Chapitre 7 : Le principe fondamental de la dynamique

I Principe fondamental (PFD)

A) Enoncé

Il existe un référentiel d'espace, dit référentiel galiléen, et un référentiel de temps, dit temps absolu, dans lequel le torseur de *tout système matériel* est égal au torseur des actions *extérieures* appliquées à ce système :

$[m\vec{a}]=[\vec{F}_{\text{ext}}]$.

Ainsi, $\vec{D}=\vec{F}_{\text{ext}}$ et $\vec{K}(A)=\vec{M}(A),\forall A$.

Remarques :

- Cet énoncé contient les trois lois de Newton
- Quand le système est un point matériel, on obtient deux équations vectorielles, qui sont alors équivalentes.

B) Référentiel galiléen (ou référentiel d'inertie)

1) Relativité galiléenne

- On considère un référentiel R galiléen, absolu, et un référentiel R', relatif, en translation rectiligne uniforme par rapport à R :

$\vec{a}_r=\vec{a}_a$, donc $[m\vec{a}_r]=[m\vec{a}_a]$

Or, $[\vec{F}_{\text{ext}}]=[m\vec{a}_a]$, donc $[m\vec{a}_r]=[\vec{F}_{\text{ext}}]$, donc R' est galiléen.

- Réciproquement, on peut montrer que si R est galiléen et R' aussi, alors R est en translation rectiligne uniforme par rapport à R'.

2) Recherche d'un référentiel galiléen

C'est une recherche empirique :

On fait des manipulations, observations. Si elles correspondent aux calculs faits, on peut considérer que le référentiel est galiléen (dépend de la précision possible des mesures).

- Référentiel de Copernic :

Repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

O : centre d'inertie du système solaire.

$\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$: vecteurs fixes par rapport à certaines étoiles.

- Référentiel géocentrique :

O : centre de la Terre

$\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$: fixes par rapport aux mêmes étoiles (Ainsi, le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic).

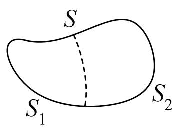
- Référentiel du laboratoire.

O : à la surface terrestre.

$\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$: liés à la Terre.

II Théorème de l'action et de la réaction

A) Enoncé et démonstration



$S:[m\vec{a}]=[\vec{F}_{\text{ext}}]$

$S_1:[m_1\vec{a}_1]=[\vec{F}_{\text{ext}\to 1}]+[\vec{F}_{2\to 1}]$

$S_2:[m_2\vec{a}_2]=[\vec{F}_{\text{ext}\to 2}]+[\vec{F}_{1\to 2}]$

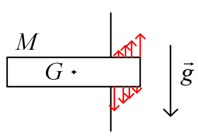
En sommant les deux dernières égalités, on obtient :

$[m\vec{a}]=[\vec{F}_{\text{ext}}]+[\vec{F}_{1\to 2}]+[\vec{F}_{2\to 1}]$

Ainsi, $\boxed{[\vec{F}_{1\to 2}]=-[\vec{F}_{2\to 1}]}$, c'est-à-dire $\vec{F}_{1\to 2}=-\vec{F}_{2\to 1}$ et $\vec{M}_{1\to 2}=-\vec{M}_{2\to 1}$.

(Le théorème est faux en relativité)

B) Application



↑ : Actions de la poutre sur le mur : compliqué à calculer.

On peut chercher à étudier les actions du mur sur la poutre ?

Torseur dynamique : nul car la poutre ne bouge pas.

Ce torseur est aussi égal à la somme du poids de la poutre (glisseur passant par G) et de l'action du mur sur la poutre.

Ainsi, l'action du mur compense le poids, et c'est donc aussi un glisseur.

III Théorème de la résultante dynamique (TRD)

A) Enoncé

$$\left.\begin{array}{r}\vec{D}=\vec{F}_{\text{ext}}\\ \vec{D}=M\vec{a}(G)\end{array}\right\}\text{Donc } \boxed{M\vec{a}(G)=\vec{F}_{\text{ext}}}.$$

B) Interprétation

Le mouvement du centre d'inertie ne dépend que des actions extérieures

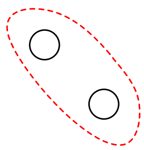
C) Exemples

- Plongeur :

Quand un plongeur quitte le plongeoir, on a $M\vec{a}(G) = M\vec{g}$, soit $\vec{a}(G) = \vec{g}$.

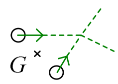
Ainsi, G a une trajectoire parabolique (quoi que fasse le plongeur, à partir du moment où on peut négliger les frottements de l'air)

- Deux mobiles autoporteurs :



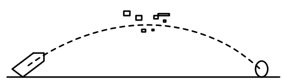
L'ensemble des deux autoporteurs est isolé.

On les envoie l'un sur l'autre :



Le mouvement de G ne sera pas perturbé par le choc.

- Obus :



On vise la cible avec l'obus, mais l'obus éclate arrivé en haut…

Si les éclats d'obus n'arrivent pas à terre, le centre d'inertie des éclats d'obus touchera quand même la cible.

IV Théorème de la résultante cinétique (TRC)

A) Enoncé, démonstration

On a $\vec{D} = \vec{F}_{\text{ext}}$

De plus, pour un système fermé, $\vec{D} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$.

