

Chapitre 10 : Le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen

I Cas général

A) Enoncé

On considère un référentiel R galiléen, absolu et un référentiel R' non galiléen, relatif.

Dans R galiléen : on a $[m\vec{a}_a] = [\vec{F}_{\text{ext}}]$

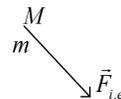
Et $[m\vec{a}_a] = [m\vec{a}_r] + [m\vec{a}_e] + [m\vec{a}_c]$

Donc $[m\vec{a}_r] = [m\vec{a}_a] - [m\vec{a}_e] - [m\vec{a}_c] = [\vec{F}_{\text{ext}}] + \underbrace{[-m\vec{a}_e]}_{[\vec{F}_{i,e}]} + \underbrace{[-m\vec{a}_c]}_{[\vec{F}_{i,c}]}$

Soit $[m\vec{a}_r] = [\vec{F}_{\text{ext}}] + [\vec{F}_{i,e}] + [\vec{F}_{i,c}]$.

B) Expression des forces d'inertie

1) D'entraînement



$$\vec{F}_{i,e} = -m\vec{a}_e(M) = -m\vec{a}_c(M).$$

2) De Coriolis

$$\vec{F}_{i,c} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

C) Aspect énergétique

Force d'inertie de Coriolis : $\delta W_{\vec{F}_{i,c}} \equiv 0$ (ne dérive pas d'une énergie potentielle)

Force d'inertie d'entraînement : en général, $\delta W_{\vec{F}_{i,e}} \neq 0$. (parfois...)

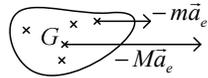
II Cas particuliers

A) R' en translation par rapport à R .

1) Forces d'inertie d'entraînement

$$[\vec{F}_{i,e}] = [-m\vec{a}_e].$$

\vec{a}_e est uniforme : on a $\vec{a}_e = \vec{a}_a(O')$, donc $\vec{a}_e(\vec{r}, t)$.

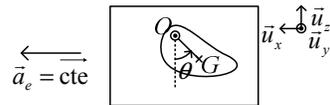


(La force d'inertie est proportionnelle aux masses)

2) Forces d'inerties de Coriolis

$$\vec{F}_{i,c} = \vec{0} \text{ (car } \Omega_e = \vec{0} \text{)}$$

3) Application : pendule pesant dans un référentiel accéléré



$$\vec{a}_e = a_e \vec{u}_x.$$

Dans le référentiel \$R'\$, le système {pendule} est soumis aux actions :

$$[\vec{P}], [\vec{R}], [\vec{F}_{i,e}].$$

- Principe fondamental de la dynamique :

- Théorème du moment cinétique par rapport à \$Oy\$, fixe dans \$R'\$:

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + ma_e l \cos \theta.$$

- Peut-on appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique ?

\$[\vec{P}]\$ dérive d'une énergie potentielle

\$[\vec{R}]\$ ne travaille pas dans \$R'\$.

$$[\vec{F}_{i,c}] = -ma_e \vec{u}_x = -\vec{\nabla}(ma_e x_G). \text{ (} x_G = -l \sin \theta \text{)}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta - ma_e l \sin \theta = \text{cte}$$

$$\text{Et en dérivant } J_\Delta \ddot{\theta} + mgl \sin \theta - ma_e l \cos \theta = 0.$$

- Equilibre :

- Condition nécessaire : \$\ddot{\theta} = 0\$, soit \$\tan \theta = \frac{a_e}{g}\$.

