{\theta}'_f = \frac{\phi_0^2}{2R}(\Delta\theta - \Delta\theta')$.

Alors $\dot{\theta}'_f = 0$.

En effet, en supposant que $\dot{\theta}'_f \neq 0$, on aurait construit un radiateur perpétuel,

Ou :

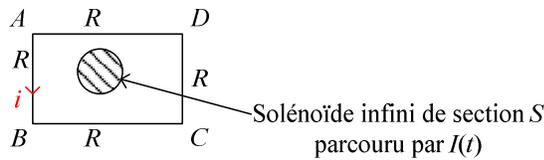
Si $\dot{\theta}'_f$ est fini non nul, alors $\Delta\theta'$ est aussi fini..?

D'où $\Delta\theta = \Delta\theta'$

Bilan énergétique :

$$W_{op} = W_j.$$

D) Mesure de tension au voltmètre



On suppose que $I(t) = I_0(t_0 - t)$.

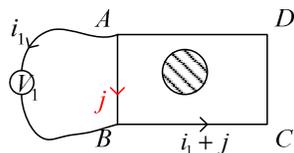
On est ici dans un cas de Neumann.

1) Force électromotrice, courant induit

$$\text{On a } 4Ri = e_0 = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 n \frac{dI}{dt} S = \mu_0 n S I_0$$

$$\text{Donc } i = \frac{\mu_0 n S I_0}{4R}$$

2) Mesure de tension



Analyse :

On considère que le voltmètre est en fait un modèle qui a une résistance R_1 très importante, et qui mesure le courant i_1 (très faible pour le coup).

Dans la maille AV_1BA :

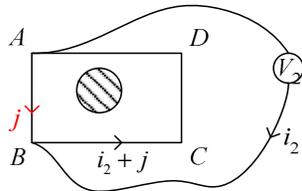
On a $R_1 i_1 - R \cdot j = e = 0$. Donc $R \cdot j = R_1 i_1$

Dans la maille $ABCD$, $4R \cdot j + 3R i_1 = e_0$.

On néglige $3R i_1$ devant $4R \cdot j$:

On a ainsi $R_1 i_1 = R j = \frac{e_0}{4}$ c'est-à-dire $u_1 = \frac{e_0}{4}$

3) Autre mesure de la tension



On suppose que $R_2 = R_1$.

- Maille AV_2BA : $R_2 i_2 - R j = -e_0$
- Maille $ABCD$: $4R j + 3R i_2 = e_0$

Donc $R j = \frac{e_0}{4}$, d'où $R_2 i_2 = \frac{-3e_0}{4} = u_2$

On trouve un résultat différent !

E) Supraconductivité

1) Propriétés des supraconducteurs

- Résistivité nulle pour $T < T_c$: $\sigma \rightarrow +\infty$.

Découverte en 1911 par Heike Kamerlingh Onnes.

Il a découvert que pour le mercure, quand $T < 4,15K$, la résistivité chutait en dessous du seuil de détection.

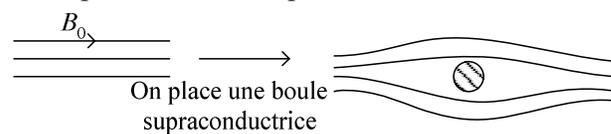
Pour l'étain, il a trouvé $T_c = 3,8K$

Et pour $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$, la température critique atteint

$T_c = 135K = -138^\circ C$

- Effet Meissner :

Un supraconducteur expulse \vec{B} :



En fait, des courants sont créés à la surface de la boule et créent un champ \vec{B}_1 de façon à avoir un champ nul à l'intérieur.

