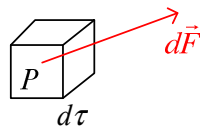


Chapitre 6 : Action exercée sur un système matériel

I Torseur des actions

A) Répartition à densité volumique de forces

1) Définition



$$d\vec{F} \neq \vec{0}, d\vec{M}(P) = \vec{0}.$$

2) Densité volumique de force

$$d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau$$

Exemple :

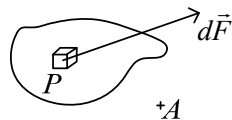
$$d\vec{F} = dm \cdot \vec{g} = \rho \vec{g} \cdot d\tau$$

$$d\vec{F} = dq \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\tau.$$

3) Résultante

$$\vec{F} = \iiint \vec{f}_v d\tau$$

4) Moment en A.



$$d\vec{M}(A) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_v d\tau. \text{ Donc } \vec{M}(A) = \iiint \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_v d\tau$$

B) Répartition à densité volumique de couple

1) Définition

$$\forall d\tau, d\vec{F} = \vec{0}, d\vec{M} \neq \vec{0}$$

2) Densité volumique de moment de couple

$$d\vec{M} = \vec{M}_v d\tau.$$

Exemple :

$$d\vec{\mu} = \vec{M} d\tau \quad (\vec{M} : \text{vecteur aimantation})$$

Pour $d\vec{\mu}$ dans \vec{B} uniforme :

$$d\vec{F} = \vec{0}, \text{ et } d\vec{M} = d\vec{\mu} \wedge \vec{B} = \underbrace{\vec{M}}_{\vec{M}_v} \wedge \vec{B} d\tau.$$

3) Résultante

$$\vec{F} = \iiint d\vec{F} = \vec{0}$$

4) Moment

$$\vec{M} = \iiint \vec{M}_v d\tau \quad (\text{indépendant du point car } \vec{F} = \vec{0})$$

C) Cas général

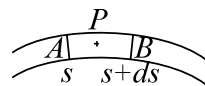
1) Eléments de réduction

On peut décomposer le torseur d'un élément de volume en une somme d'un glisseur $\begin{cases} d\vec{F} \neq \vec{0} \\ d\vec{M}(P) = \vec{0} \end{cases}$ et d'un couple $\begin{cases} d\vec{F} = \vec{0} \\ d\vec{M} \end{cases}$.

2) Moment

$$\vec{M}(A) = \iiint \vec{M}_v d\tau + \iiint \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_v d\tau$$

3) Exemple : tige fléchie



• Actions sur l'élément :

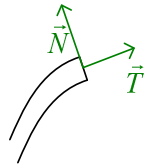
- En B :

Exercé par la partie droite sur l'élément :

$$\vec{R}(s+ds), \quad \vec{M}(B) = \vec{M}_T(s+ds).$$

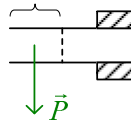
On a donc la somme d'un glisseur \vec{R} appliqué en B et d'un couple $\vec{M} = \vec{M}(B)$.

(i) $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$



\vec{T} correspond aux forces dues à l'étirement.

Pour \vec{N} :



La partie gauche est soumise à son poids, mais ne tombe pas. \vec{N} compense cette force, ce qui correspond à une force de résistance au cisaillement.

(ii) Toutes les fibres n'ont pas la même longueur :



Exercées par l'extérieur sur l'élément

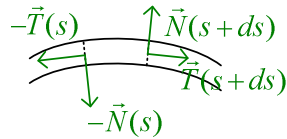
L'une des fibres n'est ni comprimée ni étendue.

Celles qui sont au dessus travaillent en extension, celles qui sont en dessous travaillent en compression.

