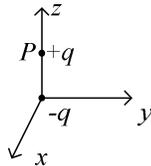


# Chapitre 17 : Rayonnement dipolaire électrique

## I Dipôle électrique oscillant

### A) Moment dipolaire



On suppose la charge  $-q$  fixe en  $O$ , et  $+q$  en  $P$  ayant une cote  $z = z_0 \cos(\omega t) = z_0 \exp(-i\omega t)$

On a donc un moment dipolaire  $\vec{P} = qz_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_z = p_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$

Remarques :

- Il existe un autre modèle de production de rayonnement électromagnétique :  
Le dipôle magnétique :

On prend un boucle de courant parcourue par un courant  $i = i_0 \cos(\omega t)$ , qui aura ainsi un moment magnétique  $\vec{M} = i\vec{S}$ . (Tous les résultats sont alors inversés, et en particulier  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ )

- La charge  $-q$  crée un champ  $\vec{E}$  électrostatique et pas de champ  $\vec{B}$

La charge  $+q$  crée un champ  $\vec{E}$  et un champ  $\vec{B}$ .

Donc tout le champ magnétique est créé par la charge en mouvement, ainsi que le champ  $\vec{E}$  rayonné.

Ainsi, seule la charge en mouvement est utile (on ajoute l'autre pour annuler le champ électrostatique).

### B) Hypothèses de travail

Champ électromagnétique en  $M$  :

On se place à une distance  $r = OM \gg z_0$

On suppose le mouvement de  $+q$  non relativiste ; ainsi,  $z_0\omega \ll c$

## II Champ électromagnétique du dipôle

### A) Potentiel vecteur

$$\text{On a } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_N \frac{\vec{j}(M, t - MN/c)}{MN} d\tau$$

$$\text{Mais } \vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = q \delta(\vec{r}_N - \vec{r}_p) \cdot \vec{v}$$

$$\text{Donc } \iiint_N \frac{\vec{j}(M, t - MN/c)}{MN} d\tau = q \frac{\vec{v}(P, t - PM/c)}{PM}$$

On a  $PM \approx OM = r$

$$\text{Et } \vec{v}(P, t - \frac{r}{c}) = -i\omega z_0 \exp(-i\omega(t - \frac{r}{c})) \vec{u}_z = -i\omega z_0 \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_z \text{ où } k = \frac{\omega}{c}.$$

$$\text{Ainsi, } \vec{A}(M, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{i\omega}{r} p_0 \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_z$$

Remarque :

On est en régime harmonique, donc dériver par rapport à  $t$  revient à multiplier par  $i\omega$ , mais on n'a pas une onde plane, donc  $\vec{\nabla} \leftrightarrow i\vec{k}$ .

### B) Le champ $\vec{B}$ .

On a  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ .

$$\text{Mais } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (f(r)\vec{u}_z) = \vec{\nabla} f(r) \wedge \vec{u}_z$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{-\mu_0}{4\pi} i\omega p_0 \left( \frac{-1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z$$

$$\text{Et } \vec{u}_z = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{-\mu_0}{4\pi} i\omega \frac{p_0 \sin\theta}{r^2} (1 - ikr) \exp(i(kr - \omega t)) \vec{u}_\theta$$

Si  $\omega = 0$ , on retrouve  $\vec{B} = \vec{0}$ .

### C) Le champ $\vec{E}$ .

On a pour le champ  $\vec{E}$  :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{-c^2}{i\omega} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} (2 \cos\theta (1 - ikr) \vec{u}_r + \sin\theta (1 - ikr - k^2 r^2) \vec{u}_\theta) \exp(i(kr - \omega t)) \end{aligned}$$

Si  $\omega = 0$ , alors  $k = \frac{\omega}{c} = 0$  et on retrouve le champ  $\vec{E}$  électrostatique.

## III Le champ électromagnétique « à grande distance »

### A) Champ « de rayonnement »

C'est le champ créé par le dipôle « à grande distance ».

C'est-à-dire lorsque  $kr \gg 1$  ou  $r \gg \lambda$

## B) Expression du champ

### 1) Champ $\vec{E}$ .

$$\vec{E} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{p_0 \sin \theta}{r} \exp(i(k.r - \omega.t)) \vec{u}_\theta$$

(On néglige tous les termes en  $kr$  ou 1 devant  $k^2 r^2$ )

### 2) Champ $\vec{B}$ .

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \frac{p_0 \sin \theta}{r} \exp(i(k.r - \omega.t)) \vec{u}_\phi$$

## C) Structure du champ

### 1) Propagation

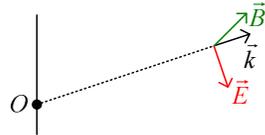
En posant  $\vec{k} = k\vec{u}_r$ , le terme  $\exp(i(k.r - \omega.t))$  devient  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega.t))$

On a donc une propagation radiale.