- Ou \$\frac{dE_p}{d\theta} = mgl \sin \theta - ma_e l \cos \theta = 0\$ (d'où la même relation)

- Stabilité :

$$\theta = \theta_e + \alpha$$

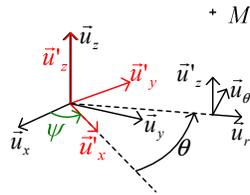
$$\text{On a } J_\Delta \ddot{\alpha} + mgl \sin \theta_e + mgl \alpha \cos \theta_e - ma_e l \cos \theta_e + ma_e l \sin \theta_e = 0$$

$$\text{Soit } J_\Delta \ddot{\alpha} + mgl \alpha \cos \theta_e \underbrace{\left(1 + \frac{a_e}{g} \tan \theta_e\right)}_{\tan \theta_e} = 0$$

$$\text{Donc } J_\Delta \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{\cos \theta_e} \alpha = 0.$$

Si \$\cos \theta_e > 0\$, la position est stable, sinon elle est instable.

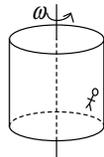
B) R' en rotation autour de Δ fixe dans R .



1) Forces d'inertie

- $\vec{F}_{i,e}$:
 $\vec{F}_{i,e} = -m\vec{a}_e = -m(-r\dot{\psi}^2\vec{u}_r + r\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$ ($mr\dot{\psi}^2\vec{u}_r$: force centrifuge)
- $\vec{F}_{i,c} = -2m\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r = -2m(\dot{\psi}\vec{u}_z) \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) = -2mr\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{u}_r + 2mr\dot{\psi}\dot{z}\vec{u}_\theta$

2) Exemples



On cherche ω_l , vitesse angulaire à partir de laquelle le bonhomme reste collé à la paroi si on retire le plancher.

- Etude dimensionnelle :

$$\omega_l(R, f, m, g) ; [R] = [L], [f] = 1, [m] = [M], [g] = [L][T]^{-2}.$$

On peut donc prévoir une relation de la forme $\omega_l = \alpha(f)\sqrt{\frac{g}{R}}$, où α est une fonction décroissante de f .

- Dans R terrestre :

Théorème de la résultante dynamique :

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{R}, \text{ soit } -m\omega^2 R\vec{u}_r = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 R = -N \\ 0 = -mg + \bar{T} \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} N = m\omega^2 R \\ \bar{T} = mg \end{cases}$$

La condition s'écrit donc $\bar{T} < fN$, soit $mg < mf\omega^2 R$.

$$\text{Ainsi, } \omega > \omega_l = \sqrt{\frac{g}{Rf}}$$

- Dans R' lié au cylindre :

Le théorème de la résultante dynamique s'écrit ici :

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{F}_{i,e} + \vec{R} \text{ soit } \vec{0} = m\vec{g} + m\omega^2 R\vec{u}_r + \vec{T} + \vec{N}, \text{ et on retrouve ensuite}$$

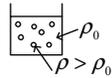
la même relation.

- Ordre de grandeur : pour $R \sim 2\text{m}$, $g \sim 10\text{m.s}^{-1}$ et $f \sim 0,3$, on a :

$$\omega_l = 4\text{rad.s}^{-1}, \text{ et } v_l = \omega_l \times R = 8\text{m.s}^{-1} \text{ (vitesse linéaire du bonhomme)}$$

- Ultra centrifugation :

- Sédimentation :



Principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{A} - f\vec{v} = (m - m_0)\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

Soit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = (m - m_0)\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$, donc les particules atteignent une vitesse

$$\text{maximale } \vec{v}_l = \frac{(m - m_0)\vec{g}}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)\vec{g}}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{r^2(\rho - \rho_0)}{\eta} \vec{g}$$

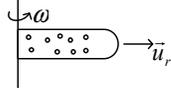
Pour $r \sim 1\mu\text{m}$, $\rho \sim 2.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_0 \sim 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\eta \sim 10^{-3} \text{ Poiseuille (SI)}$,

$$\text{on a } v_l \sim \frac{2 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 \cdot 10}{9 \cdot 10^{-3}} \sim 2.10^{-6} \text{ m.s}^{-1}.$$

Comment accélérer le processus ?

Déjà, pour des particules données, tout est fixé sauf \vec{g} .

