Chapitre 1 : Eléments de théorie générale

I Séries de Fourier

A) Développement d’une fonction périodique en série de Fourier

1) Série d’exponentielles imaginaires

- Théorème de Fourier :
  Soit \( f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \) périodique de période \( L \), de pulsation \( k = \frac{2\pi}{L} \). Si \( f \) est de carré sommable sur \([0, L] \), alors \( f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \) où, pour \( n \in \mathbb{Z} \) :

  \[ k_n = n \times \frac{2\pi}{L} \]

  Et \( c_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) e^{-ik_n x} dx \)

- Spectre de Fourier :
  C’est \( \{c_n, n \in \mathbb{Z}\} \) :

  \[
  |c_n| \quad \longrightarrow \quad n
  \]

  (En général, \( |c_n| \) décroît quand \( |n| \) augmente)

2) Série de sinus et de cosinus

- Cas général :
  \( f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x \) avec \( a_0 = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx \),

  \[
  a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos(k_n x) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin(k_n x) dx
  \]

- Parité :
  Si \( f(x) \) est paire, on aura \( \forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0 \)
  Si \( f(x) \) est impaire, on aura \( \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \)

- Cas d’une fonction réelle :
  Si \( a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) = a'_n \cos(k_n x + \varphi_n) \)

  Et donc \( f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(k_n x + \varphi_n) \)

  Le terme pour \( n = 1 \) s’appelle le fondamental ou la première harmonique. Celui pour \( n = 2 \) s’appelle deuxième harmonique, etc.
3) Égalité de Bessel–Parseval

\[
\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2
\]

B) Développement d'une fonction de support fermé

1) Principe

![Diagram](image)

On peut ensuite reproduire le motif en une fonction périodique (éventuellement en ajoutant autre chose pour un raccordement continu…)

2) Exemple

![Diagram](image)

On a \( k_n = 2n \frac{\pi}{L} = n \frac{\pi}{l} \), et la fonction est impaire :

On trouve alors \( f(x) = \frac{8d}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} + \ldots \right) \)

![Diagram](image)

C) Fonction spatiale et temporelle

1) Fonctions spatiales

\( x : \) abscisse, \( L: \) longueur (ou longueur d’onde), \( k = \frac{2\pi}{L}: \) pulsation spatiale.

On a \( f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ikx} \).

2) Fonctions temporelles

\( x \rightarrow t \), \( L \rightarrow T \), \( \omega = \frac{2\pi}{T}: \) pulsation temporelle ; \( f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega t} \).


**II Transformation de Fourier**

**A) Intégrale de Fourier**

1) L’intégrale de Fourier comme limite d’une série de Fourier

On considère $f$ définie sur $\mathbb{R}$, non périodique à priori.
On considère $f_L$ périodique de période $L$ telle que $f_L(x) = f(x)$ pour

$x \in \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]$.

Ainsi, 

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( e^{i\kappa x} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i\kappa x'} f(x') dx' \right)$$

On a $\kappa_{n+1} = \frac{2\pi}{L} (n+1), \kappa_n = \frac{2\pi}{L} n$. Donc $\frac{1}{L} = \frac{\kappa_{n+1} - \kappa_n}{2\pi}$

Et 

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( e^{i\kappa_n x} \frac{\kappa_{n+1} - \kappa_n}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i\kappa_n x'} f(x') dx' \right)$$

Quand $L \to +\infty$ :

$$f_L(x) \to f(x), \ k_{n+1} - k_n \to dk, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$$

Et ainsi 

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i\kappa x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-i\kappa x'} f(x')$$

2) Transformée de Fourier

- Définition :

La transformée de Fourier de $f(x)$ est 

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa x} f(x) dx$$

- Ainsi, on a le théorème (théorème de Fourier) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa x} \tilde{f}(k) dk$$

3) Interprétation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa x} \tilde{f}(k) dk$$

$f$ est donc la somme continue de fonctions sinusoïdales : $\tilde{f}(k)dk \leftrightarrow c_n$

Si $f$ est périodique :