(Correspond à $\vec{M}_T(s + ds)$)

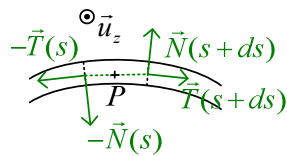
- En A :

Forces exercées par l'élément sur la partie gauche : $-\vec{R}(s), -\vec{M}_T(s)$



• Somme des actions :

$$\vec{R}(s + ds) - \vec{R}(s) = d\vec{R} = d\vec{T} + d\vec{N}$$



Pour le moment en P :

On peut considérer que les droites d'action de $\vec{T}(s + ds)$ et $\vec{T}(s)$ passent par P (à des termes d'ordre 2 près)

Ainsi,

$$d\vec{M}(P) = \vec{M}_T(s + ds) - \vec{M}_T(s) + N(s + ds) \underbrace{\frac{ds}{2}}_{PB} \vec{u}_z + N(s) \underbrace{\frac{ds}{2}}_{PA} \vec{u}_z = \underbrace{d\vec{M}_T}_{\text{torsion}} + \underbrace{N ds \vec{u}_z}_{\text{cisaillement}}$$

II Les quatre interactions fondamentales

A) Interaction gravitationnelle

En mécanique classique, elle s'applique sur les particules de masse non nulle
(En relativité, elle s'applique aussi sur des particules de masse nulle comme les photons)

1) Champ créé par une masse ponctuelle

- Champ :

$$\begin{matrix} P & M \\ \downarrow & \uparrow \\ m & \end{matrix}$$

Une particule de masse m en P crée dans l'espace un champ :

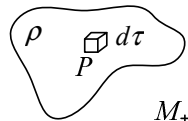
$$\vec{G}(M) = -Gm \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\vec{r} = \overrightarrow{PM}), \text{ où } G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

- Force :

Une particule de masse m' en un point M interagit localement avec \vec{G} et est soumise à une force $\vec{F} = m' \vec{G}(M)$.

Ce n'est pas tout à fait la même chose de dire que les deux particules interagissent entre elles et que la particule m' interagit avec \vec{G} . En particulier si la particule se déplace, il faudrait en fait que l'information du déplacement ait le temps d'arriver.

2) Champ créé par une répartition volumique de masse



- Postulat d'additivité :

$$\vec{G}(M) = \iiint -G\rho d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Propriétés (pour un champ de la forme $\iiint f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau$ en général)

- Circulation conservative :

$$(i) \oint \vec{G}(M) \cdot d\vec{l} = 0$$

$$(ii) \exists V, \vec{G} = -\vec{\nabla} V$$

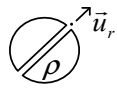
$$(iii) \vec{\nabla} \wedge \vec{G} = \vec{0}$$

- Flux non conservatif :

$$(i) \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi G\rho$$

$$(ii) \text{ Théorème de Gauss : } \oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \iiint \rho d\tau$$

- Application :



On creuse un tunnel passant par le centre de la Terre, on lâche un objet en haut. Relation fondamentale de la dynamique : $m\ddot{r} = G(M).m$.

Or, d'après le théorème de Gauss, $G(M) \times 4\pi.r^2 = -4\pi G. \frac{4}{3}\pi.r^3\rho$

Donc $G(M) = -G.\frac{4}{3}\pi.r\rho$, d'où $\ddot{r} + \frac{4}{3}\pi.r.G\rho = 0$. On a donc un mouvement oscillatoire.

- Résultante des forces entre deux sphères homogènes :



1', m_1 •

• 2', m_2

On a $[\vec{F}_{1 \rightarrow 2}] = [\vec{F}_{1' \rightarrow 2}] = -[\vec{F}_{2 \rightarrow 1}] = -[\vec{F}_{2' \rightarrow 1'}] = [\vec{F}_{1' \rightarrow 2'}]$

B) Interaction électromagnétique

- (1) C'est une interaction entre particules chargées
- (2) – Equations de Maxwell (déterminant le champ électromagnétique)
 - Force de Lorentz (détermine le mouvement des charges)

C) Interaction forte

- (1) C'est une interaction entre hadrons (mésons + baryons)
- (2) Permet la cohésion des noyaux
- (3) Interaction à très courte portée $\sim 1,5F$ ($1F_{\text{Fermi}} = 10^{-15} \text{ m}$)

D) Interaction faible

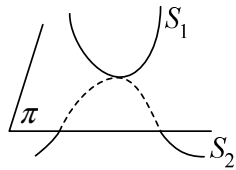
- (1) C'est une interaction entre leptons (électrons, tauons, muons + neutrinos)
- (2) Elle intervient dans la radioactivité β
- (3) Portée : $10^{-2}F$
- (4) Beaucoup moins importante que l'interaction forte (10^{-14})

E) Unification des interactions

- (1) Théorie électrofaible : unification des interactions électromagnétiques et faible (Salam–Weinberg)
- (2) Modèle standard : interaction électrofaible et forte (actuel)
- (3) Théorie ultime : intégrerait en plus la gravitation.