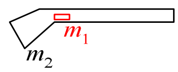
Ainsi, $\boxed{\textit{pour un système fermé, } \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}}$.

B) Intégrale première du mouvement

Dans le cas où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, on a $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$, donc $\vec{P} = \overrightarrow{\text{cte}}$: intégrale première du mouvement (c'est-à-dire qu'au lieu d'une équation différentielle du deuxième ordre du mouvement, on a pu intégrer une première fois et obtenir une équation différentielle du premier ordre)

C) Application

1) Recul d'un fusil



Système : balle + fusil

Le système est pseudo-isolé : le poids est compensé.

Ainsi, $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, donc $\vec{P} = \overrightarrow{\text{cte}} = \vec{0}$ (initialement)

Donc $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ ($\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$)

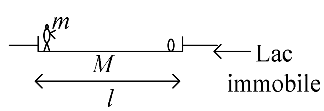
Donc $\vec{v}_2 = \frac{-m_1}{m_2}\vec{v}_1$.

La quantité de mouvement est égale (en module) pour chacune des deux masses.

Or, $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{P^2}{m}$.

Donc $\frac{E_{C_1}}{E_{C_2}} = \frac{m_2}{m_1}$. L'énergie cinétique est donc plus importante dans la balle.

2) Homme dans une barque



L'homme va chercher son sac de l'autre côté de la barque.

De quelle distance se déplace t'il par rapport à la rive ?

- Analyse :

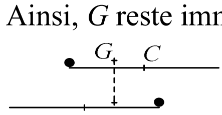
L'homme exerce une action sur la barque (pour avancer) ; il pousse donc la barque qui va se déplacer vers l'arrière (force de contact).

- Hypothèses :
  - barque + homme : pseudo-isolé (la réaction du lac sur la barque compense le poids)

Théorème de la résultante cinétique appliquée au système barque + homme :

$\vec{P} = \overrightarrow{\text{cte}}$, soit $(m+M)\vec{v}(G) = \overrightarrow{\text{cte}} = \vec{0}$

Ainsi, G reste immobile pendant la traversée.



La distance parcourue par rapport à la rive est donc de $2Gm$.

Donc $m \times \frac{d}{2} = M\left(\frac{l}{2} - \frac{d}{2}\right)$, soit $d = l \times \frac{M}{M+m}$

Le résultat est satisfaisant : si l'homme se déplace sur un gros bateau, sa distance parcourue par rapport à la rive sera quasiment celle qu'il parcourt par rapport au bateau, et vice-versa.

- On suppose qu'il y a en plus une force de frottement fluide $-f\vec{v}$ ($\vec{v}$: vitesse de la barque)

D'après le théorème de la résultante dynamique,
$(m+M)\vec{a}(G) = -f\vec{v}$.

Donc $(m+M)\int_0^{+\infty} \vec{a}(G)dt = -f\int_0^{+\infty} \vec{v}dt$

Soit $(m+M)(\vec{v}_G(t=+\infty) - \vec{v}_G(t=0)) = -f\Delta\vec{r}$

($\Delta\vec{r}$: déplacement de la barque)

Or, $\vec{v}_G(t=0) = \vec{0}$, et $\vec{v}_G(t=+\infty) = \vec{0}$ car si G atteignait une vitesse non nulle au bout d'un temps infini, le déplacement $\Delta\vec{r}$ serait infini, ce qui n'est pas possible avec la formule.

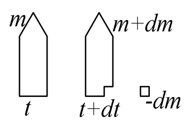
Ainsi, $\Delta\vec{r} = \vec{0}$. C ne se déplace donc pas entre l'état initial et l'état final.

3) Mouvement d'une fusée

On note D_m le débit massique d'éjection des gaz, $\vec{u}$ la vitesse d'éjection (par rapport à la fusée).

m, $\vec{v}$ dépendent de t, et $m(t) = m_0 - D_m t$.

- Système : matière contenue dans la fusée à l'instant t :



- Référentiel terrestre, galiléen
- Actions extérieures : poids, $m\vec{g}$.
- Théorème de la résultante dynamique :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{g}.$$

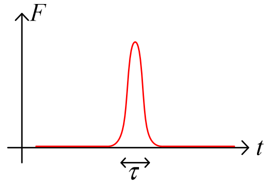
$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + (-dm)(\vec{u}+\vec{v}+d\vec{v}) - m\vec{v}$$
$$= md\vec{v} - dm.\vec{u}$$

Donc $m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u} = m\vec{g}$, soit $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - D_m\vec{u}$.

$\vec{F} = -D_m\vec{u}$: force de poussée.