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(k - k_n)$$ où $k_n = n \frac{2\pi}{L}$ :

$$|\tilde{f}(k)| \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow k$$

Chapitre 1 : Eléments de théorie générale
Ondes
B) Propriétés

On note \( \mathcal{F} : f \mapsto \tilde{f} \)

Transposé :
\( f^*(x) \rightarrow \tilde{f}^*(-k) \)

Translation :
\( f(x-x_0) \rightarrow \mathcal{F}^{-1} e^{-ikx_0} \tilde{f}(k) \)
\( f(x)e^{ikx} \rightarrow \tilde{f}(k-k_0) \)

Dilatation :
\[ f(ax) \rightarrow \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right) \]

Avec \( a = 1 \) : \( \mathcal{F} \) conserve la parité.

Dérivation :
\( f^{(a)}(x) \rightarrow (ik)^a \tilde{f}(k) \)
\( \tilde{f}^{(a)}(k) \rightarrow (-ix)^a f(x) \)

Égalité de Parseval–Plancherel :
\[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk \]

C) Exemples

1) Fonction porte

- Définition :
\[ \pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \]

- Transformation de Fourier de \( \pi\left(\frac{x}{l}\right) \) :
\[ \tilde{\pi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \pi\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx e^{-ikx} \]
\[ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{-1}{ik} \left( -2i \sin \frac{kl}{2} \right) \right) = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{kl}{2} = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \sin \left( \frac{kl}{2} \right) \]

(\( \text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \))

- Analyse :
On a \( \Delta x = l, \Delta k = 4\pi / l \), donc \( \Delta x \Delta k \approx 4\pi \)
2) Distribution delta de Dirac

- Transformée :
  \[ f(x) = \delta(x-x_0) \]
  \[ \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x-x_0) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \]

- Analyse :
  \[ \frac{\tilde{f}(k)}{1/\sqrt{2\pi}} \]
  \[ k \]

- Cas particulier :
  Si \( x_0 = 0 \), on a \( \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \)

3) Fonction sinusoidale

\[ f(x) = e^{ik_0 x} \]
\[ \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ik_0 x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-(k-k_0)x} \]

On avait \( \delta(x-x_0) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik_0 x} \to \delta(x-x_0) \)

Donc \( \delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dke^{ikx} e^{-ik_0 x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dke^{-ik(k-k_0)} \)

Et par identification : \( \delta(k_0-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-i\pi(k-k_0)} \)

(On a changé \( k \to x \), \( x_0 \to k_0 \), \( x \to k_0 \))

C'est-à-dire \( \delta(k-k_0) = \frac{\tilde{f}(k)}{\sqrt{2\pi}} \)

Donc \( e^{ik_0 x} \to \sqrt{2\pi} \times \delta(k-k_0) \)

Remarque :
\[ \cos(k_0 x) = \frac{1}{2} (e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}) \]

On a donc un spectre :

\[ \uparrow \]
\[ x_0 \]
\[ \uparrow \]
\[ k_0 \]
\[ \uparrow \]
\[ k \]

Et la transformée : \( \tilde{f}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)) \)
4) Peigne de Dirac

- Définition :

\[ \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) \] \( \varphi \) : « cha », lettre cyrillique

- Transformée :

\[ \tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-ikn} \]

On peut montrer que \( \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \pi x} \)

Ainsi, \( \tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi \left( \frac{k}{2\pi} \right) \)

5) Train sinusoïdal

- Définition :

\[ f(x) = a \sin(k_0 x) \]

Période : \( L = \frac{2\pi}{k_0} \)

On prend \( N \) périodes, réparties de part et d’autre de 0 :

Ainsi, \( f(x) = a \sin(k_0 x) \) si \( x \in \left[ -\frac{NL}{2}, \frac{NL}{2} \right] \), et 0 sinon.