### 2) Transversalité

$\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{B}$  selon  $\vec{u}_\phi$ .

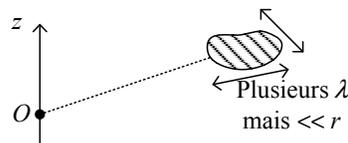
On a donc une onde transverse électromagnétique.



### 3) Structure locale d'onde plane

On a  $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_r$  et  $c\vec{B} = \vec{u}_r \wedge \vec{E}$ . Donc  $(\vec{E}, c\vec{B}, \vec{u}_r)$  forme un trièdre direct.

Et, en norme,  $E = cB$ .



Sur le domaine, le terme  $\frac{p_0 \sin \theta}{r} \vec{u}_\theta$  varie peu, mais  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega.t))$  varie

beaucoup plus. Ainsi, comme  $\vec{E} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \frac{p_0 \sin \theta}{r} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega.t)) \vec{u}_\theta$ , l'onde a

localement une structure d'onde plane de direction de propagation  $\vec{u}_r$ .

#### 4) Anisotropie

- On a un terme en  $\sin \theta$  dans l'expression, donc on n'a pas de symétrie sphérique.

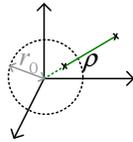
Il n'y a pas de champ rayonné à la verticale du dipôle, mais il est maximal dans le plan médiateur.

- Diagramme polaire de rayonnement (indicatrice de rayonnement) :

- Principe général :

On veut représenter une fonction  $f(r, \theta, \varphi)$  selon la direction  $(\theta, \varphi)$  pour visualiser l'anisotropie.

On trace dans l'espace une surface  $\rho = f(r_0, \theta, \varphi)$  où  $r_0$  est fixé :



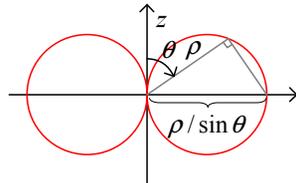
On obtient ainsi une transformée de la sphère de rayon  $r_0$  telle que la forme de la surface indique la direction où  $f$  est plus importante/plus faible selon que le point dans cette direction est plus éloigné/plus proche du centre.

C'est ce qu'on appelle le diagramme polaire de  $f$ .

- Application :

Dans ce cas, on a une relation de la forme  $\rho = \alpha \cdot \sin \theta$ .

Dans un plan contenant  $Oz$ , on obtient :



Puis par symétrie de révolution, on obtient un tore de rayon intérieur nul.

#### 5) Polarisation rectiligne

L'onde est polarisée rectilignement

#### 6) Amplitude

- L'amplitude décroît en  $\frac{1}{r}$

On a ainsi une décroissance moins rapide que pour un dipôle électrostatique.

- On verra que c'est en fait la conservation de l'énergie qui impose cette décroissance en  $\frac{1}{r}$ .

## IV Propagation de l'énergie

### A) Puissance rayonnée par le dipôle

#### 1) Vecteur de Poynting

$$\text{On a } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2 \vec{u}_r$$

$$\text{Et } u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \epsilon_0 \vec{E}^2$$

#### 2) Intensité

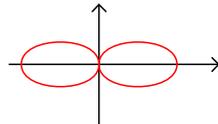
- Définition :

On pose  $I = \langle \vec{\pi} \cdot \vec{u}_r \rangle$ , flux surfacique moyen d'énergie.

- Expression :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{r^2} \end{aligned}$$

- Anisotropie :



- On a une décroissance en  $1/r^2$
- Et une variation en  $\omega^4$ .

#### 3) Puissance rayonnée à travers une sphère de rayon $r$ .

- Expression :

$$\begin{aligned} P &= \langle \oiint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \rangle = \oiint \langle \vec{\pi} \cdot \vec{u}_r \rangle dS = \oiint I dS \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{\omega^4 p_0^2}{r^2} \int \int \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0}{16\pi \cdot c} \omega^4 p_0^2 \times \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } P = \frac{\mu_0}{12\pi \cdot c} \omega^4 p_0^2$$

- Analyse :

- On obtient bien une puissance indépendante de  $r$  (conservation de l'énergie entre deux sphères de rayons voisins).

Ceci impose alors que  $I$  décroisse en  $1/r^2$  (puisqu'on intègre sur une surface), puis que  $E$  et  $B$  décroissent en  $1/r$ .

- Les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences.

(1) C'est pratique pour les antennes, où on utilise des hautes fréquences.

(2) Pour le transport du courant, il faut une puissance rayonnée la plus faible possible et donc des basses fréquences.

