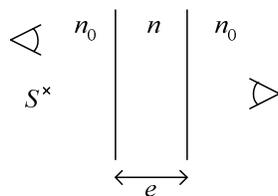


Chapitre 24 : Interférences par division d'amplitude

I Franges d'égal inclinaison (ou franges de Haidinger)

A) Dispositif expérimental



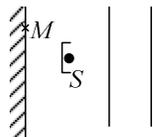
On peut observer les franges d'interférence par réflexion ou par transmission.

B) Localisation des franges

1) Source ponctuelle

On a des franges non localisées :

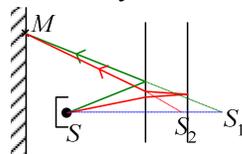
- Observation :



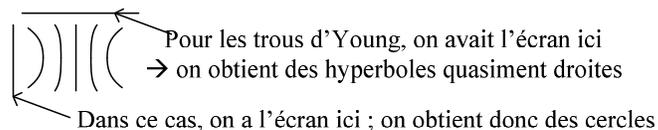
On observe des franges circulaires (symétrie de révolution), mais très peu lumineuses.

- Interprétation :

En M : il y a deux rayons lumineux qui arrivent :



(L'un par réflexion directe, l'autre après avoir été réfracté puis réfléchi et encore réfracté). On a ainsi des hyperboloïdes :



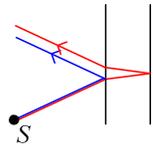
2) Source étendue : franges localisées à l'infini

- Observation :
 - Plus la source est large, moins il y a de contraste et les interférences disparaissent rapidement.
 - Si on éloigne l'écran à l'infini, les franges réapparaissent.

- Interprétation :

On doit avoir $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{SS}' \ll 2\pi$

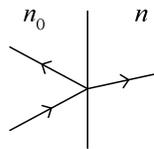
Lorsque $\vec{k}_2 = \vec{k}_1$, c'est-à-dire lorsque l'écran est à l'infini, on a bien des interférences quelle que soit la largeur de la fente :



- Intérêt : on peut avoir des sources beaucoup plus larges donc plus lumineuses.

C) Amplitude réfléchi et transmise

1) Coefficients de réflexion et transmission



Sous incidence normale, on a $r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n}$ et $t_1 = \frac{2n_0}{n_0 + n}$

On admet que c'est toujours valable (de façon approchée) lorsque l'incidence n'est plus normale.

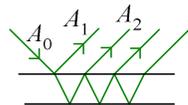
Pour le passage de n à n_0 , on aura $r_2 = \frac{n - n_0}{n_0 + n}$ et $t_2 = \frac{2n}{n_0 + n}$

Donc $r_1 = -r_2$; on note $r = |r_1|$

Ainsi, on a $r^2 + t_1 t_2 = \frac{(n - n_0)^2}{(n_0 + n)^2} + \frac{4n_0 n}{(n_0 + n)^2} = 1$

2) Réflexion

- Cas général :



Pour l'onde incidente, $A = A_0 \cos(\omega t - k \cdot x - \varphi)$

On a $\frac{A_1}{A_0} = r$, $\frac{A_2}{A_0} = r t_1 t_2$, $\frac{A_3}{A_0} = r^3 t_1 t_2 \dots$ (pour les amplitudes réelles)

- Cas d'une lame de verre :

On a $n_0 = 1$, $n = 1,5$. Donc $r = 0,2$, $t_1 = 0,8$, $t_2 = 1,2$

Donc $\frac{A_1}{A_0} = 0,20$, $\frac{A_2}{A_0} = 0,192$, $\frac{A_3}{A_0} = 0,0076$, $\frac{A_4}{A_0} = 0,0003$

On peut donc considérer qu'il n'y a que A_1 et A_2 .

Les deux rayons ont quasiment la même amplitude, donc on aura des franges bien contrastées.

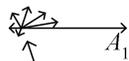
- Cas d'une lame argentée :

$$r = 0,95, \quad t_1 t_2 = 0,10$$

$$\text{On a alors } \frac{A_1}{A_0} = 0,95, \quad \frac{A_2}{A_0} = 0,095, \quad \frac{A_3}{A_0} = 0,090, \quad \frac{A_4}{A_0} = 0,086$$

On ne peut donc plus se limiter à une interférence à deux ondes seulement (les amplitudes des autres réflexions sont comparables à la deuxième réflexion)

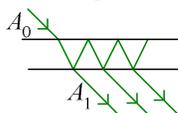
On aura de plus un mauvais contraste, car $A_1 > A_2$.



Les amplitudes sont déphasées

3) Par transmission

- Cas général



$$\text{On a ici } \frac{A_1}{A_0} = t_1 t_2, \quad \frac{A_2}{A_0} = r^2 t_1 t_2, \quad \frac{A_3}{A_0} = r^4 t_1 t_2 \dots$$

- lame de verre :

$$\text{On aura } \frac{A_1}{A_0} = 0,96, \quad \frac{A_2}{A_0} = 0,038, \quad \frac{A_3}{A_0} = 0,0015$$

On aura donc une interférence essentiellement à deux ondes, mais avec un mauvais contraste.