4) Chocs

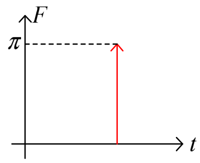
- Aspect dynamique :
  - Définition : on dit qu'un point matériel/solide subit un choc lorsqu'il subit une action très intense (par rapport aux autres forces) sur un intervalle de temps très bref (devant les autres temps caractéristiques)



- Modélisation :

Par un Dirac :

On pose $\boxed{\vec{\pi} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F} dt}$: percussion du choc. (t_0 : début du choc)



- Aspect cinématique :

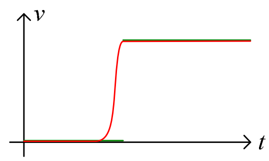
Théorème de la résultante cinétique :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Donc par intégration $m\int_{t_0}^{t_0+\tau} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F} dt$

Ainsi, $\boxed{m(\vec{v}(t_0+\tau) - \vec{v}(t_0)) = \vec{\pi}}$

On a donc une discontinuité de la vitesse (avec la modélisation en Dirac) :



- Variation de quantité de mouvement au cours d'un choc :
  - S_1 :

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{\text{ext}\to1}.$$

Donc $\vec{P}'_1 - \vec{P}_1 = \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}_{2\to1} dt}_{\vec{\pi}_{2\to1}} + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}_{\text{ext}\to1} dt$.

On suppose qu'on peut négliger $\int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}_{\text{ext}\to1} dt$ devant $\vec{\pi}_{2\to1}$.

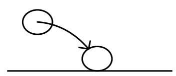
Ainsi, $\vec{P}'_1 - \vec{P}_1 = \vec{\pi}_{2\to1}$

  - De même pour S_2, $\vec{P}'_2 - \vec{P}_2 = \vec{\pi}_{1\to2}$
  - Pour les deux ensemble, $\vec{P}' - \vec{P} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}_{\text{ext}} dt = \vec{0}$

Ainsi, $\boxed{\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2}$.

Attention, il faut pouvoir négliger la percussion de $\vec{F}_{\text{ext}}$, ce qui n'est pas toujours le cas :

On lance une boule de pétanque sur une autre



Il va y avoir un choc entre les deux boules, mais le sol va *aussi* réagir en percutant la boule qui est à terre.

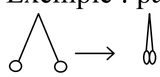
- Conservation de l'énergie :
  - Cas général :

Pour le système $\{1+2\}$: $\Delta E = \int_{\text{choc}} P_{\text{ext}} dt = \underbrace{P_{\text{ext}}}_{\text{finie}} \tau = 0$

Or, $\Delta E = \Delta E_{C,\text{macro}} + \Delta E_P + \Delta U$, et $\Delta E_P = 0$ (les boules ne se déplacent pas pendant le choc)

Donc $\boxed{\Delta E_{C,\text{macro}} + \Delta U = 0}$

Exemple : pâte à modeler :



→ vitesse nulle après le choc.

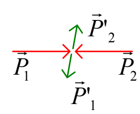
$2 \times \underbrace{(-\frac{1}{2} m v_0^2)}_{=\Delta E_{C_1} = \Delta E_{C_2}} + \Delta U = 0$ (v_0 : vitesse juste avant le choc)

- Choc élastique :

Définition : c'est un choc pour lequel $\Delta E_{C,\text{macro}} = 0$ (pas de dissipation d'énergie)

- Dans le référentiel barycentrique :
  - Cas général (pour deux points matériels)

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$, $\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = \vec{0}$



- Pour un choc élastique :

On a de plus $\|\vec{P}_1\| = \|\vec{P}_2\| = \|\vec{P}'_1\| = \|\vec{P}'_2\|$

On a ainsi une rotation des quantités de mouvement.

V Les théorèmes du moment cinétique

A) Enoncé

1) Théorème du moment cinétique par rapport à un point

- Expression générale :

Principe fondamental de la dynamique :

$\vec{K}(A) = \vec{M}(A), \forall A$

$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{K}(A) + M\vec{v}(G) \wedge \vec{v}(A)$

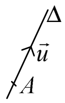
Donc $\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{M}(A) + M\vec{v}(G) \wedge \vec{v}(A) \text{ (quel que soit le point } A)}$

- Cas particulier :

Si on choisit le point A fixe ou si on prend G :

$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{M}(A)}$.

2) Théorème du moment cinétique par rapport à un axe de direction fixe



$\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\vec{0}$

Principe fondamental de la dynamique : $K_\Delta = M_\Delta, \forall \Delta$

Si $\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\vec{0}$, $\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} = K_\Delta + (M\vec{v}(G)\wedge\vec{v}(A))\cdot\vec{u}$

Donc $\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta + (M\vec{v}(G)\wedge\vec{v}(A))\cdot\vec{u}$

Cas particulier :

Si Δ est fixe ($\vec{v}(A)=\vec{0}$) ou de direction fixe passant par G ($A\equiv G$) :

$$\boxed{\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta}$$

B) Intégrale première du mouvement

- Si $\vec{M}(A)=\vec{0}$, alors $\dfrac{d\vec{\sigma}(A)}{dt}=\vec{0}$, soit $\vec{\sigma}(A)=\overrightarrow{\text{cte}}$
- Si $M_\Delta = 0$, alors $\sigma_\Delta = \text{cte}$

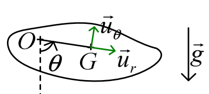
C) Cas particulier : solide en rotation autour d'un axe fixe ou de direction fixe passant par *G*.