III Actions de contact entre deux solides

A) Modélisation des actions de contact



On suppose les solides réels, mais que la surface de contact est suffisamment petite pour considérer que c'est un point et pour définir un plan tangent.

On étudie ici les actions de S_2 sur S_1 .

1) Observations expérimentales

- Résistance au mouvement :

- A l'interpénétration :



- Au glissement :



- Au roulement :



- Au pivotement :



Les deux premiers correspondent à des résistances à la translation (normale et tangentielle), et les deux derniers à une résistance à la rotation (normale et tangentielle)

- Influence de la surface de contact :

Pour la translation, la surface de contact n'a pas d'influence.

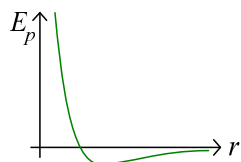
Pour la rotation, plus la surface est petite, plus la résistance est faible.

- Aspect énergétique : dissipation d'énergie sous forme d'énergie thermique.

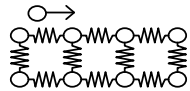
2) Analyse microscopique

- Origine des résistances :

Vient des interactions entre les couches électroniques des atomes (forces de Coulomb/de Van der Waals) :



- Modèle de la dissipation d'énergie :

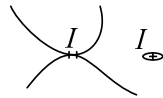


L'atome qui se déplace en haut va pousser celui du bas jusqu'à ce que le ressort lâche ; tous les ressorts se mettent alors à vibrer et les vibrations se transmettent à l'intérieur du matériau.

- Impossibilité du traitement microscopique : trop d'atomes à traiter.

3) Torseur des actions de contact

- Contact entre solides réels :

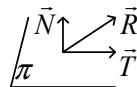


Torseur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(I) \end{array} \right\}, \text{ décomposé en un glisseur } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \text{appliqué en } I \end{array} \right\} \text{ et un couple } \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{M} = \vec{M}(I) \end{array} \right\}$$

- Résultante \vec{R} :

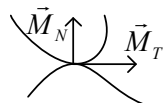
$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$



\vec{N} : résistance à l'interpénétration

\vec{T} : résistance au glissement.

- Moment $\vec{M}(I)$:



\vec{M}_N : résistance au pivotement

\vec{M}_T : résistance au roulement

- Contact entre solides idéaux :

On admet que $\vec{M}(I) = \vec{0}$; il n'y a donc pas de résistance au pivotement ou au roulement.

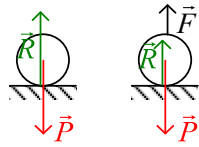
4) Les actions de contact entre solides ne sont pas des forces données

- Définition d'une force donnée :

C'est une force qui peut être calculée à partir de la position et de la vitesse du solide à un instant t .

Exemple : la gravitation, force de frottement fluide $\vec{f} = -f \cdot \vec{v}$

- Cas des forces de contact entre solides :

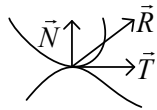


Dans les deux cas, la boule a la même position et la même vitesse, mais \vec{R} est différent.

Remarque :

On a dû utiliser le principe fondamental de la dynamique pour calculer \vec{R} , d'où le nom de force non donnée : on est obligé de connaître les autres forces pour la trouver.

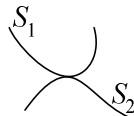
B) Résistance au glissement



1) Loi d'Amontons : influence de la surface de contact

L'aire de la surface de contact n'a d'influence ni sur \vec{T} ni sur \vec{N} .

2) 1^{ère} loi de Coulomb : condition de contact



- Quand S_1 est simplement posé (pas collé) sur S_2 , \vec{N} est dirigé de 2 vers 1. (Rappel : on étudie les actions de S_2 sur S_1)
- Rupture de contact : $\vec{N} = \vec{0}$

3) 2^{ème} loi de Coulomb : glissement de S_1 sur S_2 .