- lame argentée :

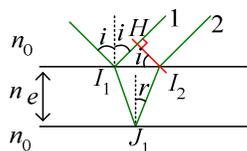
$$\frac{A_1}{A_0} = 0,1, \quad \frac{A_2}{A_0} = 0,09, \quad \frac{A_3}{A_0} = 0,081$$

On a donc une interférence à ondes multiples, avec un bon contraste

Lame		Par réflexion	Par transmission
Verre non traité	Deux ondes	Bon contraste	Mauvais contraste
Semi-argenté	Ondes multiples	Mauvais contraste	Bon contraste

D) Différence de marche, déphasage

1) Réflexion



- Différence de marche géométrique :

On a $L = \int n ds$, et donc une différence de marche

$$\begin{aligned}\delta_g &= \Delta L = n(I_1 J_1 + J_1 I_2) - n_0 I_1 H \\ &= n \frac{2e}{\cos r} - n_0 I_1 I_2 \sin i \\ &= n \frac{2e}{\cos r} - n_0 2e \tan r \sin i\end{aligned}$$

De plus, d'après les lois de Descartes, $n_0 \sin i = n \sin r$

$$\text{Donc } \delta_g = \frac{2ne}{\cos r} - 2ne \frac{\sin^2 r}{\cos r} = 2ne \cos r$$

Remarque :

L'indice n intervenant est celui du milieu intermédiaire, et c'est l'indice *absolu* qui intervient :

L'indice peut être en général remplacé par un indice relatif : d'après les lois de Descartes, on a par exemple $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, mais on peut aussi bien écrire

$$\sin i_1 = n \sin i_2 \text{ avec } n = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ici, δ_g est indépendant de l'indice extérieur.

- Différence de marche physique :

- Si $n > n_0$, on a un déphasage de π à cause du premier rayon

$$\text{Donc } \delta = \delta_g - \frac{\lambda_0}{2}$$

- Si $n < n_0$, c'est à cause du deuxième qu'on aura un déphasage

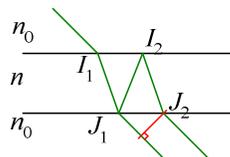
$$\text{Donc } \delta = \delta_g + \frac{\lambda_0}{2}$$

(Cela ne change rien de mettre $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ puisque seule la différence de marche modulo λ_0 est utile)

$$\text{Ainsi, dans les deux cas, } \delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\text{Donc } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = \frac{4\pi ne \cos r}{\lambda_0} + \pi$$

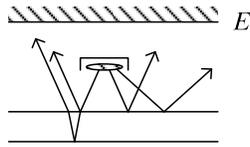
2) Transmission



- Différence de marche géométrique : on a toujours $\delta_g = 2ne \cos r$
- Différence de marche optique :
 - Si $n > n_0$, aucun des rayons ne subit de déphasage, donc $\delta = \delta_g$
 - Si $n < n_0$, on aura deux déphasages, donc $\delta = \delta_g + \lambda_0$

Donc dans les deux cas $\delta = 2ne \cos r$

E) Franges d'égalé inclinaison (de Haidinger)



1) Forme des franges

Pour du verre non traité, on a une interférence à deux ondes :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

Pour les franges :

$$I = \text{cte} \Rightarrow \varphi = \text{cte} \Rightarrow r = \text{cte} \Rightarrow i = \text{cte}$$

Donc les franges (claires ou sombres) sont les zones où arrivent les rayons issus de la source avec le même angle d'incidence (d'où le nom de frange d'égalé inclinaison)

Pour une source étendue, on place l'écran à l'infini (ou dans le plan focal d'une lentille)

2) Franges par réflexion

- Contraste :

On a pour le verre non traité $I_1 \approx I_2$, donc on obtiendra un bon contraste.

- Ordre d'interférence :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos r + \frac{1}{2}$$

Pour $n > 1$, i, r petits et $n_0 = 1$, on a $\cos r = 1 - \frac{r^2}{2}$ et $i = nr$

$$\text{Donc } p = \frac{-e}{n\lambda_0} i^2 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{2ne}{\lambda_0}}_{p_0 \text{ (au centre de l'écran)}}$$

$$\text{Soit } \frac{ei^2}{n\lambda_0} = p_0 - p, \text{ donc } i = \sqrt{\frac{n\lambda_0}{e}(p_0 - p)}$$

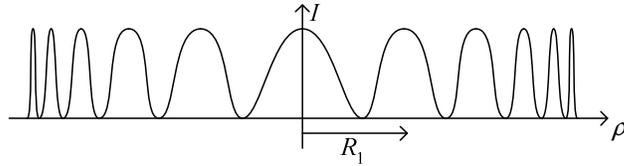
- Rayons :

Exemple :

Si le centre est brillant, on a alors $p_0 \in \mathbb{Z}$. On a donc une frange brillante

$$\text{pour } i_k = \sqrt{\frac{n\lambda_0}{e}} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C'est-à-dire un rayon } R_k = f \hat{i}_k = f \sqrt{\frac{n\lambda_0}{e}} k$$



Remarque :

Quand $e \rightarrow 0$, $R_k \rightarrow +\infty$

3) Franges par transmission

- Pour le verre traité on a un mauvais contraste ($I_1 \gg I_2$)

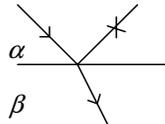
- On aura $p = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos r$

Et au centre $p'_0 = p_0 - \frac{1}{2}$

Donc tout est inversé par rapport aux franges par réflexion (les franges brillantes deviennent sombres, les sombres deviennent brillantes)

F) Application : couche anti-reflets

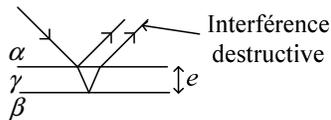
1) But



On souhaite réduire (on ne pourra pas la détruire complètement) l'intensité réfléchie.

2) Réalisation

On ajoute une couche entre α et β :



- Condition sur n_γ (indice de la couche γ) :

On doit avoir $I_1 \approx I_2$, soit $A_1 \approx A_2$

- Condition rigoureuse :

$$r_{\alpha\gamma} = t_{\alpha\gamma} r_{\gamma\beta} t_{\gamma\alpha}$$

(On aboutit à une équation du troisième degré...)