(En fait, \vec{B} pénètre quand même un peu)

Si $r < R$, on aura $\vec{B}_1 = -\vec{B}_0$

Si $r > R$, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_0$

Et $\vec{B}(R^+) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

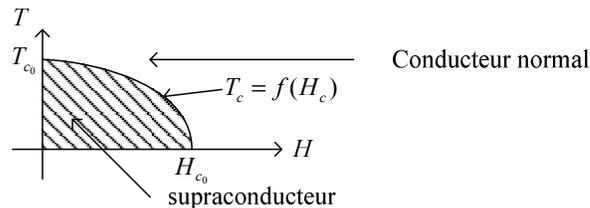
Remarque :

L'effet Meissner n'est pas réservé aux supraconducteurs.

- Champ critique :
- Supraconducteur de première espèce :

La température critique dépend en fait du champ \vec{B} , et plus précisément de l'excitation magnétique (c'est-à-dire du champ gouverné par les courants libres)

Et on a la relation $T_c = T_{c0} \sqrt{1 - \frac{H_c}{H_{c0}}}$:



Tous les *métaux* sont supraconducteurs et ont ce comportement.

(A quelques exceptions près, dont le Niobium)

- Supraconducteurs de deuxième espèce (non métaux)
- (1) Ils peuvent rester supraconducteurs même pour des excitations magnétiques très supérieures à celles des conducteurs de première espèce.
- (2) Leur résistivité est très faible, mais mesurable.
- (3) \vec{B} peut pénétrer plus profondément à l'intérieur.

2) Conduction

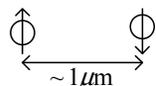
- Conducteur ordinaire :

Les électrons ont un spin $\frac{1}{2}$ entier et obéissent donc à la statistique de Fermi-Dirac (ce sont des fermions)

- Supraconducteurs :

Les électrons sont ici appariés : paire de Cooper.

Ils ont donc un spin entier, et obéissent à la statistique de Bose-Einstein (ce sont alors des bosons)



La distance entre les électrons appariés est très importante. Comment sont ils appariés alors ?

En fait, l'électron qui est « devant » va modifier le réseau autour de lui. L'autre électron un peu plus loin va en fait être favorisé par cette modification et suivre l'autre sans problème.

(Théorie de la supraconductivité : BCS, Bardeen Cooper Schieffer)

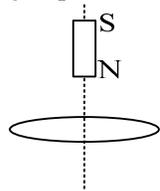
3) Application

- Transport d'électricité
- Intensités plus importantes dans les machines.
- Stockage d'électricité (par des courants surfaciques dans les matériaux sans atténuation)
- Lévitation supraconductrice :

On prend un aimant au dessus d'un supraconducteur.

Lorsqu'on le lâche, l'aimant tombe (!), mais il va provoquer des courants sur le supraconducteur qui vont créer un champ et freiner l'aimant.

Si les courants ne s'amortissent pas (supraconducteur !), l'aimant peut être freiné jusqu'à s'arrêter et rester en lévitation.



- Pour une boucle résistante :

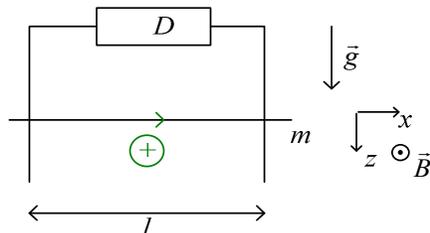
$$\text{On a } Ri = e = -\frac{d\phi}{dt}, \text{ avec } \phi = \phi_{\text{ext}} + Li$$

$$\text{Donc } Ri + L \frac{di}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} : \text{ on a un courant amorti}$$

- Pour une boucle supraconductrice :

On a cette fois $L \frac{di}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt}$, c'est-à-dire $\phi = \text{cte}$: on a en quelque sorte une loi de Lenz à 100%.

F) Chute d'une tige



On néglige la résistance de la tige et des rails.

1) Si D est une résistance R.

