Chapitre 4 : Composition des vitesses et accélérations

I Mouvement

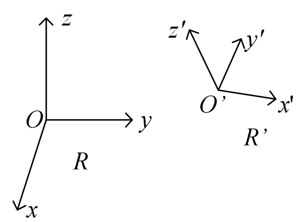
On prend deux référentiels, R absolu et R' relatif (attribution arbitraire)

A) Mouvement d'entraînement

1) Définition

C'est le mouvement de R'/R.

2) Caractérisation



- $\vec{v}_a(O') = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$
- $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{\Omega}_e$. (ainsi, $\left(\dfrac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}_e \wedge \vec{u}'_x$)

B) Mouvement absolu

1) Définition

C'est le mouvement par rapport à R.

2) Caractérisation

Pour un solide S :

- $\vec{v}_a(M)$ pour un point $M \in S$.
- $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_a$.

C) Mouvement relatif

1) Définition

C'est le mouvement de S par rapport à R'.

2) Caractérisation

- $\vec{v}_r(M), M \in S$
- $\vec{\Omega}_{S/R'} = \vec{\Omega}_r$

II Composition des vitesses

A) Cas général

1) Relation entre vitesse absolue et vitesse relative

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R}_{\vec{v}_a(O')} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R .$$

On a : $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z$.

Donc $\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\vec{u}'_x + \ldots + x'\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_R + \ldots$.

Et $\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}_e \wedge \vec{u}'_x$, et de même pour les autres.

Donc $\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \underbrace{\dot{x}'\vec{u}'_x + \ldots}_{\vec{v}_r(M)} + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}$,

D'où $\vec{v}_a = \vec{v}_r(M) + \underbrace{\vec{v}_a(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e(M)}$.

2) Vitesse d'entraînement

$\boxed{\vec{v}_e(M) = \vec{v}_a(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}}$.

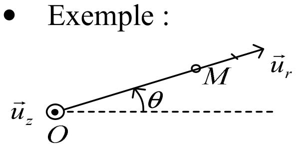
- Interprétation physique :

Point coïncidant C : c'est le point qui a la même position que M à l'instant t mais qui est fixe dans le référentiel relatif : $\overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r(C) = \vec{0}$.

Ainsi, $\vec{v}_a(C) = \underbrace{\vec{v}_r(C)}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{v}_a(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'C}}_{\vec{v}_e(M)}$.

Donc $\boxed{\vec{v}_e(M) = \vec{v}_a(C)}$.

- Exemple :



Le point M est astreint à se déplacer sur la tige.

$\vec{v}_r(M) = \dot{r}.\vec{u}_r$, $\vec{v}_e(M) = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$.

Donc $\vec{v}_a(M) = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$.

3) Dérivation composée d'un vecteur par rapport au temps

On considère un vecteur $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$.

On a :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \vec{v}_a(Q) - \vec{v}_a(P)$$

$$= \vec{v}_r(Q) - \vec{v}_r(P) + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'Q} - \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'P}$$

$$= \vec{v}_r(Q) - \vec{v}_r(P) + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{PQ}$$

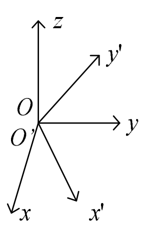
Soit $\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{A}}$.

B) Cas particuliers

1) Si *R'* est en translation par rapport à *R*.

On a $\vec{\Omega}_e = \vec{0}$. Donc $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_a(O')$

2) Si *R'* est en rotation autour de Δ fixe dans *R*.



On a $\vec{\Omega}_e = \dot{\theta}.\vec{u}_z$, $\vec{v}_a(O') = \vec{0}$.

Donc $\vec{v}_e(M) = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$.

III Composition des accélérations

A) Cas général

1) Formule de composition

$$\vec{a}_a(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R}_{\vec{a}_a(O')} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right)_R.$$

On a $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{u}'_x + \ldots$.

Donc $$\left(\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right)_R = \underbrace{\ddot{x}'\vec{u}'_x + \ldots}_{\vec{a}_r(M)} + x'\left(\frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2}\right)_R + \ldots + \underbrace{2\dot{x}\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_R + \ldots}_{\substack{=2\dot{x}\vec{\Omega}_e\wedge\vec{u}'_x+\ldots \\ =2\vec{\Omega}_e\wedge\vec{v}_r}}$$

Ainsi, $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_a(O') + x'\left(\frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2}\right)_R + \ldots + 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r$

2) Accélération d'entraînement

Définition :
$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_a(C)$.
On a :

$$\vec{a}_a(C) = \underbrace{\vec{a}_r(C)}_{\vec{0}} + \vec{a}_a(O') + x'\left(\frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2}\right)_R + \ldots + \underbrace{2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r}_{=\vec{0}}$$

$$= \vec{a}_a(O') + x'\left(\frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2}\right)_R + \ldots$$

Donc $\boxed{\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r}$.