- Condition approchée :

On a $t_{\alpha\gamma} t_{\gamma\alpha} \approx 1$, donc il faut que $r_{\alpha\gamma} = r_{\gamma\beta}$

C'est-à-dire $\frac{n_\alpha - n_\gamma}{n_\alpha + n_\gamma} = \frac{n_\gamma - n_\beta}{n_\gamma + n_\beta}$, soit $n_\gamma = \sqrt{n_\alpha n_\beta}$

- Exemple :

Pour $n_\alpha = 1$, $n_\beta = 1,5$ (air-verre)

On doit avoir $n_\gamma = 1,2$.

Problème : on n'a pas de matériaux ayant un tel indice.

On utilise MgF_2 , $n_\gamma = 1,35$ ou Na_3AlF_6 , $n_\gamma = 1,36$.

• Condition sur e :

$$\text{Il faut avoir } \delta = (2k+1) \frac{\lambda_0}{2}$$

On a $\delta = 2n_\gamma e \cos r$ (on n'est pas exactement dans le cas traité avant : ici, on a trois couches d'indices différents, avec $n_\alpha < n_\gamma < n_\beta$, donc on aura deux déphasages de π)

$$\text{Ainsi, } e = (2k+1) \frac{\lambda_0}{4n_\gamma \cos r}$$

- La couche antireflet n'est pas antireflet pour toute incidence. On prend $i = 0$ (incidence normale), soit $r = 0$ ou $\cos r = 1$

$$\text{Ainsi, } e = (2k+1) \frac{\lambda_0}{4n_\gamma}$$

- e dépend de λ_0 . On prend la longueur d'onde pour laquelle l'œil est le plus sensible (le milieu du spectre visible, jaune)

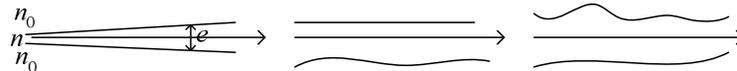
- Epaisseur minimale : on a au moins $e \geq \frac{\lambda_0}{4n_\gamma}$

II Franges d'égale épaisseur (franges de Fizeau)

A) Dispositif expérimental

1) lame mince d'épaisseur variable

On prend une lame d'épaisseur variable :



2) Eclairement

On l'éclaire sous incidence normale : $i = 0$, $r = 0$ (on suppose que l'épaisseur varie peu)

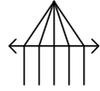
Donc $\cos i = \cos r = 1$

3) Observation

On observe des franges (que ce soit par réflexion ou transmission)

B) Localisation des franges

1) Source ponctuelle

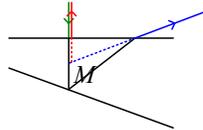


Les interférences sont non localisées, mais on aura une intensité très faible.

2) Source étendue

On a des franges localisées dans la lame :

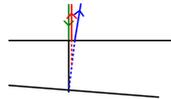
On a cohérence spatiale ($\vec{k}_1 = \vec{k}_2$)



On peut montrer que le lieu des interférences est un plan inclus dans la lame.

Remarque :

On a en fait quasiment :



C'est-à-dire qu'on peut considérer que le rayon bleu a traversé deux fois l'épaisseur de la lame.

C) Différence de marche

On prend une lame de verre non traité : on a donc des interférences à deux ondes.

1) Réflexion

On aura un bon contraste, et une différence de marche $\delta = 2ne \underbrace{\cos r}_1 + \frac{\lambda_0}{2}$

2) Transmission

On aura un mauvais contraste, et $\delta = 2ne$

D) Franges d'égal épaisseur

1) Forme des franges

On a $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$

Pour une frange, on a une même intensité, c'est-à-dire un même φ , donc une même épaisseur e .

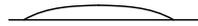
2) Visualisation de la variation d'épaisseur

On obtient une topographie de la lame (mais on ne connaît pas le sens de variation) :



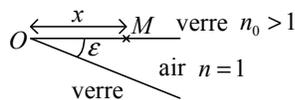
3) Observation en lumière blanche

Irises des bulles de savon, flaques d'huiles :



Certaines longueurs d'onde seront présentes au centre et éteintes aux bords et vice-versa.

E) Franges du coin d'air



1) Par réflexion

On a une différence de marche $\delta = 2ne + \frac{\lambda_0}{2} = 2nx\varepsilon + \frac{\lambda_0}{2} = 2x\varepsilon + \frac{\lambda_0}{2}$

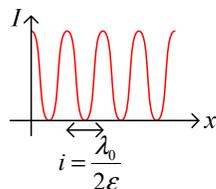
- Franges :
Elles sont parallèles entre elles et orthogonales au plan de la feuille.
- Localisation sur l'arête :



- Interfrange :

$$\Delta\delta = \lambda_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}$$

Donc $i = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}$



Remarque :

Pour l'interférence par division du front d'onde, on avait $i = \frac{\lambda_0 D}{a} \sim 1\text{cm}$.

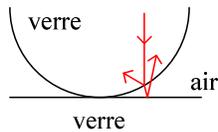
$$\text{Ici, } i = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon} \sim 1\text{mm}$$

Ainsi, un dispositif interférentiel permet de visualiser à l'œil nu une différence de chemin optique de l'ordre de λ_0 .

2) Par transmission

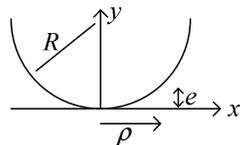
On a $\delta = 2ne$, donc tout sera inversé (on aura une frange centrale claire)

F) Anneaux de Newton



1) Par réflexion

$$\text{On a une différence de marche } \delta = 2ne + \frac{\lambda_0}{2} = 2e + \frac{\lambda_0}{2}$$



$$\text{On a } \rho^2 + (e - R)^2 = R^2$$

$$\text{Donc } \rho^2 + e^2 - 2eR = 0, \text{ soit } e = \frac{\rho^2}{2R} \text{ (on obtient une paraboloid, si on}$$

néglige le terme en e^2)

$$\text{Ainsi, } \delta = \frac{\rho^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}$$

- Franges :

$$\varphi = \text{cte} \Rightarrow \delta = \text{cte} \Rightarrow \rho = \text{cte}$$

On a donc des franges circulaires.