(fixe dans le référentiel galiléen ou fixe passant par G dans le référentiel barycentrique). D'après le théorème du moment cinétique, on a :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\sigma_\Delta}{dt} &= M_\Delta\\ \sigma_\Delta &= J_\Delta\dot{\theta}\end{aligned}\right\}\text{ donc } \boxed{J_\Delta\ddot{\theta}=M_\Delta}$$

D) Application

1) Pendule pesant



- Un seul degré de liberté
- Système : {pendule}
- Référentiel du laboratoire, galiléen
- Actions :

Torseur des forces de pesanteur uniforme, glisseur $[\vec{P}]$

Torseur des forces de contact, $[\vec{R}]$.

- Mouvement :

TRD : $m\vec{a}(G)=\vec{P}+\vec{R}$; inutile ici

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ :

$J_\Delta\ddot{\theta} = M_{\vec{P}} + M_{\vec{R}}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements, ainsi $M_{\vec{R}} = 0$

De plus, $\left|M_{\vec{P}}\right| = mg\ \underbrace{l\left|\sin\theta\right|}_{\text{bras de levier}}$. Donc $M_{\vec{P}} = -mgl\sin\theta$.

Ainsi, l'équation différentielle du mouvement est $J_\Delta\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

Si θ reste petit : $\sin\theta \approx \theta$

$\ddot{\theta} + \dfrac{mgl}{J_\Delta}\theta = 0$, donc $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = \sqrt{\dfrac{mgl}{J_\Delta}}$

- Action de contact :

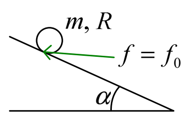
$m\vec{a}(G) = -ml\dot{\theta}^2\vec{u}_r + ml\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta$.

$\vec{P} = mg\cos\theta.\vec{u}_r - mg\sin\theta.\vec{u}_\theta$

$\vec{R} = R_r\vec{u}_r + R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{u}_z$

On peut ainsi calculer R_r, R_θ, R_z ($R_z = 0$)

2) Mouvement d'une boule sur un plan incliné



On pose la boule sans vitesse initiale.

On cherche une condition sur *f* et α de roulement sans glissement.

- Analyse :

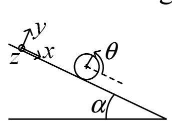
α doit être suffisamment petit, et *f* suffisamment grand. On aura ainsi une condition de la forme $f > \varphi(\alpha)$ où φ est une fonction croissante de α.

Deux conditions de roulement sans glissement :

$\vec{v}_G = \vec{0}$

$\left\|\vec{T}\right\| \le f_0\left\|\vec{N}\right\|$.

- Paramétrage :



$x = x(G)$.

Roulement sans glissement : $\dot{x} = -R\dot{\theta}$.

- Référentiel galiléen
- Actions : $[\vec{P}]$, $[\vec{R}]$ (pas de frottement de roulement/pivotement)
- Principe fondamental de la dynamique :
  - Théorème de la résultante dynamique :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \overline{T} \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

Donc $N = mg\cos\alpha$.

- Théorème du moment cinétique par rapport à Gz :

$$J_\Delta \ddot{\theta} = \underbrace{M_{\vec{P}}}_{=0} + \underbrace{M_{\vec{N}}}_{=0} + M_{\vec{T}} = +\overline{T} \times R$$

Soit $\frac{2}{5} mR^2 \times \frac{-\ddot{x}}{R} = \overline{T} R$, donc $\overline{T} = -\frac{2}{5} m\ddot{x}$

- Ainsi, $\frac{7}{5} m\ddot{x} = mg \sin\alpha$, soit $\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha$

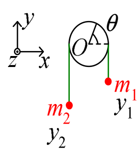
D'où $\overline{T} = -\frac{2}{7} mg \sin\alpha$

La condition s'écrit donc $\frac{2}{7} \sin\alpha < f \cos\alpha$, soit $\boxed{f > \frac{2}{7} \tan\alpha}$.

- On peut montrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

(avec mes conditions initiales)

3) Machine d'Atwood



Poulie : masse M, rayon R, moment d'inertie J_Δ.
Fil : masse négligeable, inextensible, ne glisse pas.
On a :

$\dot{y}_1 = R\dot{\theta}$ (inextensible, pas de glissement)

$\dot{y}_1 = -\dot{y}_2$ (inextensible)

- Système : fil + poulie + les deux masses (le système n'est pas un solide !)
- Référentiel du laboratoire, galiléen.
- $[\vec{P}_1]$, $[\vec{P}_2]$, $[\vec{P}_P]$, $[\vec{R}]$ (réaction de l'axe de rotation de la poulie).
- Théorème du moment cinétique par rapport à $\Delta = Oz$:

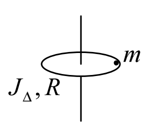
$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta$$

On a $\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta} + m_1 \dot{y}_1 \times R - m_2 \dot{y}_2 \times R = (J_\Delta + m_1 R^2 + m_2 R^2)\dot{\theta}$

Et $M_\Delta = M_{P_1} + M_{P_2} = -m_1 gR + m_2 gR$

Donc $\ddot{\theta} = \frac{(m_2 - m_1)gR}{J_\Delta + m_1 R^2 + m_2 R^2}$, $\ddot{y}_1 = \frac{(m_2 - m_1)gR^2}{J_\Delta + m_1 R^2 + m_2 R^2}$

4) Scarabée sur un plateau

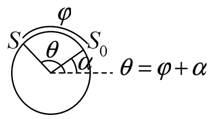


Le plateau peut tourner sans frottements
Le scarabée (m) fait un tour du plateau.