3) Accélération complémentaire/de Coriolis

- Expression :

$\boxed{\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r}$

- Cas de nullité :

- $\vec{\Omega}_e = \vec{0}$, c'est-à-dire que *R'* est en translation par rapport à *R*.
- $\vec{v}_r = \vec{0}$: *M* est immobile dans *R'*.
- $\vec{\Omega}_e \,//\, \vec{v}_r$.

B) Cas particuliers

1) Si *R'* est en translation par rapport à *R*.

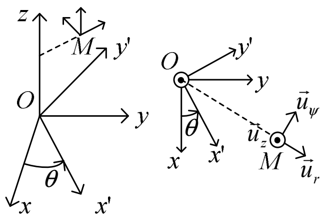
- Translation quelconque :

On a $\vec{a}_c = \vec{0}$, et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_a(O')$.
Donc $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_a(O')$.

- Translation rectiligne uniforme :

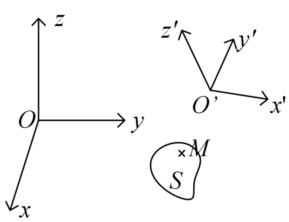
$\vec{a}_a(O') = \vec{0}$.
Donc $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M)$.

2) Si R' est en rotation autour d'un axe Δ fixe dans R.



- $\vec{a}_r(M) = (\ddot{r} - r\dot{\psi}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi})\vec{u}_\psi + \ddot{z}\vec{u}_z$
- $\vec{a}_e(M) = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\psi$
- $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r = 2\dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge (\dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\psi}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{u}_z) = -2r\dot{\theta}\dot{\psi}.\vec{u}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}.\vec{u}_\psi$
- $\vec{a}_a(M) = (\ddot{r} - r(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2).\vec{u}_r + (2\dot{r}(\dot{\theta} + \dot{\psi}) + r(\ddot{\theta} + \ddot{\psi})).\vec{u}_\psi + \ddot{z}.\vec{u}_z$

IV Composition des mouvements d'un solide



On a $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$.

On va chercher une relation entre $\vec{\Omega}_a$, $\vec{\Omega}_r$ et $\vec{\Omega}_e$.

A) Composition des vecteurs instantanés de rotation

1) Cas général

Soient A et B deux points de S, on note C_A et C_B (dans R') les points coïncidents.

On a :

$\vec{v}_a(A) = \vec{v}_a(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_a$, $\vec{v}_r(A) = \vec{v}_r(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_r$,

Et $\vec{v}_a(C_A) = \vec{v}_a(C_B) + \overrightarrow{C_A C_B} \wedge \vec{\Omega}_e$, d'où $\vec{v}_e(A) = \vec{v}_e(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_e$.

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_a = \overrightarrow{AB} \wedge (\vec{\Omega}_e + \vec{\Omega}_r)$.

Donc, comme la relation est valable pour tous points A et B :

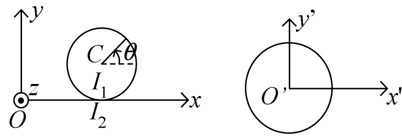
$\boxed{\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_e + \vec{\Omega}_r}$.

2) Cas particulier

Si R' est en translation par rapport à R, on a $\vec{\Omega}_e = \vec{0}$ donc $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_r$.

B) Exemples

1) Exemple 1



- Paramétrage :

$x = x(C)$, θ.

On a donc deux degrés de liberté.

- Condition de roulement sans glissement :

$\vec{v}_a(I_1) = \vec{v}_a(I_2) = \vec{0}$ (I_2 est fixe)

On a :

$\vec{v}_a(I_1) = \vec{v}_a(C) + \overrightarrow{I_1C} \wedge \vec{\Omega}_a$, soit $\vec{0} = \dot{x}\vec{u}_x + R\vec{u}_y \wedge \vec{\Omega}_a$.

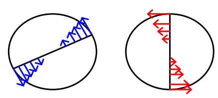
Et $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_r + \vec{\Omega}_e = \dot{\theta}\vec{u}_z + \vec{0}$

Donc $\dot{x}\vec{u}_x = -R\dot{\theta}\vec{u}_x$, soit $\boxed{\dot{x} = -R\dot{\theta}}$.

Ou en intégrant : $\Delta x = -R\Delta\theta$.

- Allure des champs de vitesse

\- $\vec{v}_r$ (on suppose $\dot{\theta} > 0$)

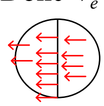


\- $\vec{v}_e$ est uniforme (translation).