- Anneaux brillants :

$$\text{Il faut } \delta = k\lambda_0, k \in \mathbb{Z}$$

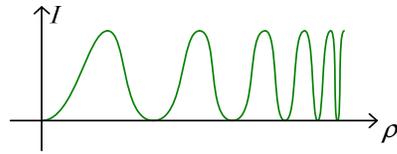
$$\text{Soit } \rho = \sqrt{R\lambda_0} \sqrt{k - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc } \rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda_0}{2}}, \rho_2 = \rho_1\sqrt{3}, \rho_3 = \rho_1\sqrt{5} \dots$$

- Anneaux sombres :

On aura des anneaux sombres pour $\rho = \sqrt{R\lambda_0} \sqrt{k}$ (le centre aussi)

$$\rho'_0 = 0, \rho'_1 = \sqrt{R\lambda_0}, \rho'_2 = \rho'_1\sqrt{2} \dots$$

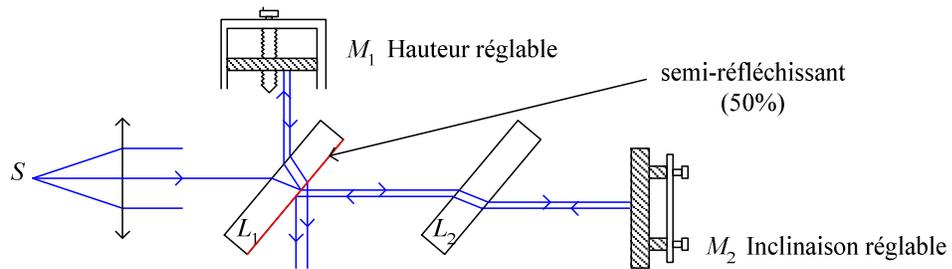


2) Par transmission

Tout est inversé

III Interféromètre de Michelson

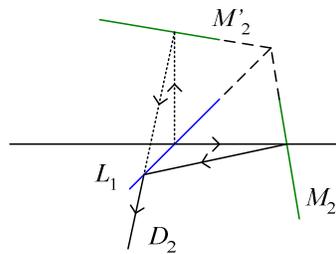
A) Description



(On fait en sorte que L_1 et L_2 aient le plus possible la même épaisseur : si la source est polychromatique, il faut qu'il y ait la même dispersion pour les deux rayons)

B) Montage équivalent

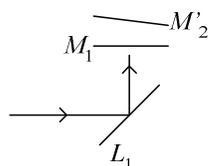
1) Miroir équivalent



Le miroir M'_2 est équivalent à M_2

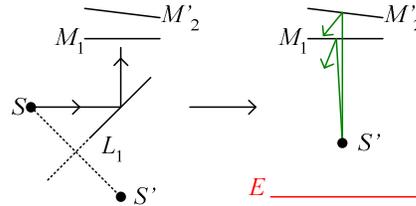
Tout se passe comme si le rayon D_2 provenait d'une réflexion sur L_1 puis sur M'_2 , symétrique de M_2 par rapport à L_1 .

2) Montage équivalent



C'est comme si, après réflexion totale sur L_1 , le rayon incident est réfléchi pour moitié sur M_1 et pour moitié sur M'_2 .

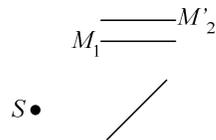
On peut aussi placer directement la source :



C) Interférences non localisées

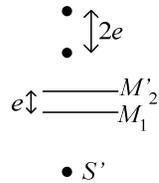
Cohérence spatiale : il faut une source ponctuelle.

1) Montage 1



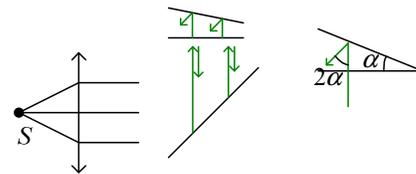
On suppose M_1, M'_2 parallèles.

On a un montage équivalent :



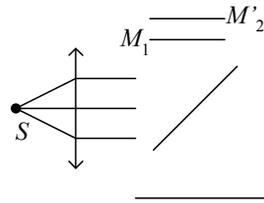
On obtiendra donc des cercles sur l'écran
(Comme pour les franges d'égale inclinaison)

2) Montage 2



On aura la même chose que pour le biprisme de Fresnel.

3) Montage 3



On aura un écran uniformément éclairé (avec le même éclairage, où qu'on le mette)

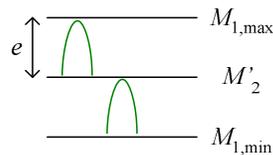
Intérêt :

- On part de $e = 0$ et on déplace progressivement le miroir M_1

L'écran devient alors sombre, puis clair...

On peut ainsi mesurer la longueur d'onde.

- Quand on continue à augmenter, $e > \frac{L_c}{2}$, et il n'y aura plus d'interférence :



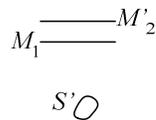
Lorsque $e = \frac{L_c}{2}$, on a $M_{1,max} - M_{1,min} = L_c$

D) Interférences localisées

Pour une source étendue, a une image plus lumineuse.

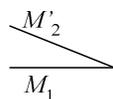


1) Lorsque les deux miroirs sont parallèles



On obtient ainsi des franges de Haidinger (localisées à l'infini)

2) Lorsqu'ils ne sont pas parallèles



On aura des franges de Fizeau (coin d'air), localisées dans la lame.