- Analyse :

Le plateau se déplace par réaction au déplacement du scarabée.

- 2 degrés de liberté (cinématiquement) :



- Référentiel terrestre
- Système scarabée + plateau.
- Actions extérieures :

$[\vec{P}_s]$, $[\vec{P}_p]$, $[\vec{R}]$ (réaction de l'axe)

- Théorème du moment cinétique par rapport à Oz :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta = 0$$

Donc $\sigma_\Delta = \text{cte} = 0$

Or, $\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\alpha} + mR\dot{\theta} \times R$

Donc $(J_\Delta + mR^2)\dot{\alpha} + mR^2\dot{\varphi} = 0$, soit $d\alpha = -\dfrac{1}{1+\dfrac{J_\Delta}{mR^2}} d\varphi$

Ainsi, lorsque le scarabée a fait le tour ($\Delta\varphi = 2\pi$) :

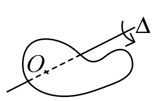
$$\Delta\alpha = -\frac{2\pi}{1+\dfrac{J_\Delta}{mR^2}}$$

- Discussion :

La relation est bien homogène, le signe est satisfaisant, et le rapport $\dfrac{J_\Delta}{mR^2}$ aussi (plus le plateau est lourd, moins il se déplacera)

VI Compléments

A) Equilibrage des pièces tournantes



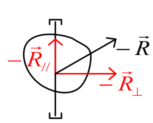
1) Position du problème

Le solide est soumis à $[\vec{R}] : \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{cases}$

Donc par réaction l'axe est soumis à $-[\vec{R}] : \begin{cases} -\vec{R} \\ -\vec{M}(A) \end{cases}$.

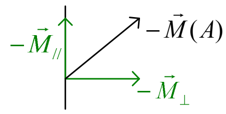
A quelles conditions la tige ne casse t'elle pas ?

$-\vec{R}$:



Il faut ainsi éviter $-\vec{R}_{\perp}$ (L'action longitudinale n'a pas autant d'effet, sauf peut-être l'usure des bords)

$-\vec{M}(A)$:

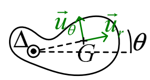


$-\vec{M}_{//}$: torsion de l'axe ; ok : la tige est faite pour ça.

$-\vec{M}_{\perp}$: risque de casser l'axe.

Ainsi, dans les deux cas, on doit faire attention aux composantes orthogonales.

2) Résultante



TRD :

$m\vec{a}(G)=\vec{P}+\vec{R}$, soit $-\vec{R}=\vec{P}-m((-r_G\dot{\theta}^2)\vec{u}_r+r_G\ddot{\theta}\vec{u}_\theta)$.

Pour $\vec{P}$: il suffit d'avoir une tige suffisante (le poids ne change pas)

$-mr_G\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$: il suffit de ne pas accélérer trop brutalement.

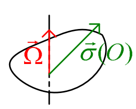
Plus gênant : $mr_G\dot{\theta}^2\vec{u}_r$, qui peut très bien ne pas être majoré.

On peut ainsi faire en sorte d'avoir G sur l'axe (et on retire par la même la composante précédente)

3) Moment

TMC :

$\vec{M}(O)=\dfrac{d\vec{\sigma}(O)}{dt}$ (O est fixe)

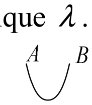


$\vec{\sigma}(O)=J_O(\vec{\Omega})$.

Si par exemple la rotation est uniforme, $\dfrac{d\vec{\sigma}(O)}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\vec{\sigma}(O)$, ce qui peut casser la tige. Il faut que l'axe de rotation soit un axe propre d'inertie.

B) Chaînette

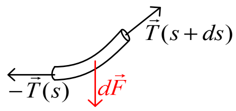
On considère un fil homogène, inextensible, parfaitement flexible, et de masse linéique λ.



1) Equation fondamentale de la statique des fils

Cas général :

Pour un petit élément de fil :



On a $[\vec{R}]=[\vec{T}]$: glisseur tangent au fil (le fil est parfaitement flexible, donc il n'y a pas de moment de torsion ou d'action de cisaillement)

Ainsi, $\vec{T}(s+ds)-\vec{T}(s)+d\vec{F}=\vec{0}$, soit $d\vec{T}+d\vec{F}=\vec{0}$

On a $d\vec{F}=\vec{f}ds$, d'où $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds}+\vec{f}=\vec{0}}$ (ds : abscisse curviligne).

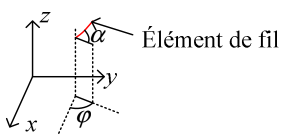
Ici, $d\vec{F}=\lambda ds\vec{g}$, donc $\dfrac{d\vec{T}}{ds}=\lambda\vec{g}$

2) Projection

Sur un repère (O,x,y,z) orthonormé où z est vertical :

$dT_x=0$, $dT_y=0$, $dT_z=\lambda g ds$.