Rappel :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_r(I_1) = \vec{v}_a(I_1) - \vec{v}_a(I_2).$$

Si $\vec{v}_G \neq \vec{0}$, alors \vec{T} est colinéaire à \vec{v}_G de sens contraire, et $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$.

Discussion :

1^{er} point : on dit que le mouvement polarise la composante tangentielle

2^{ème} point : plus N est important, plus T l'est ; aussi satisfaisant (si une table est plus lourde, on aura un N plus grand, et il y aura une plus grande résistance au mouvement)

f : coefficient de frottement dynamique.

Ordres de grandeur :

Chêne–chêne : $f \approx 0,4$

Chêne–chêne savonné : $f \approx 0,2$

Disque–plaquette : $f \approx 0,35$

Fonte–fonte graissée : $f \approx 0,05$

fonte–fonte : $f \approx 0,15$

En général, $f < 1$.

4) 3^{ème} loi de Coulomb : loi du non glissement

Si $\vec{v}_G = \vec{0}$ (statique/roulement sans glissement/pivotement)

• \vec{T} peut avoir une direction quelconque dans le plan tangent.
(Les autres forces polarisent l'action tangentielle)

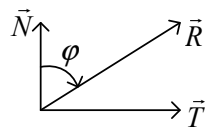
• $\|\vec{T}\| \leq f_0 \|\vec{N}\|$

- f_0 : coefficient de frottement statique

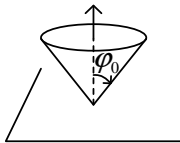
- $f_0 > f$

- Quand $T = f_0 N$, le glissement commence.

- On pose $f_0 = \tan \varphi_0$:

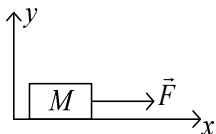


On a $\tan \varphi = \frac{T}{N}$, et la loi de Coulomb s'écrit ainsi $\varphi \leq \varphi_0$.



\vec{R} doit être dans le cône pour qu'il n'y ait pas de mouvement (cône de frottement)

5) Exemple



$$\vec{F} = F \vec{u}_x$$

On considère que le contact est ponctuel (voir plus tard pour la justification)

A $t = 0$, $F = 0$, et F augmente.

On veut calculer T en fonction de F .

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $M\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}$ (pour un mouvement de translation, l'accélération ne dépend pas du point du solide)

- Phase 1 : le solide ne se déplace pas.

On a donc $\vec{a} = \vec{0}$, soit $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, donc
$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ F + \bar{T} = 0 \end{cases}$$

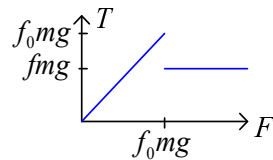
Soit
$$\begin{cases} N = mg \\ \bar{T} = -F \end{cases}$$
, tant que $\vec{v}_G = \vec{0}$, c'est-à-dire tant que $T \leq f_0 N$ ou $F \leq f_0 mg$.

- Phase 2 : glissement.

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$. Comme $\dot{x} > 0$, on a $\bar{T} < 0$, et
$$\begin{cases} N = mg \\ m\ddot{x} = F + \bar{T} \end{cases}$$

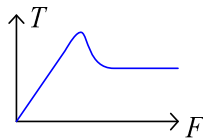
Donc $T = fN = fmg$.

Allure :



- Discussion :

En réalité, on a plutôt une courbe de la forme :



Juste avant que le solide se mette en mouvement, la force tangentielle est plus forte qu'une fois qu'il est en mouvement (ce qu'on observe lorsqu'on veut déplacer un objet lourd, et qu'une fois qu'on a réussi à le mettre en mouvement il « continue tout seul »)

6) Glissement sans frottement

C'est lorsque $f = f_0 = 0$

Ainsi, $\forall \vec{v}_G, \bar{T} = \vec{0}$ donc $\vec{R} = \vec{N}$

Attention :

Ne pas confondre le roulement sans glissement : $\vec{v}_G = \vec{0}$ et le glissement sans frottement : $f = f_0 = 0$.