IV Interféromètre de Perot et Fabry

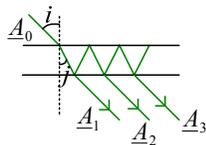
A) Description

- lame à faces parallèles argentées

$$e \updownarrow \begin{array}{c} \text{verre} \\ \hline \text{air} \\ \hline \text{verre} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \text{air} \\ \hline \text{verre} \\ \hline \text{air} \end{array}$$

- On peut régler l'épaisseur du premier (pas du deuxième, qui peut servir d'étalon...)
- On ne peut plus se limiter à deux réflexions : on a ici un interféromètre à ondes multiples.
- Pour une source étendue, on aura des franges localisées à l'infini.
- On a un meilleur contraste par transmission.
- Le laser correspond à une cavité avec parois Fabry-Perot

B) Amplitude de l'onde résultante



$$\underline{A}_1 = t_1 t_2 e^{i\alpha} \underline{A}_0, \quad \underline{A}_2 = r^2 e^{i\varphi} \underline{A}_1, \quad \underline{A}_3 = r^2 e^{i\varphi} \underline{A}_2 \dots$$

Où $\varphi = 2ne \cos j \times \frac{2\pi}{\lambda_0}$: retard de l'onde 2 par rapport à 1.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \dots \\ &= \underline{A}_0 e^{i\alpha} t_1 t_2 (1 + r^2 e^{i\varphi} + \dots) \\ &= \underline{A}_0 e^{i\alpha} \frac{t_1 t_2}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \end{aligned}$$

On a de plus $t_1 t_2 = T$, $r^2 = R$ et $R + T = 1$

$$\text{Donc } \underline{A} = \underline{A}_0 e^{i\alpha} \frac{1 - R}{1 - R e^{i\varphi}}$$

C) Intensité de l'onde résultante

1) En fonction du déphasage

On a

$$\begin{aligned} I &= \underline{A} \underline{A}^* = \underline{A}_0 \underline{A}_0^* \frac{(1 - R)^2}{(1 - R e^{i\varphi})(1 + R e^{-i\varphi})} = I_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \\ &= I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)} = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

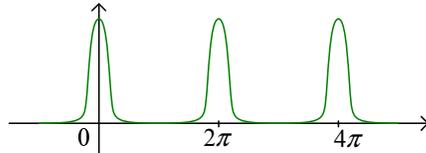
Et en posant $M = \frac{4R}{(1-R)^2}$:

$$I = I_0 \frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$\varphi \mapsto \frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ s'appelle la fonction d'Airy.

2) Etude de la fonction d'Airy

- Elle est 2π -périodique
- Si M est suffisamment élevé :
 - Quand $\varphi = 0$, $I = I_0$
 - Quand φ augmente un peu, I diminue très rapidement :



(Pour du verre semi-argenté, $r = 0,95$ et $M = 360$)

- On a $I_{\max} = I_0$
- Largeur des pics (à mi-hauteur) :

$$I = \frac{I_0}{2} \Rightarrow M \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \varphi \approx \pm \frac{2}{\sqrt{M}}$$

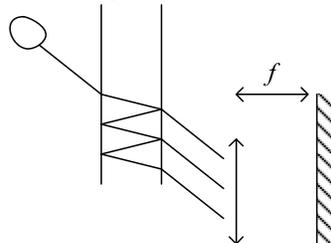
On a donc une largeur $\delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}}$.

Pour $M = 400$, $\delta\varphi = 0,2\text{rad}$ et $\frac{\delta\varphi}{2\pi} = 3\%$

- Remarques :
 - Les pics sont d'autant plus fins que M est grand.
 - Pour l'interférence à deux ondes, $\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

3) Observation des franges

- Franges localisées à l'infini



- On a des franges circulaires d'égale inclinaison :

$$I = \text{cte} \Rightarrow \varphi = \text{cte} \Rightarrow j = \text{cte} \Rightarrow i = \text{cte}$$

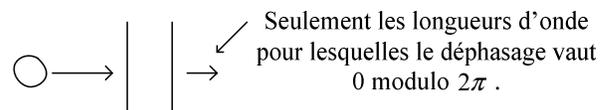
- Les franges sont très fines :
Comme on a une largeur $\delta\varphi$ très petite, on aura aussi une largeur d'inclinaison δi petite.

D) Applications

1) Filtres interférentiels

- Principe :

On travaille sous incidence normale ($i = 0$)



- Longueurs d'onde transmises :

Pour qu'une longueur d'onde soit transmise, il faut que $\varphi = 2k\pi$.

$$\text{On a } \varphi = 2ne \underbrace{\cos j}_{=1} \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2ne \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\text{Donc } \frac{2ne}{\lambda_0} = k, \text{ soit } \lambda_0 = \frac{2ne}{k}$$

En assimilant les pics d'intensité à des deltas de Dirac, on aura donc uniquement les longueurs d'onde $\lambda_0 = \frac{2ne}{k}$

Remarque :

Pour la lumière blanche, il faut mettre un pré-filtre, grossier, si on veut ne sélectionner qu'une seule longueur d'onde.

- Bande passante, facteur de qualité :

On a une largeur $\delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}}$, donc les longueurs d'ondes pour lesquelles

$$\delta\varphi \in \left[\frac{-2}{\sqrt{M}}, \frac{2}{\sqrt{M}} \right] \text{ vont aussi passer.}$$

$$\text{On a de plus } \frac{\delta\varphi}{\varphi} = -\frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0}$$

C'est-à-dire au signe près :

$$\frac{4}{\sqrt{M} 2k\pi} = \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0}$$

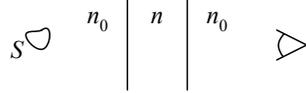
$$\text{Et donc } \frac{\lambda_0}{\delta\lambda_0} = \frac{2k\pi\sqrt{M}}{4} = \frac{k\pi}{2}\sqrt{M}, \text{ facteur de qualité ou finesse. (plus il est}$$

grand, plus il y a une seule longueur d'onde qui est sélectionnée).