- Le fil est dans un plan vertical. En effet :



Ainsi,

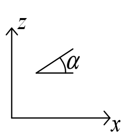
$$\left.\begin{array}{l} T_x=T\cos\alpha\cos\varphi=\text{cte} \\ T_y=T\cos\alpha\sin\varphi=\text{cte} \end{array}\right\}\varphi=\text{cte}$$

$T_z=T\sin\alpha$

En choisissant l'axe Ox convenablement, on peut prendre $\varphi=0$.

Ainsi, le fil est dans le plan xOz, et de là $T_x=T\cos\alpha=\text{cte}=T_0$.

- Forme du fil :



$T_z=T_0\tan\alpha$

$T_z=T_0\tan\alpha=T_0\dfrac{dz}{dx}$.

Donc $dT_z=T_0\dfrac{d^2z}{dx^2}dx=\lambda g ds=\lambda g dx\sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$

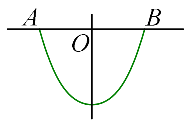
On pose alors $\dfrac{dz}{dx}=u$.

Ainsi, l'équation devient :

$T_0 \dfrac{du}{dx} = \lambda g \sqrt{1+u^2}$.

Donc $u = \mathrm{sh}\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x + \psi\right)$, d'où $z = \dfrac{T_0}{\lambda g}\mathrm{ch}\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x + \psi\right) + k$

- On a trois inconnues (à savoir T_0, ψ, k). Détermination :



On peut faire en sorte d'avoir *O* au milieu de *A* et *B*.

Ainsi, $A = -\dfrac{d}{2}$, $B = \dfrac{d}{2}$.

On en tire que $\psi = 0$.

De plus, $0 = \dfrac{T_0}{\lambda g}\mathrm{ch}\left(\dfrac{\lambda g d}{2T_0}\right) + k$

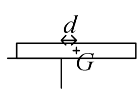
Et enfin, $\int ds = \int \sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = l$ (l : longueur totale de la tige)

- Commentaire :

$T = \dfrac{T_0}{\cos\alpha}$; si la chaînette casse, ce sera donc à une extrémité.

C) Chute d'une règle sur un coin de table

1) Analyse



(Vocabulaire : *d* : porte-à-faux)
La règle va commencer par tourner, puis glisser.
On cherche l'angle θ_l à partir duquel elle commence à glisser.

$\theta_l = \varphi(d, m, f, g, l)$.

Analyse dimensionnelle :

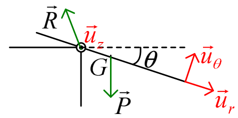
d et *l* : $[L]$; *m* : $[M]$; *f* sans dimension ; *g* : $[L][T]^{-2}$.

Ainsi, θ_l est indépendant de *g* et *m*, et à priori *d* et *l* apparaîtront sous forme d'un rapport.

2) Mouvement

- Système : règle
- Référentiel du laboratoire, galiléen.
- Actions : $[\vec{P}]$, $[\vec{R}]$.

- Paramétrage :



- TMC par rapport à Oz :

$J\ddot{\theta} = -mg \times d\cos\theta$

Soit $m\left(\dfrac{L^2}{12}+d^2\right)\ddot{\theta} = -mgd\cos\theta$

Et $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L^2}{12}+d^2\right)\dot{\theta}^2 = -gd\sin\theta + \underbrace{\text{cte}}_{=0}$

- Projections :

$m\vec{a} = m\times(-d.\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + md\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta$

$\vec{R} = \overline{T}.\vec{u}_r + N.\vec{u}_\theta$

$\vec{P} = -mg\sin\theta.\vec{u}_r - mg\cos\theta.\vec{u}_\theta$

(On a $\theta < 0$)

Ainsi, $\overline{T} = mg\sin\theta - md.\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta + md\times\dfrac{gd\sin\theta}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l^2}{12}+d^2\right)}$

Et $N = mg\cos\theta + md.\ddot{\theta} = mg\cos\theta - md\dfrac{gd\cos\theta}{\left(\dfrac{l^2}{12}+d^2\right)}$

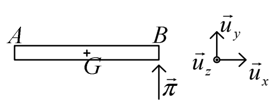
- On tire après calculs que $|\tan\theta_l| = f\dfrac{1}{1+\dfrac{36d^2}{l^2}}$.

On retrouve bien ce qui avait été prévu (indépendant de g, m)
On remarque que θ_l augmente très vite lorsque le porte-à-faux diminue.

D) Percussion sur une règle

1) Règle posée sur un plan horizontal sans frottements

Dessin vu de haut :



On suppose que $\vec{\pi} // \vec{u}_y$

Quel est le mouvement de la règle ?

- Principe fondamental de la dynamique :

$\underbrace{[m\vec{a}]}_{\text{torseur horizontal}} = \underbrace{[\vec{P}]+[\vec{P}]}_{\text{torseurs verticaux}} + \underbrace{[\vec{F}]}_{\text{horizontal}}$

Ainsi, $[m\vec{a}] = [\vec{F}]$.

$\vec{F}$: forte entre 0 et τ, nulle après.