7) Validité des lois d'Amontons et Coulomb

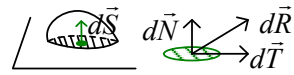
- Ce sont des lois empiriques
- Il y a des écarts par rapport à ces lois.
- Pour les lois de Coulomb : correspondent à un DL du premier ordre :

On sait que $T = \varphi(N)$ (plus la force normale est importante, plus il est difficile de déplacer l'objet), et pour $N = 0$ on a $T = 0$, donc le DL à l'ordre 0 donne 0, d'où la loi $T = fN$

- f et f_0 dépendent de N et de \vec{v}_G (pour f)

C) Contact non ponctuel

1) Lois de Coulomb



$$d\vec{R} = \vec{r}_s dS = \vec{t}_s dS + \vec{n}_s dS$$

On admet qu'on peut appliquer les lois de Coulomb à $\vec{t}_s dS$ et $\vec{n}_s dS$, c'est-à-dire à \vec{t}_s et \vec{n}_s .

2) Contact plan sur plan

- Description :



On a trois degrés de liberté de S_1 par rapport à S_2 : deux degrés de translation, et un de rotation.

- Si c'est uniquement une translation (comme dans la brique précédemment) :

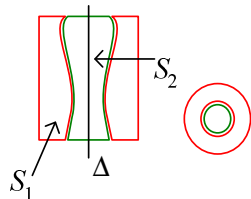
$$\vec{v}_G \text{ est uniforme, et } \vec{T} = \iint \vec{t}_s dS, \vec{N} = \iint \vec{n}_s dS.$$

On peut ainsi appliquer les lois de Coulomb à \vec{T} et \vec{N} .

3) Articulation rotoïde

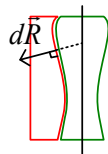
- Définition :

La surface de contact présente une symétrie de révolution par rapport à un axe Δ :



S_1 n'a qu'un degré de liberté par rapport à S_2 .

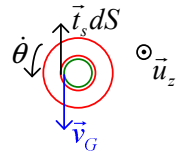
- Actions de contact
- Glissement sans frottements :



La droite d'action de $d\vec{R}$ coupe Δ (car $\vec{t}_s = \vec{0}$).

Donc $dM_\Delta = 0$, d'où $M_\Delta = 0$.

- Glissement avec frottements :

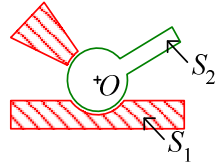


dM_{Δ} est de signe opposé à $\dot{\theta}$, donc $M_{\Delta}\dot{\theta} < 0$.

4) Articulation sphérique

- Description :

La surface de contact est une portion de sphère :

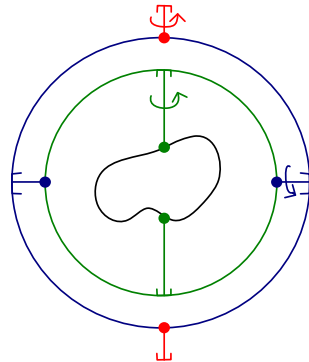


On a trois degrés de liberté (rotation propre, nutation, précession)

- Glissement sans frottement :

$d\vec{M}(O) = \vec{0}$, donc $\vec{M}(O) = \vec{0}$.

- Articulation à la Cardan :

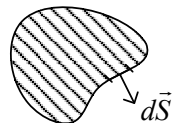


Le solide peut alors avoir trois degrés de liberté de rotation

IV Autres types de force de contact

A) Contact solide–fluide

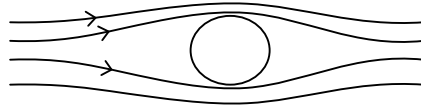
1) Solide au repos



$$d\vec{F} = -Pd\vec{S}$$

2) Solide en mouvement de translation

- Faibles vitesses ($< 1\text{m.s}^{-1}$) : écoulement laminaire



(les lignes de courant sont stationnaires)

$\vec{F} = -f \cdot \vec{v}$; f dépend de la viscosité du fluide et de la forme du solide.

Loi de Stokes :

Pour une boule de rayon R , $\vec{F} = -6\pi\eta.R.\vec{v}$.

η : viscosité dynamique du fluide.