Largeur du train : \( NL \)

Remarque :

\[ f(x) = ae^{i k_0 x} \varphi \left( \frac{x}{NL} \right) \]

- Transformée :

\[ \tilde{f}(k) = \frac{2a k_0}{\sqrt{2\pi}} \sin \left( \frac{N\pi k - k_0}{2} \right) \]

(Vu après)
• Analyse :
Largeur : $\Delta x = NL$ pour $f$, $\Delta k = \frac{2k_0}{N} = \frac{4\pi}{NL}$ pour $\tilde{f}$.
Ainsi, $\Delta x \Delta k = 4\pi$

6) Gaussienne

$$f(x) = e^{-x^2/a^2}, \text{ où } a = \text{cte}$$

Largeur : $\Delta x \approx a$

$$\tilde{f}(k) = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{e^{-k^2/a^2}}{\sqrt{2}}; \text{ c'est aussi une Gaussienne, de largeur } \Delta k \approx \frac{2}{a},$$
donc $\Delta x \Delta k \approx 2$

D) Transformée de Fourier dans l’espace à trois dimensions

$$f(x, y, z) \rightarrow \tilde{f}(k_x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ e^{-ik_x x} f(x, y, z)$$

$$\tilde{f}(k_y, k_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \ e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \ e^{-ik_z z} f(x, y, z)$$

Puis :

$$\tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \ e^{-ik_z z} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \ e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ e^{-ik_x x} f(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint dx dy dz e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} f(x, y, z)$$

On introduit $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

Ainsi, $\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$

Et $f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{f}(\vec{k})$

E) Transformée de Fourier spatiotemporelle

$$f(x, y, z, t) \rightarrow \tilde{f}(k_x, k_y, k_z, \omega), \text{ ou } f(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{f}(\vec{k}, \omega).$$
On a \( \tilde{f}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint d^3r. dt \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) f(\vec{r}, t) \)

(On prend la convention inverse pour \( t \) dans le signe de l’exponentielle)

Et \( f(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint d^3 r. dt \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \tilde{f}(\vec{k}, \omega) \)

### III Produit de convolution

**A) Définition**

\( f_1, f_2 \rightarrow f = f_1 \otimes f_2 \) défini par :

\[ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(y') \delta(x - y - y') dy dy' \]

\[ = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x - y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - y) f_2(y) dy \]

**B) Utilisation du produit de convolution**

Montage 4f :

\[ f(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint d^3 r. dt \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \tilde{f}(\vec{k}, \omega) \]

On considère l’objet constitué de l’axe \( x' \).
On a une luminosité ponctuelle \( f_i(x') \).

Selon l’optique géométrique, l’image est caractérisée par \( f(x) = f_1(x) \)
A cause de la diffraction, il n’en est pas ainsi :

L’image d’un point lumineux (un « Dirac » de lumière) n’est pas un point lumineux, mais une tache, avec un étalement \( f_2(x - x_0) \)

On décompose alors l’axe \( x \) en petites quantités :

\[ \text{Contribution de } dy \text{ en } P' \text{ à la luminosité en } P : f_2(x - y) f_1(y) dy \]

Donc en sommant : \( f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - y) f_1(y) dy \)

Ainsi, le produit de convolution permet « d’étaler » une fonction sur une autre.
C) Exemple : convolution d’une porte et d’un peigne :

\[ \mathcal{U}\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \mathcal{P}\left(\frac{x}{L}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - an) \times \mathcal{P}\left(\frac{x - y}{L}\right) \, dy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{an}{L}\right) \]

(D) Propriétés

- \( \otimes \) est commutatif
- \( \delta \) est l’élément neutre du produit de convolution :
  \( (f \otimes \delta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta(x-y) \, dy = f(x) \)

On note \( f = f_1 \otimes f_2 \) :

\[
\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(y') e^{-ik(y-y')} \, dy \, dy' \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2x \, d^2x' \left( e^{-ik(x-x')} \right) \delta(x-y') \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{-iky} f_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \, e^{-iky'} f_2(y')
\]

- De la même façon, \( \tilde{\mathcal{F}}(f_1 \times f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathcal{F}}(f_1) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(f_2) \)

(E) Application au train sinusoïdal

On pose \( f = f_1 \times f_2 \), avec :

\[ f_1(x) = a \sin(k_0 x), \text{ donc } \tilde{f}_1(k) = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2i} (\delta(k-k_0) - \delta(k+k_0)) \]