- Phase de percussion :
  - TRC :

$$m\frac{d\vec{v}(G)}{dt}=\vec{F}$$

Donc $md\vec{v}(G)=\vec{F}dt$

Soit $m(\vec{v}(G,\tau)-\underbrace{\vec{v}(G,0)}_{=\vec{0}})=\int_0^\tau \vec{F}dt=\vec{\pi}$

Donc $\vec{v}(G,\tau)=\dfrac{\vec{\pi}}{m}$

  - TMC par rapport à Gz :

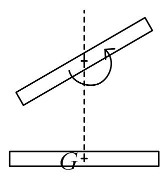
$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}=F\times\frac{l}{2}$$

Donc $\ddot{\theta}=\dfrac{6}{ml}F$. Donc $\dot{\theta}(\tau)-\dot{\theta}(0)=\dfrac{6}{ml}\pi$, c'est-à-dire $\dot{\theta}(\tau)=\dfrac{6}{ml}\pi$

- Phase ultérieure :

TRC : $\vec{v}(G)=\text{cte}$

TMC : $\dot{\theta}=\text{cte}$



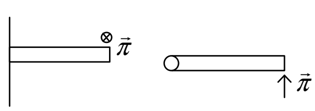
- Commentaires :
  - La percussion impose les conditions initiales de la règle.
  - S'il y avait des frottements :

$[m\vec{a}]=[\vec{R}]+[\vec{P}]+[\vec{F}]$, soit $[m\vec{a}]=[\vec{T}]+[\vec{F}]$

$\|\vec{T}\|\leq f\|\vec{N}\|=f\|\vec{P}\|$ (donc T reste fini pendant la percussion).

La phase de percussion reste donc la même.

2) Règle mobile autour d'un axe vertical



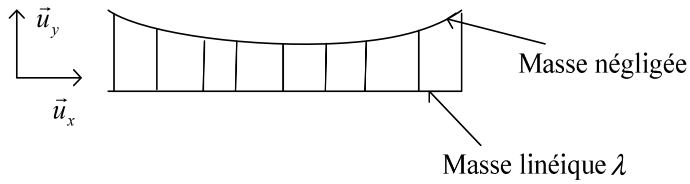
- PFD : $[m\vec{a}]=[\vec{P}]+[\vec{R}]+[\vec{F}]$
- Phase de percussion :
  - TRC : $m\dfrac{d\vec{v}(G)}{dt}=\vec{F}+\vec{R}$. Donc $\vec{v}(G,\tau)=\vec{\pi}+\vec{\pi}_R$
  - TMC par rapport à l'axe de rotation : $J_\Delta\ddot{\theta}=F\times l$.

Comme $J_\Delta=m\dfrac{l^2}{12}+m\dfrac{l^2}{4}$, on a $m\dfrac{l^2}{3}\dot{\theta}(\tau)=\pi.l$, soit $\dot{\theta}(\tau)=\dfrac{3\pi}{ml}$.

Ainsi, $\vec{v}(G,\tau)=\dfrac{l}{2}\dot{\theta}(\tau)\vec{u}_y=\dfrac{3}{2}\dfrac{\pi}{ml}\times l.\vec{u}_y=\frac{3}{2}\dfrac{\pi}{m}.\vec{u}_y$

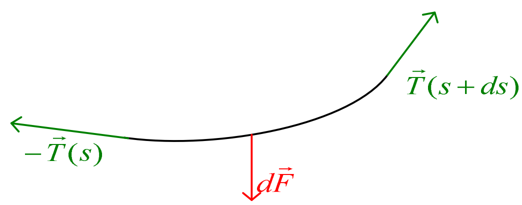
(Et $\frac{3}{2}\vec{\pi}=\vec{\pi}_R+\vec{\pi}$, donc $\vec{\pi}_R=\frac{1}{2}\vec{\pi}$).

E) Pont suspendu



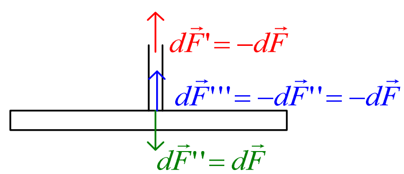
1) Forme du câble porteur

- On suppose que les câbles verticaux sont assez rapprochés pour considérer que la forme est continue.



On a alors à l'équilibre $\vec{T}(s+ds)-\vec{T}(s)+d\vec{F}=\vec{0}$, donc $d\vec{T}+d\vec{F}=\vec{0}$

- Equilibre du tablier :



(Le fil a une masse nulle)

Ainsi, à l'équilibre, $d\vec{F}'''+dm\vec{g}=\vec{0}$, donc $d\vec{F}=dm\vec{g}$ puis $d\vec{T}+dm\vec{g}=\vec{0}$

- Equation différentielle :

On a $d\vec{T}=-\lambda dx\vec{g}=\lambda g dx.\vec{u}_y$

Donc $dT_x=0$, soit $T_x=\text{cte}=A$. Donc $T\times\cos\theta=A$, où θ est l'angle que fait le fil avec l'horizontale.

On a aussi $dT_y=\lambda g.dx$, soit $d(T\sin\theta)=\lambda g.dx$

Donc $Ad(\tan\theta)=\lambda g.dx$

Comme $\tan\theta=\dfrac{dy}{dx}$, on a $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda g}{A}$.