Pour améliorer la finesse, on peut augmenter e (via k), mais on ne peut pas le prendre trop grand, à cause de problèmes de cohérence et d'homogénéité de la plaque de verre.

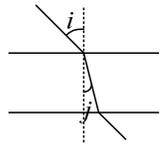
2) Spectromètre à haute résolution

- Principe :



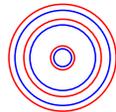
On aura des franges circulaires d'égale inclinaison, localisées à l'infini.

En lumière monochromatique, on aura des franges brillantes pour une différence de marche $\delta = k\lambda_0$, c'est-à-dire $2ne \cos j = k\lambda_0$



j dépend de λ_0 , donc i aussi et ainsi le rayon ρ des franges dépend aussi de λ_0 . On a des franges brillantes pour $\varphi = 2k\pi$, avec une largeur $\delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}}$, donc on aura une épaisseur $\delta\rho$ pour les franges, très fines (et donc très brillantes)

En lumière bichromatique, pour des longueurs d'onde λ_1 et λ_2 voisines, on aura pour λ_1 un système de franges ρ_1^k , pour λ_2 un système de franges ρ_2^k .



On a ainsi une décomposition de la lumière.

Pour pouvoir séparer les raies, il faut que λ_1 soit suffisamment différent de λ_2 et que les épaisseurs soient suffisamment fines.

- Pouvoir de résolution :
- Définition :

$$\text{On pose } \mathfrak{R} = \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right)_{\text{max}}^{\text{séparable}}$$

Il faut donc que $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq \mathfrak{R}$ pour pouvoir séparer les raies.

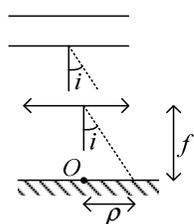
- Calcul :

(1) Rappel :

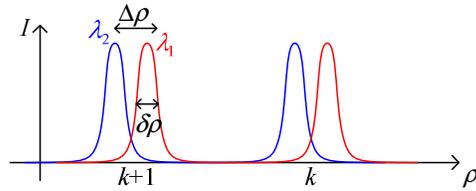
$$\varphi \rightarrow j : 2ne \cos j \times \frac{2\pi}{\lambda_0} = \varphi$$

$$j \rightarrow i : n_0 \sin i = n \sin j$$

$$i \rightarrow \rho :$$



$$\rho = f \tan i$$



Pour résoudre le doublet, il faut que $\delta\rho$ soit le plus petit possible, et $\Delta\rho$ le plus grand possible.

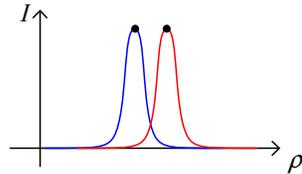
(2) $\frac{1}{2}$ largeur d'une raie (largeur à mi-hauteur) :

$$\text{On a } \delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}}$$

En différentiant $2ne \cos i \times \frac{2\pi}{\lambda_0} = \varphi$, on obtient $\frac{\delta\varphi}{\varphi} = -\tan j \cdot \delta j$

$$\text{Donc } \delta j = -\cotan j \times \frac{4}{\sqrt{M}} \frac{1}{2k\pi}$$

(3) Ecart entre deux raies :



On est à $\varphi = 2k\pi$ pour les deux longueurs d'onde, c'est λ_0 qui change :

En différentiant la même expression, on aura ainsi $-\tan j \times \Delta j - \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = 0$,

$$\text{soit } \Delta j = -\cotan j \times \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0}$$

En supposant que n_0 et n ne dépendent pas de λ (λ_1 et λ_2 sont très proches), comparer $\delta\rho$ et $\Delta\rho$ revient au même que comparer δj et Δj (il suffit de différentier $n_0 \sin i = n \sin j$ et $\rho = f \tan i$, qui sont alors indépendants de λ_0 et de φ)

(4) Critère de Rayleigh :

Il faut $|\Delta\rho| > |\delta\rho|$ pour séparer les longueurs d'onde, c'est-à-dire $|\Delta j| > |\delta j|$

$$\text{Ou } \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} > \frac{2}{k\pi\sqrt{M}}, \text{ soit } \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} < \underbrace{\frac{k\pi\sqrt{M}}{2}}_{\mathfrak{R}}$$

$$\text{Donc } \mathfrak{R} = k\pi \frac{\sqrt{R}}{1-R} \quad (\sqrt{M} = \frac{2\sqrt{R}}{1-R})$$

(5) Pour $r = 0,95$, on a $R = 0,90$, donc $\frac{\sqrt{R}}{1-R} \sim 10$

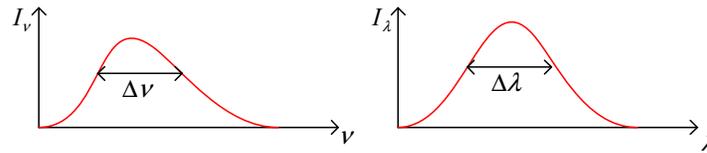
Avec $e = 1\text{cm}$, $\lambda_0 = 500\text{nm}$, $n = 1$ et sous incidence normale, on a

$$k = \frac{2ne \cos j}{\lambda_0} = 4 \cdot 10^4$$

Donc \mathfrak{R} ne varie pratiquement pas entre deux raies.