- Centrifugation :



Principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{A} + \vec{F}_{i,e} - f\vec{v} + \vec{F}_{i,c}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (m - m_0)\vec{g} + (m - m_0)\omega^2 R\vec{u}_r - 2m\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

En régime permanent :

$$\vec{0} = (m - m_0)\vec{g} + (m - m_0)\omega^2 R\vec{u}_r - 2m\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

$$\text{Donc } \vec{v} \approx \frac{(m - m_0)\omega^2 R}{6\pi\eta r} \vec{u}_r$$

(On néglige les composantes selon les autres axes)

Ainsi, le g du point précédent est remplacé par $\omega^2 R$. Actuellement, on peut obtenir une rotation de 10^3 tours par minute ; ainsi, $\omega \sim 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$; pour $R \sim 10\text{cm}$, on a $\omega^2 R \sim 10^7 \text{ SI} \sim 10^6 \text{ g}$.

III Compléments

A) Pendule conique



On suppose l'articulation sans frottements, permettant un mouvement dans un plan qui tourne à la vitesse angulaire ω (imposée).

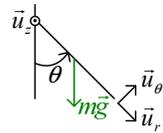
1) Analyse

- On n'a qu'un seul degré de liberté (la rotation de l'axe est imposée)

- Système : {Tige}
- Référentiel : R lié à la tige verticale (en rotation)
- Actions exercées sur la barre : $[\vec{P}]$, $[\vec{R}]$, $[\vec{F}_{i,e}]$, $[\vec{F}_{i,c}]$.

2) Etude dynamique

- Equation du mouvement :
Théorème du moment cinétique par rapport à $\Delta = (Oz)$:



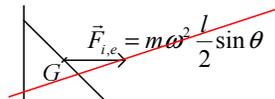
$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = M_{\Delta}, \text{ et } J_{\Delta} = m \frac{l^2}{12} + m \frac{l^2}{4} = m \frac{l^2}{3}$$

$$\text{Donc } m \frac{l^2}{3} \ddot{\theta} = M_{\Delta}.$$

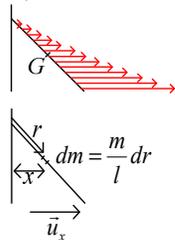
$$- M_{\Delta}(\vec{P}) = -mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$- M_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \text{ (on suppose qu'il n'y a pas de frottements)}$$

$$- M_{\Delta}(\vec{F}_{i,e}) :$$



Attention : le champ est bien proportionnel aux masses, mais \vec{a}_e n'est pas uniforme, on ne peut donc pas le réduire à un glisseur en G (mais sûrement un peu plus bas) :



l'élément dm de masse est soumis à la force d'inertie $d\vec{F}_{i,e} = dm \omega^2 x \vec{u}_x$.

$$\text{Donc } dM_{\Delta}(\vec{F}_{i,e}) = dm \omega^2 x \times r \cos \theta = \frac{m}{l} \omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta dr$$

$$\text{Ainsi, } M_{\Delta}(\vec{F}_{i,e}) = \frac{m}{l} \omega^2 \sin \theta \cos \theta \times \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

(Remarque : on a $\vec{F}_{i,e} = \frac{m}{l} \omega^2 \sin \theta \int_0^l r dr \vec{u}_x = \frac{1}{2} ml \omega^2 \sin \theta \vec{u}_x$, on a donc un glisseur appliqué au point situé aux 2/3 de la barre)

$$- M_{\Delta}(\vec{F}_{i,c}) :$$

La vitesse relative d'un élément de la barre est dirigé selon \vec{u}_{θ} .

Ainsi, $\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r$ est dirigé selon \vec{u}_z .