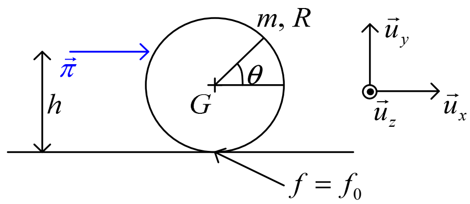
Donc $y=\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda g}{A}x^2+Bx+C$.

- Détermination des constantes :

Si le câble est attaché à la même hauteur en deux points de distance d, on a $y=0$ pour $x=0,d$. Donc $C=0$, $y=\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda g}{A}x.(x-d)$

En connaissant la longueur du câble, on peut ensuite calculer A. (on doit trouver A proportionnel à g et λ, par homogénéité ; ainsi,la forme du câble ne dépend pas de la masse du tablier)

F) Percussion horizontale sur une boule de billard



La boule est soumise à :

- Son poids $\vec{P}$
- La réaction du support $\vec{R}$
- La percussion $\vec{F}$, qui dure pendant un temps τ.

1) Phase de percussion

- D'après le théorème de la résultante dynamique,

$m\vec{a}(G) = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}$

Donc en intégrant :

$$m\vec{v}_G(\tau) = \int_0^\tau \vec{F}dt + \int_0^\tau \vec{P}dt + \int_0^\tau \vec{R}dt$$
$$= \vec{\pi} + \vec{0} + \int_0^\tau \vec{R}dt = \vec{\pi} + \vec{\pi}_T + \vec{\pi}_N$$

On suppose que la boule ne décolle pas : en projetant, on obtient :

$$\begin{cases} m\dot{x}(\tau) = \pi + \pi_T \\ 0 = \pi_N \end{cases}$$

Donc il n'y a pas de percussion verticale.

Puis comme $\left\|\vec{T}\right\| \leq f.\left\|\vec{N}\right\|$, on a aussi $\pi_T = 0$.

D'où ensuite $\vec{v}_G(\tau) = \dfrac{\vec{\pi}}{m}$.

- On applique le théorème du moment cinétique par rapport à Gz :

$J_\Delta \ddot{\theta} = \overline{T}R + F.(R-h)$

Donc en intégrant : $J_\Delta \dot{\theta}(\tau) = \int_0^\tau \overline{T}Rdt + (R-h)\int_0^\tau Fdt = (R-h)\pi$

Ainsi, $\dot{\theta}(\tau) = \dfrac{5}{2}\dfrac{R-h}{mR^2}\pi$

2) Mouvement ultérieur

- Principe fondamental de la dynamique
  - Théorème de la résultante dynamique :

$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{R}$, donc $m\ddot{x} = \overline{T}$, $N = mg$

  - Théorème du moment cinétique par rapport à Gz :

$J_\Delta \ddot{\theta} = \overline{T}R$, soit $R\ddot{\theta} = \dfrac{5}{2}\dfrac{\overline{T}}{m}$

- Vitesse de glissement :

$\vec{v}_g = \vec{v}(I \in S) = \vec{v}(G) + \overrightarrow{IG} \wedge \vec{\Omega} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\vec{u}_x$

donc $\dot{\vec{v}}_g = (\ddot{x} + R\ddot{\theta})\vec{u}_x = \frac{7}{2}\frac{\overline{T}}{m}\vec{u}_x$

Mais $\overline{T}v_g \leq 0$, donc $\dot{v}_g v_g \leq 0$, soit $\frac{dv_g^2}{dt} \leq 0$

- Cas où $v_g(\tau) = 0$:

- Condition sur π :

On doit avoir $\dot{x}(\tau) + R\dot{\theta}(\tau) = 0$, donc $\frac{\pi}{m} + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{h}{R}\right)\frac{\pi}{m} = 0$, soit $h = \frac{7}{5}R$.

- Mouvement :

On a alors $\dot{x} = -R\dot{\theta}$, $m\ddot{x} = \overline{T}$, $R\ddot{\theta} = \frac{5}{2}\frac{\overline{T}}{m}$

Donc $m\ddot{x} = -\frac{5}{2}\overline{T}$

Et donc $\overline{T} = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$, c'est-à-dire qu'on a un mouvement rectiligne uniforme.

- Cas où $v_g(\tau) > 0$:

- Condition : il faut que $h < \frac{7}{5}R$

- Phase de glissement : $\overline{T} < 0$

On a alors $\overline{T} = -fN = -fmg$

Donc $\ddot{x} = -fg$, soit $\dot{x} = \dot{x}(\tau) - fgt$

Et $R\ddot{\theta} = \frac{5}{2}\frac{\overline{T}}{m} = -\frac{5}{2}fg$, soit $R\dot{\theta} = R\dot{\theta}(\tau) - \frac{5}{2}fgt$

Fin de la phase : c'est lorsque $\dot{x}(t_1) + R\dot{\theta}(t_1) = 0$, soit $t_1 = \frac{2}{7}v_g(\tau) \times \frac{1}{fg}$

On a alors $\dot{x}(t_1) = \frac{5}{7}\frac{\pi}{m}\left(2 - \frac{h}{R}\right) > 0$

Donc la boule ne reviendra jamais en arrière, quel que soit la manière dont on la frappe : si on veut faire un effet « rétro », on est obligé de percuter la boule de façon oblique.