Ici, on a $\mathfrak{R} = 1,2 \cdot 10^6$, soit $\Delta\lambda = 0,4 \text{ pm}$

• Profil d'une raie spectrale :



On pourra résoudre le profil spectral si $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < R$, ou $\frac{\nu}{\Delta\nu} < R$

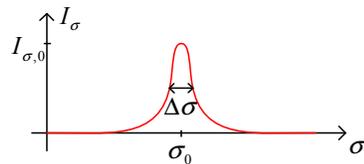
Avec $\Delta\nu = 10^9 \text{ Hz}$ et $\nu = \frac{3 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, on a $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \sim 6 \cdot 10^5$

V Compléments (exercices)

A) Résolution d'un profil gaussien

- On règle le Michelson avec les lames à faces parallèles, écartées de e .
- Au foyer de la lentille d'observation, on place un capteur $U = \alpha \cdot I$
- On place un moteur pour que e varie avec une vitesse $v_0 = \dot{e}$.
- On prend une source étendue :

Mercure, $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$, $I_\sigma = I_{\sigma,0} e^{-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}}$ où $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, nombre d'onde, et $a \ll \sigma_0$

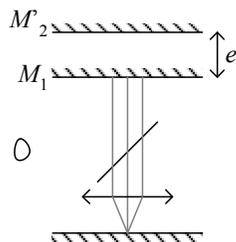


$$\exp\left(-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \pm a\sqrt{\ln 2}$$

Donc $\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}$.

(On a donc une gaussienne très fine : $a \ll \sigma_0$)

1) Intensité au foyer de la lentille



Ce sont donc les rayons sous incidence normale qui vont converger au centre.

On a donc une différence de marche $\delta = 2e$.

• En lumière exactement monochromatique :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi, \text{ et } I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}$$

Donc $I = I_0(1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta)) = I_0(1 + \cos(4\pi\sigma_0 e))$

• Ici, pour une largeur $d\sigma$ de spectre :

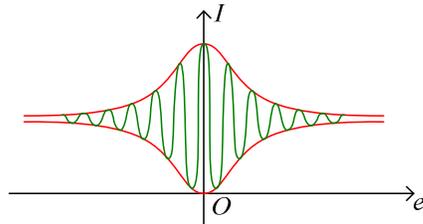
$$dI = I_0 d\sigma (1 + \cos 4\pi\sigma e)$$

Donc

$$I = I_{\sigma,0} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} (1 + \cos(4\pi\sigma e)) d\sigma \approx I_{\sigma,0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} (1 + \cos(4\pi\sigma e)) d\sigma$$

Soit, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{a^2} + 2ixu\right) du = a\sqrt{\pi} e^{-x^2 a^2}$:

$$\begin{aligned} I &= I_{\sigma,0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{a^2}} du + I_{\sigma,0} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2} + 4i\pi\sigma_0 e} d\sigma \right) \\ &= I_{\sigma,0} a\sqrt{\pi} + I_{\sigma,0} \operatorname{Re} \left(e^{4i\pi\sigma_0 e} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{a^2} + 4i\pi u e} du \right) \\ &= I_{\sigma,0} a\sqrt{\pi} + I_{\sigma,0} \cos(4i\pi\sigma_0 e) \times a\sqrt{\pi} e^{-4\pi^2 e^2 a^2} \\ &= a\sqrt{\pi} I_{\sigma,0} (1 + e^{-4\pi^2 e^2 a^2} \cos(4i\pi\sigma_0 e)) \end{aligned}$$



On a $e = v_0 t$, $U(t) = \alpha I(e)$

On a une visibilité $v = e^{-4\pi^2 e^2 a^2}$; on reconnaît la transformée de Fourier du profil spectral.

2) Largeur à mi-hauteur de la courbe détectée

On suppose qu'on atteint la mi-hauteur pour un écart $e = 2,73\text{mm}$.

$$\text{On a alors } \Delta\lambda = \lambda_0^2 \Delta\sigma = \lambda_0^2 2a\sqrt{\ln 2}$$

$$\text{Avec } e^{-4\pi^2 e^2 a^2} = \frac{1}{2}, \text{ soit } a = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi e}$$

$$\text{Donc } \Delta\lambda = \lambda_0^2 \frac{\ln 2}{\pi e} = 24\text{pm}$$

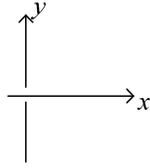
Longueur de cohérence :

$$L_c = c\tau_c, \text{ et } \Delta\omega\Delta\tau \sim 2\pi, \text{ soit } \Delta\nu\tau_c \sim 1, \text{ et avec } \Delta\nu = c\Delta\sigma,$$

$$L_c \sim \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{1}{\Delta\sigma} \sim 1,2\text{cm}$$

Et $\frac{L_c}{\lambda} = 2 \cdot 10^4$; on aura donc un très grand nombre d'oscillations.

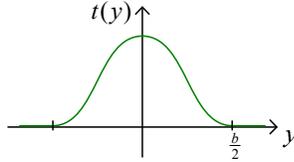
B) Apodisation



On suppose la fente infinie selon Oz .

On pose une diapositive sur la fente, de sorte qu'on ait une transmittance :

$$t(y) = \cos^2 \frac{\pi y}{b} \text{ pour } |y| \leq \frac{b}{2} \text{ et } t(y) = 0 \text{ sinon.}$$



On éclaire la fente sous incidence normale :

Amplitude réfractée par unité de longueur (uniquement selon y) :

$$\underline{a}(k_y) = K \int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \times e^{-ik_y y} dy = \frac{K}{4} \int_{-b/2}^{b/2} (e^{i\frac{\pi y}{b}} + e^{-i\frac{\pi y}{b}})^2 \times e^{-ik_y y} dy$$

$$= \frac{Kb}{4} \left(\text{sinc} \left(\pi - \frac{k_y b}{2} \right) + 2 \text{sinc} \left(\frac{k_y b}{2} \right) + \text{sinc} \left(\pi + \frac{k_y b}{2} \right) \right)$$