Et \( f_2(x) = \mathcal{P}\left(\frac{x}{NL}\right), \text{ donc } \tilde{f}_2(k) = \frac{NL}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left( \frac{kNL}{2} \right) \)

Ainsi, \( \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}_1 \otimes \tilde{f}_2 = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2i} \frac{NL}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left( \frac{(k-k_0)NL}{2} \right) \)
IV Echantillonnage
A) Définition

\[ t \rightarrow s(t) \]

\[ \frac{t}{T} \]

\( T \): pas d’échantillonnage.
A la fonction \( s(t) \) on associe \( \{s_n, n \in \mathbb{Z}\} \) où \( s_n = s(nT) \)

B) Echantillonnage par un peigne de Dirac
1) Principe

\[ e(t) = s(t) \times \mathcal{U}\left(\frac{t}{T}\right) \]

\[ t \rightarrow e(t) \]

\[ t \rightarrow s(t) \]

2) Echantillonnage d’un signal sinusoidal de pulsation \( \omega_0 \).

- Spectre de Fourier du signal échantillonné :

\[ \tilde{e}(\omega) = \sqrt{2\pi} \tilde{s}(\omega) \otimes \mathcal{U}\left(\frac{\omega 2\pi}{\Omega}\right) \quad (\Omega = \frac{2\pi}{T}) \]

- \( \tilde{s}(\omega) \):

On a \( s = S \cos \omega_0 t = \frac{S}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \)

Donc \( \tilde{s}(\omega) = \frac{S}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \)

\[ \tilde{s}(\omega) \quad \omega \]

\[ -\omega_0 \quad \omega_0 \]

\[ -\omega_0 \quad \omega_0 \]

\[ \frac{\omega 2\pi}{\Omega} \]

\[ \frac{\omega}{\Omega} \]

\[ \frac{\omega}{\Omega} \]

\[ \frac{\omega}{\Omega} \]

- \( \mathcal{U}\left(\frac{\omega 2\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{U}\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \)

- \( \tilde{e}(\omega) = \sqrt{2\pi} \frac{S}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \otimes \mathcal{U}\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \)

\[ \tilde{e}(\omega) \quad \omega \]

\[ -\omega_0 \quad \omega_0 \]

\[ \Omega - \omega_0 \quad \Omega + \omega_0 \]
• Reconstitution du signal de départ :
  - Filtre passe-bas idéal : c’est une fonction de transfert $H(\omega) = H e^{j\phi}$ telle que :

\[
\begin{array}{c}
\omega_c \\
\phi
\end{array}
\]

- Condition de Shannon pour pouvoir reconstituer le signal :
  Il faut trouver $\omega_0$ tel que $\omega_0 < \omega_c < \Omega - \omega_b$ :

\[
\begin{array}{c}
\omega_b \\
\omega_c \\
\omega_0
\end{array}
\]

Il faut donc que $\omega_0 < \Omega - \omega_0$, c’est-à-dire que les fourches ne se croisent pas.

3) Echantillonnage d’un signal de spectre borné

• Spectre du signal échantillonné :

\[
\begin{array}{c}
\tilde{\omega}(\omega) \\
\omega_i \\
\omega_f
\end{array}
\]

• Condition de Shannon :
  Il faut ici que $\omega_f < \omega_c < \Omega - \omega_M$, soit $\Omega > 2\omega_M$.

• Théorème de Shannon :
  Toute l’information d’un signal est contenue dans l’échantillonnage si l’échantillonnage a une pulsation $\Omega > 2\omega_M$ où $\omega_M$ est un majorant des pulsations du spectre de $s$.

C) Echantillonnage réel

• On fait les mesures sur un temps fini :

\[
\begin{array}{c}
\tau \\
\omega
\end{array}
\]

• On n’échantillonne pas indéfiniment : $e(t) = \ldots \times \pi$

• Le passe bas idéal n’existe pas.
  (Le deuxième point nuit au théorème de Shannon, mais pas le premier)