Donc $M_\Delta(\vec{F}_{i,c}) = 0$. La force d'inertie de Coriolis n'a donc aucune influence sur le mouvement (mais elle en a une sur l'usure de l'axe)

$$\text{Ainsi, } J_\Delta \ddot{\theta} = \frac{ml^2}{3} \omega^2 \sin \theta \cos \theta - mg \frac{l}{2} \sin \theta, \text{ ou } \ddot{\theta} = \sin \theta (\omega^2 \cos \theta - \omega_c^2)$$

$$\text{avec } \omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

• Equilibre :

$$\sin \theta (\omega^2 \cos \theta - \omega_c^2) = 0$$

$$- \sin \theta = 0, \text{ et } \theta_e = 0 \text{ ou } \theta_e = \pi$$

$$- \cos \theta = \frac{\omega_c^2}{\omega^2}, \text{ possible que si } \omega > \omega_c, \text{ et on a alors } \theta_e = \pm \theta_0 \text{ où}$$

$$\theta_0 = \text{Arccos} \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$$

• Stabilité :

$$\alpha = \theta - \theta_e \ll 1.$$

$$\text{On a } \ddot{\alpha} = (\sin \theta_e + \alpha \cos \theta_e)(\omega^2 \cos \theta_e - \omega^2 \alpha \sin \theta_e - \omega_c^2)$$

$$\text{Soit } \ddot{\alpha} = \underbrace{\alpha(\omega^2(2 \cos^2 \theta_e - 1) - \omega_c^2 \cos \theta_e)}_{<0 \text{ pour stabilité}}$$

$$- \text{ Si } \omega < \omega_c : \theta_e = 0 \text{ est stable, } \theta_e = \pi \text{ est instable.}$$

$$- \text{ Si } \omega > \omega_c : \theta_e = 0 \text{ et } \theta_e = \pi \text{ sont instables, } \theta_e = \pm \theta_0 \text{ sont stables.}$$

3) Etude énergétique

• Conservation de l'énergie mécanique ?

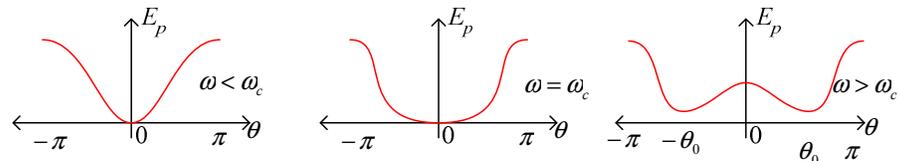
$$- [\vec{P}] : E_{p_1} = -mg \frac{l}{2} \cos \theta + \text{cte}$$

$$- [\vec{F}_{i,e}] : \delta W_{\vec{F}_{i,e}} = M_\Delta(\vec{F}_{i,e}) d\theta = J_\Delta \omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = -d \left(J_\Delta \omega^2 \frac{\cos^2 \theta}{2} \right)$$

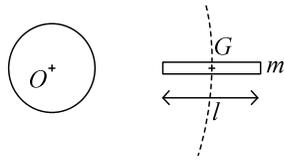
$$\text{Donc } E_{p_2} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{3} \omega^2 \cos^2 \theta + \text{cte}.$$

Les autres forces ne travaillent pas, le système est donc conservatif.

• Positions d'équilibre, stabilité :

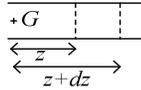


B) Tension d'une tige en orbite circulaire



On cherche la tension de la tige en chacun de ses points ; on suppose que la tige reste toujours dans la direction OG .

- Système : {élément de tige}



- Référentiel : en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport au référentiel géocentrique.

- Actions s'exerçant sur l'élément :

$[\vec{F}_g]$, $[\vec{F}_{i,e}]$ pour les champs ($\vec{F}_{i,c} = \vec{0}$)

$[\vec{T}]$ pour les actions de contact.