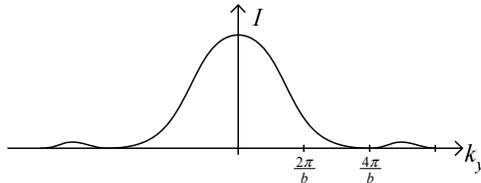
$$= \frac{Kb}{4} \text{sinc} \left(\frac{k_y b}{2} \right) \left(\frac{2}{k_y b / 2} - \frac{1}{\frac{k_y b}{2} + \pi} + \frac{1}{\frac{k_y b}{2} - \pi} \right)$$

$$= \frac{Kb}{2} \text{sinc} \left(\frac{k_y b}{2} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{k_y b}{2\pi} \right)^2}$$

$$\text{Donc } I = \frac{K^2 b^2}{4} \frac{\sin^2 \left(\frac{k_y b}{2} \right)}{\left(\frac{k_y b}{2} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{k_y b}{2\pi} \right)^2 \right)^2} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{k_y b}{2} \right)}{\left(\frac{k_y b}{2} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{k_y b}{2\pi} \right)^2 \right)^2}$$

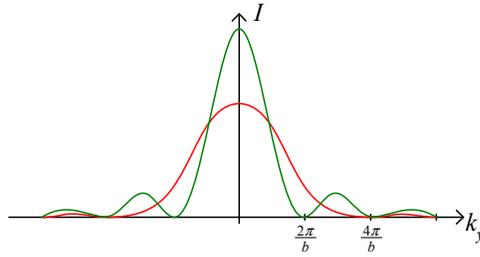
Pour $k_y = 0$, on a $I = I_0$

$$\text{Pour } k_y = \frac{2\pi}{b}, \underline{A}(k_y) = \frac{Kb}{2} \times \frac{1}{2} \text{ donc } I = \frac{I_0}{4}$$



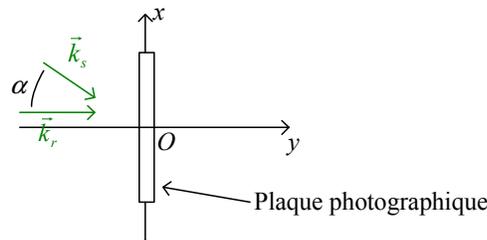
$$\text{Pour } k_y = \frac{5\pi}{b}, I_1 = I_0 \times \frac{1}{\left(\frac{5}{2} \pi \right)^2 \left(1 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right)^2} = 5,9 \cdot 10^{-4} I_0$$

Il ne reste donc presque plus rien après la première tache



C'est comme ci on avait « enlevé le pied » de la courbe (d'où le nom d'apodisation) en lissant la transmittance (on évite un saut brutal de transmittance)
 Mais on a en contrepartie une largeur de la tache centrale plus grande.

C) Hologramme d'une onde plane



On suppose \vec{k}_s et \vec{k}_r cohérentes, et en phase au point O .

Eclairement de la plaque en $M(x, y)$:

On suppose que $A_s = \varepsilon A_r$ où $\varepsilon \ll 1$.

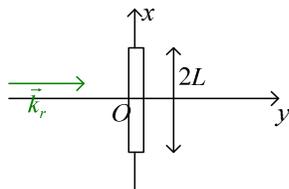
Ainsi, $E \approx I = A_r^2 + A_s^2 + 2A_r A_s \cos \varphi$ où $\varphi = (\vec{k}_s - \vec{k}_r) \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \times x$

Donc $I = A_r^2 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \times x\right)$ (en négligeant les termes d'ordre 2 en ε)

On développe la plaque photographique, et on obtient une transmittance $t \propto E^{-\gamma/2}$

Ainsi, $t(x) \propto A_r^{-\gamma} (1 - \gamma \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \times x\right)) = t_0 (1 - \gamma \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \times x\right))$

On éclaire à nouveau la plaque avec l'onde \vec{k}_r seule :



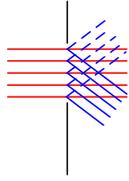
On aura ainsi une amplitude diffractée :

$$\begin{aligned} \underline{A}(k_y) &= K \int_{-L}^L t(x) e^{-ik_x x} dx \\ &= K t_0 \int_{-L}^L \left(1 - \frac{\gamma \varepsilon}{2} (e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha x} + e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha x})\right) e^{-ik_x x} dx \end{aligned}$$

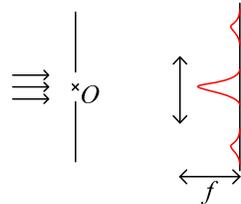
Le terme $\int_{-L}^L e^{-ik_x x} dx$ correspond ainsi à l'amplitude diffractée par une fente simple.

Le terme $\int_{-L}^L \frac{\gamma \mathcal{E}}{2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \cdot x} e^{-ik_x x} dx$ correspond à l'onde s .

Et le troisième terme au symétrique de l'onde s .

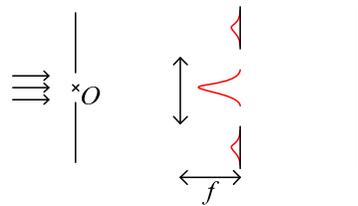


On a ainsi recréé l'onde source (s) de départ en éclairant la plaque juste avec l'onde \vec{k}_r .

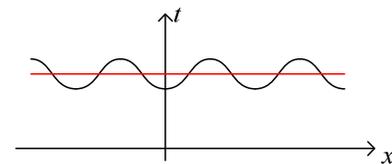


Si on place l'écran dans le plan conjugué de la fente par la lentille, on obtiendra une image de la diapositive (mais avec un mauvais contraste)

Si maintenant on bloque les deux petites zones dans le plan conjugué :



On aura uniquement le terme « constant », c'est-à-dire un éclairage uniforme :



On a en quelque sorte bloqué les composantes variables dans le spectre de Fourier de la transmittance.

Si on bloque maintenant la tache centrale, on obtiendra encore une image de la diapositive, mais mieux contrastée.

On a ainsi travaillé spatialement le spectre de Fourier de la transmittance.