- Vitesses « moyennes » ($1\text{m.s}^{-1} < v < 200\text{m.s}^{-1}$) : écoulement turbulent

$\vec{F} = -\lambda.v.\vec{v}$

$$\lambda = \frac{1}{2}c.\rho.S$$

ρ : masse volumique du fluide

S : maître-couple ; surface projetée du solide sur un plan orthogonal au mouvement

c : facteur de forme (~ 1), dépend de la forme du solide.

B) Actions de contact élastiques

1) Fil de torsion



On décompose le torseur des actions en un glisseur \vec{R} appliqué en A et un couple \vec{M} ($= \vec{M}(A)$) (\vec{M} : moment de torsion)

- $\vec{M} = M_{\Delta}\vec{u}_z$ (\vec{u}_z : axe du fil)

$$M_{\Delta} = -C.(\theta - \theta_0)$$

θ_0 : valeur de θ lorsque le fil n'est pas tordu.

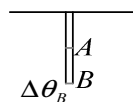
C : constante de torsion.

C 'est une loi empirique, algébrique et le signe $-$ indique qu'il s'agit d'un moment de rappel : le fil s'oppose à la torsion.

- C dépend du fil, de sa section et de sa longueur :

$$C = \frac{\chi}{l} \quad \left| \begin{array}{l} l \\ C \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} l/2 \\ 2C \end{array} \right|$$

En fait, on a $C = \frac{\chi}{l}$. En effet :



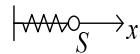
La partie en A tourne de $\Delta\theta_A = \frac{1}{2}\Delta\theta_B$

La partie au dessus de A exerce sur AB un moment de torsion $M_{\Delta A}$.

Le fil exerce sur l'opérateur (ou le solide) un moment de torsion $M_{\Delta B}$, donc l'opérateur exerce sur AB un moment de torsion $-M_{\Delta B}$ (principe d'action et de la réaction). Ainsi, comme on est à l'équilibre, $M_{\Delta A} - M_{\Delta B} = 0$ (Rq : le moment de torsion est donc le même dans tout le fil)

Donc $-C_A\Delta\theta_A = -C_B\Delta\theta_B$, soit $C_A = 2C_B$.

2) Ressort linéaire



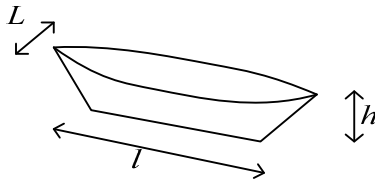
$$\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{u}_x \quad (x_0 : \text{longueur du ressort lorsqu'il n'est pas étiré})$$

C'est aussi une loi algébrique, et correspond à une force de rappel.

Ici, k est aussi inversement proportionnel à x_0 .

V Complément

A) Vitesse d'un canot



Expérimentalement, les canots de différentes tailles sont homothétiques l'un de l'autre : $L = \lambda.L_0$, $l = \lambda.l_0$, $h = \lambda.h_0$.

Pour n rameurs, on cherche la vitesse qu'on peut atteindre :

On considère que chaque rameur peut fournir une puissance P_0 . Pour n rameurs, on peut donc avoir une puissance nP_0 , qui va contre la puissance résistante $P_r = nP_0$ (on suppose que le canot a atteint sa vitesse de croisière)

On a d'autre part une puissance résistante $P_r = F_r \times v = \frac{1}{2}c.\rho.S \times v^3$ (on suppose que $v > 1\text{m.s}^{-1}$), avec $S \propto \lambda^2$.

Enfoncement de la barque dans l'eau :

On néglige le poids de la barque devant celui des rameurs (qui ont tous une même masse)

Ainsi, $V_{\text{immergé}} \propto n$ d'une part, et $V_{\text{immergé}} \propto \lambda^3$ d'autre part. Donc $n \propto \lambda^3$

Comme enfin $nP_0 = \frac{1}{2}c.\rho.S \times v^3$, on obtient $n \propto n^{2/3}v^3$, ou $v \propto n^{1/9}$

Expérimentalement, en traçant $\ln v$ en fonction de $\ln n$, on trouve quasiment une droite de pente proche de $1/9$, donc le modèle est correct.