- Equation électrique :

$$Ri = e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Pendant dt , on a un flux $d\phi = Bl dz$ coupé, c'est-à-dire $Ri = -Bl\dot{z}$

- Equation mécanique :

$$m\ddot{z} = mg + \underbrace{il(\vec{u}_x \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z}_{iB\dot{z}}$$

Soit $m\ddot{z} = mg + iB\dot{z}$

- Mouvement :

On a alors en remplaçant i dans l'équation :

$$\ddot{z} + \frac{B^2 l^2}{mR} \dot{z} = g, \text{ soit } \dot{z} = v_l (1 - e^{-t/\tau})$$

Avec $v_l = \frac{mRg}{B^2 l^2}$, $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$

- Intensité :

On a ainsi $i = -\frac{Bl}{R} \dot{z} = -\frac{Bl}{R} v_l (1 - e^{-t/\tau}) < 0$

- Bilan énergétique :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + Ri^2 = 0$$

2) Si D est une bobine d'inductance L.

- Equation électrique :

On a $0 = -\frac{d\phi}{dt}$, avec $\phi = \phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{propre}} = \phi_{\text{ext}} + Li$

Donc $L \frac{di}{dt} = -Bl\dot{z}$

C'est-à-dire $L = -Blz + \text{cte}$

Mais à $t = 0^-$, $z = 0$, $i = 0$

Et à $t = 0^+$, $z = 0$ et comme on a une bobine, i est continu : $i = i(0^+) = 0$

Donc $Li = -Blz$

- Equation mécanique :

$$m\ddot{z} = mg + iB = mg - \frac{l^2 B^2}{L} z$$

Et $\ddot{z} + \frac{l^2 B^2}{mL} z = g$, soit $z = A(1 - \cos(\omega t))$

- Bilan énergétique :

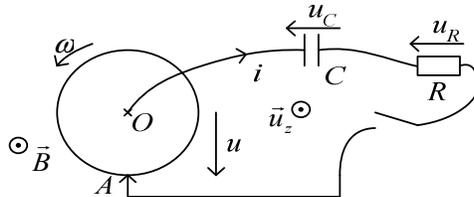
$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2} Li^2)}{dt} = 0$$

3) Si D est un condensateur de capacité C .

On obtient après calcul $\ddot{z} = \frac{g}{1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}}$, c'est-à-dire un mouvement

uniformément accéléré (mais moins accéléré que la chute libre)

G) Roue de Barlow



On suppose qu'à l'instant $t = 0^-$, la roue tourne à la vitesse $\omega = \omega_0$, et que le condensateur est déchargé. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

(On considère que la roue est un conducteur parfait : $\sigma = +\infty$)

1) Analyse

La roue va ralentir (loi de Lenz)

On est dans le cas de Lorentz d'un circuit en mouvement dans un champ stationnaire.

Comme on a une résistance, l'intensité va tendre vers 0 dans le circuit.

2) Equation mécanique

D'après le théorème du moment cinétique par rapport à Oz , on a

$$J_A \ddot{\theta} = M_L = \frac{1}{2} B r^2 i = \phi_0 i$$

(Le calcul du moment des forces de Laplace a déjà été fait, grâce au théorème des travaux virtuels)

3) Equation électrique

On a d'après la loi des mailles :

$$0 = u_R + u_C + u \text{ Avec :}$$

$$u_R = R i, u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\text{Et } u = \int_A^O \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

De plus, d'après la loi d'ohm, $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$, et \vec{j} est fini, donc $\vec{E} = -\vec{V} \wedge \vec{B}$

On a ainsi $\vec{E} = -r\omega\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = -r\omega B\vec{u}_R$

Et donc $u = \int_{-R}^0 -r' \omega B dr' = \frac{1}{2} Br^2 \omega = \phi_0 \omega$

Ainsi, $Ri + \frac{1}{C} \int idt + \phi_0 \omega = 0$

C'est-à-dire en dérivant $R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i + \phi_0 \dot{\omega} = 0$

4) Intensité

On a grâce aux deux équations :

$$R \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C} + \frac{\phi_0^2}{J_\Delta} \right) i = 0$$

$$\text{Donc } i = i_0 e^{-t/\tau} \text{ où } \tau = \frac{RC}{1 + \frac{\phi_0^2 C}{J_\Delta}}$$

Comme u_C , ω sont continus, on a à $t = 0^+$: $u_C(t = 0^+) = 0$, $\omega(t = 0^+) = 0$.