- Énergétiquement :
  - (1) L'opérateur qui fait bouger la charge *doit* sentir une force résistante. (Ainsi, la charge interagit avec son propre rayonnement, donc elle ne peut pas être ponctuelle)
  - (2) Le mouvement cyclotron dans un champ  $\vec{B}$  uniforme est nécessairement amorti.

## B) Rayonnement d'accélération

### 1) Formule de Larmor

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi.c} \omega^4 p_0^2$$

On a  $z = z_0 \cos \omega t$ , donc  $\ddot{z} = -\omega^2 z_0 \cos \omega t$

On note  $a^2 = \langle \ddot{z}^2 \rangle = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^4$ .  $a$  : accélération quadratique moyenne.

$$\text{Ainsi, } P = \frac{\mu_0}{6\pi.c} q^2 a^2$$

### 2) Généralisation (sans démonstration)

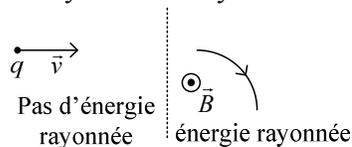
- Toute particule chargée en mouvement non uniformément accéléré rayonne de l'énergie :
- Elle doit être accélérée.



- Mais non uniformément accélérée ( $\vec{a} \neq \text{cte}$ )
- Pour un mouvement périodique :  
La formule de Larmor s'applique aussi (pour un mouvement non relativiste)
- Mécaniquement, la particule perd de l'énergie.

### 3) Manifestation du rayonnement d'accélération

- Emission dipolaire : antennes
- Le rayonnement thermique est un rayonnement d'accélération (dû au mouvement des noyaux et des électrons)
- Rayonnement synchrotron :



- Au voisinage des accélérateurs de particule
- Dans les pulsars ( $B \sim 10^{10} \text{ T}$  !)

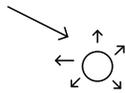
- Rayonnement de freinage :
  - Lorsqu'on envoie une particule  $\alpha$  sur une plaque de plomb, elle sera freinée et émettra un rayonnement (« Bremsstrahlung »)
  - Rayonnement cosmique :  
Ce sont des ions  $H^+$ ,  $He^{2+}$ ,  $Fe^{2+}$  ... avec une énergie d'ordre macroscopique  
Ces particules vont subir des chocs sur l'atmosphère (rayons gamma)
- Diffusion de la lumière (cf. complément)

## V Complément

### A) Diffusion de Thomson et de Rayleigh

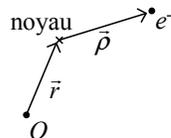
Diffusion :

C'est l'interaction d'une onde électromagnétique avec la matière qui va absorber l'onde et la réémettre.



#### 1) Interaction du rayonnement avec la matière

- Onde incidente :  
On suppose que l'onde incidente est une OPPS, de direction  $\vec{k}$ .
- Mouvement des particules chargées :
  - Modèle :
    - (1) Matière constituée de noyaux très massifs  $M$  et d'électrons de masse  $m \ll M$
    - (2) Noyaux quasiment fixes
    - (3) Pour les électrons :



On suppose qu'il y a une force de rappel proportionnelle à la distance au noyau (élastiquement lié)  $\vec{F} = -k\vec{\rho} = -m\omega_0^2\vec{\rho}$

$$\text{Force de Lorentz : } \vec{F}_l = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \approx q\vec{E} \quad (v \ll c)$$

$$\text{Force de frottement } \vec{F}_f = -f \cdot \vec{v} = -m\gamma \cdot \vec{v} \quad (\gamma \sim \frac{1}{\tau}, \text{ avec } \tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0})$$

- Principe fondamental de la dynamique :

$$m\ddot{\vec{\rho}} = -m\omega_0^2\vec{\rho} - m\dot{\gamma}\dot{\vec{\rho}} + q\vec{E}$$

$$\text{Soit } \ddot{\vec{\rho}} + \dot{\gamma}\dot{\vec{\rho}} + \omega_0^2\vec{\rho} = -\frac{e}{m}\vec{E}(\vec{r} + \vec{\rho}, t) \quad (\text{on suppose } \rho \ll \lambda)$$

En complexe,

$$\vec{\rho}(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$$\text{Soit } \underline{\vec{p}} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \underline{\vec{E}} \approx \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \underline{\vec{E}} \text{ (loin de la résonance)}$$

Analyse :

- (1) L'électron se comporte comme un oscillateur harmonique entretenu.
- (2) On a une résonance (amortie) en  $\omega_0$ .
- (3) En régime permanent, l'électron va absorber l'énergie de  $\underline{\vec{E}}$  et rayonner de l'énergie.