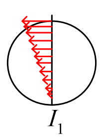
$\vec{v}_a(I_1) = \vec{0}$

Donc $\vec{v}_r(I_1) + \vec{v}_e = \vec{0}$

Donc $\vec{v}_e = -\vec{v}_r(I_1)$:

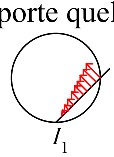


\- $\vec{v}_a$:

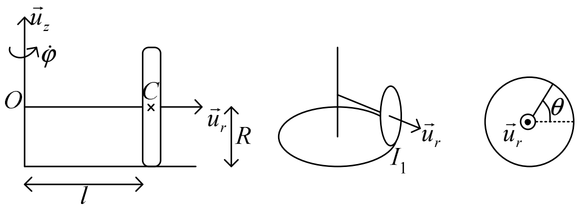


On obtient ainsi le champ de vitesse d'une rotation (c'est-à-dire d'un mouvement hélicoïdal sans translation) autour de I_1.

I_1 s'appelle le centre instantané de rotation. On peut ainsi obtenir $\vec{v}_a$ en n'importe quel point.



2) Exemple 2



- Dans le cas général, φ et θ peuvent varier indépendamment.
- Condition de roulement sans glissement :

$\vec{v}_a(I_1)=\vec{0}$.

On a de plus $\vec{v}_a(O)=\vec{0}$.

Donc $\vec{0}=\vec{0}+\overrightarrow{I_1O}\wedge\vec{\Omega}_a$.

On a $\overrightarrow{I_1O}=R\vec{u}_z-l\vec{u}_r$.

On note $R'=(C,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$. Ainsi, le mouvement de la roue dans *R'* est un mouvement de rotation autour de l'axe $(C,\vec{u}_r)$.

Donc $\vec{\Omega}_r=\dot{\theta}.\vec{u}_r$, et on a $\vec{\Omega}_e=\dot{\varphi}.\vec{u}_z$ (le mouvement de *R'* est un mouvement de rotation)

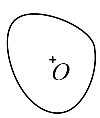
Donc $\vec{0}=(R\vec{u}_z-l\vec{u}_r)\wedge(\dot{\theta}.\vec{u}_r+\dot{\varphi}.\vec{u}_z)$, d'où $R\dot{\theta}=-l\dot{\varphi}$.

L'axe $\overrightarrow{OI_1}$ s'appelle l'axe instantané de rotation (*O* et I_1 sont fixes)

(Le mouvement correspond à celui d'un mouvement hélicoïdal sans translation autour de $\overrightarrow{OI_1}$)

V Complément

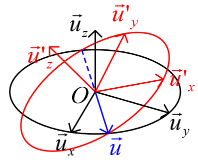
A) Mouvement d'un solide autour d'un point fixe



On suppose *O* fixe dans *R*. Il faut donc trois paramètres pour déterminer le mouvement du solide *S*.

1) Angles d'Euler

On considère deux trièdres orthonormés directs, $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ lié à *R* et $(O,\vec{u}'_x,\vec{u}'_y,\vec{u}'_z)$ lié à *S*.



(En astronomie, l'axe $(O,\vec{u})$ s'appelle l'axe des nœuds)

Comme $\vec{u}$ est dans chacun des deux disques, on a $\vec{u} \perp \vec{u}_z$ et $\vec{u} \perp \vec{u}'_z$.

- Précession ψ :

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) \xrightarrow[\psi, \vec{u}_z]{} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_z)$.

$\psi = (\vec{u}_x \hat{,} \vec{u})$

- Nutation θ :

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_z) \xrightarrow[\theta, \vec{u}]{} (\vec{u}, \vec{v}', \vec{u}'_z)$

$\theta = (\vec{u}_z \hat{,} \vec{u}'_z)$ (ainsi, $\vec{u}_z$ et $\vec{u}'_z$ coïncident)

- Rotation propre φ :

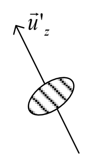
$(\vec{u}, \vec{v}', \vec{u}'_z) \xrightarrow[\varphi, \vec{u}'_z]{} (\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$

$\varphi = (\vec{u} \hat{,} \vec{u}'_x) = (\vec{v} \hat{,} \vec{u}'_z)$.

2) Vecteur instantané de rotation

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}.\vec{u}_z + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{u}'_z$$

3) Mouvement d'une toupie



Si on maintient l'axe de la toupie, seul φ varie, et on a une rotation propre.

Si on ne maintient plus l'axe, l'axe va décrire un cône, et on a donc un mouvement de précession ; dans ce mouvement, c'est ψ qui varie (d'où son nom)

Lorsqu'on donne un coup sur l'axe, l'angle de l'axe s'ouvre et se referme en oscillant, et θ varie, d'où le nom de nutation (« nutare » : dire bonjour en saluant)