Donc $Ri_0 + \phi_0 \omega_0 = 0$, soit $i_0 = -\frac{\phi_0 \omega_0}{R}$.

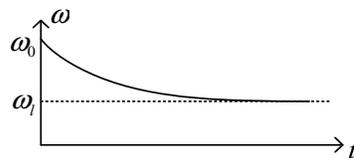
5) Vitesse angulaire

$$\text{On a } \dot{\omega} = \frac{\phi_0}{J_\Delta} i$$

$$\text{Donc } \omega = \omega_l + (\omega_0 - \omega_l) e^{-t/\tau}$$

$$\text{Avec } \omega_l = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\phi_0^2 C}{J_\Delta}}$$

On retrouve le fait que ω décroît :



H) Bêta-tron

On considère en coordonnées cylindriques un champ magnétique à symétrie de révolution de la forme $\vec{B}(r, t) = B(r, t)\vec{u}_z$

On étudie le mouvement d'un électron, de masse m , de charge $q = -e$ dans ce champ : il est soumis à une force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

1) Champ électrique induit

On a d'après les équations de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

- Symétries, invariances :

On a $\vec{E}(r, t)$

Tout plan contenant \vec{u}_z est de symétrie pour \vec{B} . On admet que c'est un plan d'antisymétrie pour \vec{E} . Ainsi, $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{u}_\theta$.

(On ne connaît pas a priori la répartition de charges et courants)

- D'après l'équation de Maxwell Faraday, en faisant circuler le champ \vec{E} sur un contour circulaire centré sur l'axe, on a :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Avec $\phi = \int_0^r B(r', t) \times 2\pi r' dr' = B_m \times \pi r^2$ où on a noté B_m le champ moyen sur le disque (dépend du temps et du rayon de ce disque)

$$\text{Ainsi, } E \times 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB_m}{dt}$$

$$\text{Puis } \vec{E} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{dB_m}{dt} \vec{u}_\theta$$

2) Condition de trajectoire circulaire

- D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{-e}{m} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{r}{2} \frac{dB_m}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{C'est-à-dire en projetant } \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{e}{m} r\dot{\theta}B \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{e}{m} \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_m}{dt} - \dot{r}B \right) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

- Condition nécessaire :

On veut avoir $r = r_0 = \text{cte}$

Avec la première égalité, il reste juste $\dot{\theta} = \frac{e}{m} B$

Avec la deuxième, $r_0 \frac{e}{m} \frac{dB}{dt} = \frac{e}{m} \frac{r_0}{2} \frac{dB_m}{dt}$, soit $\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dB_m}{dt}$.

Donc $B(r_0, t) = \frac{1}{2} B_m(r_0, t) + K$

- Condition initiale :

A $t = 0$, on doit avoir $r = r_0$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \frac{e}{m} B(r_0, 0)$, $\dot{z} = 0$.

- Exemple :

Si on lâche la particule sans vitesse initiale, et qu'on fait en sorte d'avoir un champ magnétique vérifiant la condition voulue (au moins en r_0) à tout instant, la particule va accélérer...

3) Variation de moment cinétique

$$\text{On a } \sigma_{\Delta} = m.r_0^2 \dot{\theta}$$

$$\text{Soit } \frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = m.r_0^2 \ddot{\theta} = \frac{er_0^2}{2} \frac{dB_m}{dt}$$

$$\text{Et donc } \Delta\sigma_{\Delta} = \frac{er_0^2}{2} \Delta B_m = \frac{e}{2\pi} \Delta\phi$$

4) Intérêt

Cela permet d'accélérer une particule chargée tout en gardant une orbite fixe (par exemple dans les accélérateurs)