## 2) Puissance rayonnée

- Formule de Larmor :

$$\text{On a } P = \frac{\mu_0}{6\pi \cdot c} e^2 a^2$$

$$\text{Et } a^2 = \langle \ddot{\vec{p}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 \underline{\vec{p}} \cdot \underline{\vec{p}}^* = \frac{1}{2} \omega^4 \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*$$

$$\text{On note } I_0 = \frac{1}{\mu_0 c} \langle \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 : \text{ puissance incidente surfacique.}$$

$$\text{Ainsi, } P = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} I_0$$

- Section efficace de diffusion :

$$\text{On note } P = \sigma \cdot I_0, \text{ avec } \sigma = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Interprétation :



La puissance que l'atome va rediffuser, c'est la puissance incidente qui traversera un petit cerceau de section  $\sigma$  placé orthogonalement à l'onde incidente.

## 3) Diffusion Thomson

- Définition :

C'est lorsque  $\omega \gg \omega_0$

$$\text{On a } \omega_0 \sim 5 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{Donc } \lambda_0 = 0,04 \mu\text{m} = 40 \text{ nm}$$

Ainsi, dans les rayons X (10 nm  $\rightarrow$  20 pm), on a  $\lambda \ll \lambda_0$

- Formule de Thomson :

$$P = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2} I_0$$

- Section efficace de diffusion :

$$\text{On a } \sigma_T = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2}, \text{ indépendant de } \omega. \text{ Serait-ce la section de l'électron ?}$$

On a  $U \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}$ , et  $U = mc^2$

Donc  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ , soit  $\pi r_e^2 = \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{\mu_0^2 e^4}{16\pi m^2}$

Ordre de grandeur :

$\sigma_T \sim 10^{-29} \text{ m}^2$  (Unité : 1barn =  $10^{-28} \text{ m}^2$ )

- Caractéristiques :

Il n'y a pas de changement de fréquence entre l'absorption et l'émission (on a en fait un modèle linéaire)

La section efficace est indépendante de la pulsation

- Observation expérimentale : Barkla (avec des rayons X)

#### 4) Diffusion Rayleigh

- Définition :

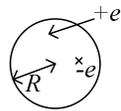
C'est lorsque  $\omega \ll \omega_0$  ( $\lambda \gg 0,04 \mu\text{m}$ , visible)

- Formule de Rayleigh :

$$P = \frac{\mu_0^2 e^4 \omega^4}{6\pi m^2 \omega_0^4} I_0$$

- Lien avec le rayon atomique :

Modèle de Thomson :



On a au niveau de l'électron  $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}$

Donc  $\vec{F} = -\underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}}_{m\omega_0^2} \vec{r}$ , soit  $\frac{e^4}{m^2 \omega_0^4} = (4\pi\epsilon_0 R^3)^2$

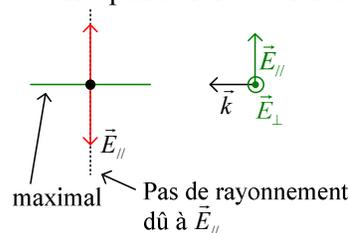
Et la puissance rayonnée s'écrit  $P = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{c^2} R^6 \omega^4 I_0$

- Caractéristique du rayonnement de Rayleigh :

- On a toujours un rayonnement sans changement de fréquence.

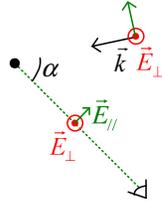
- Il y a une variation très importante en fonction de  $\omega$ .

- La diffusion est anisotrope : si on décompose  $\vec{E}$  en deux composantes polarisées rectilignement  $\vec{E}_{//}$  et  $\vec{E}_{\perp}$ , le mouvement de l'électron correspond alors à celui de deux « dipôles » unidimensionnels :



Ainsi, le rayonnement émis par l'électron sera maximal pour chacun des « dipôles » dans les deux plans normaux à  $\vec{E}_\perp$  et  $\vec{E}_\parallel$ , et encore plus important à l'intersection de ces deux plans, à savoir la direction  $\vec{k}$ . La direction incidente est donc privilégiée pour le rayonnement.

- La lumière est partiellement polarisée :



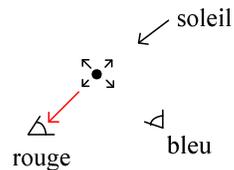
Pour  $\vec{E}_\perp$ , il y aura un maximum d'intensité diffusée

Pour  $\vec{E}_\parallel$ , il y en aura moins

Et la polarisation sera totale si  $\alpha = \pi/2$ .

• Bleu du ciel et soleil couchant :

On a  $\omega_B \approx 2 \times \omega_R$ , donc  $P_B \approx 16 \times P_R$



En plein jour, on voit le ciel bleu car le bleu est beaucoup mieux diffusé que le rouge (si on ne regarde pas le soleil en face). Mais quand on regarde le soleil en face (le soir par exemple), le bleu a été plus diffusé que le rouge, et c'est donc le rouge qui prédominera.