- Théorème de la résultante dynamique :

$$0 = -G \frac{M_T dm}{r^2} + dm \cdot \omega^2 r + T(z+dz) - T(z) \quad (\text{avec } r = R+z, \text{ où } R = OG)$$

$$\text{Donc } dT = \frac{dm}{dz} \left(\frac{GM_T}{r^2} - \omega^2 r \right) dz = \frac{m}{l} \left(\frac{GM_T}{(R+z)^2} - \omega^2 (R+z) \right) dz$$

- Relation entre ω et R : Théorème de la résultante dynamique appliqué à la tige dans le référentiel géocentrique :

$$m\vec{a}(G) = \vec{F}_g$$

$$\text{Donc } -m\omega^2 R \vec{u}_r = -\frac{GM_T m}{R^2} \vec{u}_r, \text{ soit } \omega^2 R = \frac{GM_T}{R^2}.$$

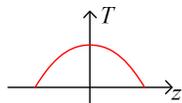
$$\text{Ainsi, si on néglige } \frac{z}{R} \text{ dans } dT = \frac{m}{l} \left(\frac{GM_T}{(R+z)^2} - \omega^2 (R+z) \right) dz, \text{ on obtient } dT = 0.$$

Mais on peut négliger les termes d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned} dT &= \frac{m}{l} \left(\frac{GM_T}{R^2 \left(1 - 2\frac{z}{R}\right)} - \omega^2 R \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right) dz \\ &= -3 \frac{m}{l} \omega^2 R \times \frac{z}{R} dz = -\frac{3m\omega^2}{l} z dz \end{aligned}$$

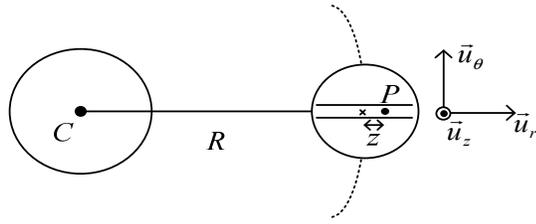
$$\text{Donc } T(z) = -\frac{3}{2} \frac{m\omega^2}{l} \left(z^2 - \frac{l^2}{4} \right) \quad (\text{aux extrémités, } T(z) = 0)$$

On a ainsi une courbe de la forme :



On a toujours $T > 0$, la tige a donc toujours tendance à s'allonger.

C) Mouvement d'une bille dans un satellite



On note $CP = r = R + z$.

1) Mouvement de la bille

- On n'a qu'un degré de liberté z .
- On se place dans le référentiel lié au satellite, non galiléen, en rotation à la vitesse angulaire ω par rapport à la Terre.
- Actions exercées sur la bille : $[\vec{F}_g], [\vec{F}_{ie}], [\vec{F}_{ic}], [\vec{R}]$ (on néglige l'interaction gravitationnelle entre le satellite et la bille)
- Théorème de la résultante dynamique :

	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z
$m\vec{a}$	$m\ddot{z}$	0	0
\vec{F}_g	$-\frac{GMm}{(R+z)^2}$	0	0
\vec{F}_{ie}	$m\omega^2(R+z)$	0	0
\vec{F}_{ic}	0	$-2m\omega\dot{z}$	0
\vec{R}	0	R_θ	R_z

Donc $R_\theta = 0$ (pas de frottement), $R_\theta = 2m\omega\dot{z}$.

$$\text{Et } \ddot{z} = -\frac{GM}{(R+z)^2} + \omega^2(R+z)$$

Soit, au premier ordre en z/R :

$$\ddot{z} = -\frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2z}{R}\right) + \omega^2 R \left(1 + \frac{z}{R}\right)$$

$$\text{Ou } \ddot{z} - \frac{z}{R} \left(2\frac{GM}{R^2} + \omega^2 R\right) = -\frac{GM}{R^2} + \omega^2 R$$

2) Relation entre la vitesse angulaire et R : mouvement du satellite

On a pour le satellite :

$$\vec{F}'_G + \vec{F}_{ie} = \vec{0} \text{ (dans le référentiel du satellite)}$$

$$\text{Donc } -\frac{GMm'}{R^2} + m'\omega^2 R = 0$$

$$\text{Soit } \omega^2 R = \frac{GM}{R^2}$$

Donc en remplaçant dans l'équation précédente, il reste $\ddot{z} - 3\omega^2 z = 0$

$$\text{Soit } z = z_0 \text{ch}(\sqrt{3}\omega t)$$