

# Chapitre 4 : Application des principes

## I Fonctions thermodynamiques

### A) Définition

#### 1) Enthalpie $H$ .

$H = U + PV$ , définie pour les systèmes dans lesquels on peut parler de pression et où elle est définie.

On a  $dU = TdS - PdV + \sum_i \mu_i dn_i$  et  $dH = dU + PdV + VdP$ .

Donc  $dH = TdS + VdP + \sum_i \mu_i dn_i$

Cela permet donc d'échanger  $V$  et  $P$  dans l'identité de Gibbs.

$H = H(S, P, n_i)$ .

#### 2) Energie libre $F$ .

$F = U - TS$ , définie pour les systèmes ayant une température et une entropie.

On a alors  $dF = -SdT - PdV + \sum_i \mu_i dn_i$

On a donc ici échangé  $S$  et  $T$ , et  $F = F(T, V, n_i)$

#### 3) Enthalpie libre $G$ .

$G = U + PV - TS$ .

On a alors  $dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i$ , et  $G = G(T, P, n_i)$ .

Remarque :

$H$ ,  $F$  et  $G$  sont des fonctions d'état, donc les différentielles écrites sont totales.

On a alors, pour une fonction  $f$ :

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ , et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , soit, par exemple pour l'enthalpie :

$\frac{\partial H}{\partial S} = T$ ,  $\frac{\partial H}{\partial P} = V$ , donc  $\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P} = \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial S} = \frac{\partial T}{\partial P}$ .

Et de même pour les autres,  $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T}$  et  $-\frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial V}{\partial T}$

Les transformations  $U \rightarrow F$ ,  $U \rightarrow G$  ou  $U \rightarrow H$  sont des transformations de Legendre.

Toutes les fonctions  $U(S, V, n_i)$ ,  $F(T, V, n_i)$ ,  $G(T, P, n_i)$  et  $H(S, P, n_i)$  contiennent toutes les informations sur le système.

La fonction  $G$  est généralement plus commode,  $T$  et  $P$  étant facile à mesurer.

## B) Calcul de $S$ , $H$ en fonction de $G$ .

$$\text{On a } dG = -SdT + PdV + \sum_i \mu_i dn_i$$

$$\text{Donc } S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P, n_i}$$

$$\text{On a } H = G + TS.$$

$$\text{Donc } \frac{-H}{T^2} = \frac{-1}{T^2} G - \frac{1}{T} S.$$
$$= \left( \frac{\partial(G/T)}{\partial T} \right)_{P, n_i}$$

$$\text{D'où la relation de Gibbs-Helmholtz : } H = -T^2 \left( \frac{\partial(G/T)}{\partial T} \right)_{P, n_i} = H(T, P, n_i).$$

Mais avec  $H(T, P, n_i)$ , on ne peut pas retrouver  $G$  :

En intégrant, on obtient  $\frac{G}{T} = -\int \frac{H}{T^2} dT + f(P, n_i)$ , et  $f$  peut être à peu près n'importe quelle fonction.

Ainsi, les variables en fonction desquelles on exprime chacune des fonctions  $U$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $S$  sont importantes.

## II Bilans d'énergie (1<sup>er</sup> principe)

### A) Bilan énergétique des systèmes fermés

#### 1) Transformation quelconque

- $\Delta E = Q + W$
- Si  $\Delta E_p = \Delta E_c = 0$ ,  $\Delta U = Q + W$

#### 2) Transformation adiabatique

On a alors  $Q = 0$ .

Donc  $\Delta E = W$ , ou  $\Delta U = W$ .

#### 3) Transformation sans travail de pression

Exemple : les transformations isochores sont sans travail de la pression.

- Cas général :

$$W = \underbrace{W_p}_{\substack{\text{travail des} \\ \text{forces de pression} \\ =0}} + \underbrace{W'}_{\text{autres}}$$

Donc  $\Delta E = Q + W'$ , ou  $\Delta U = Q + W'$

(On considère dans la suite que  $E \equiv U$ )

- Cas particuliers :
  - Si  $Q = 0$ , on a alors  $\Delta U = W'$  (correspond à la calorimétrie)
  - Si  $W' = 0$ , on a alors  $\Delta U = Q$ .

#### 4) Transformation isobare

C'est une transformation pour laquelle la pression est définie et constante à tout instant et en tout point (égale à  $P_{\text{ext}}$ )

Ainsi,  $W_p = -P\Delta V = -\Delta(PV)$

- Cas général :

$$\Delta E = Q + W$$

$$\text{Donc } \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W' - \Delta(PV)$$

$$\text{Donc } \Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W'$$

$$\text{Ou, si } \Delta E_c = \Delta E_p = 0, \Delta H = Q + W'$$

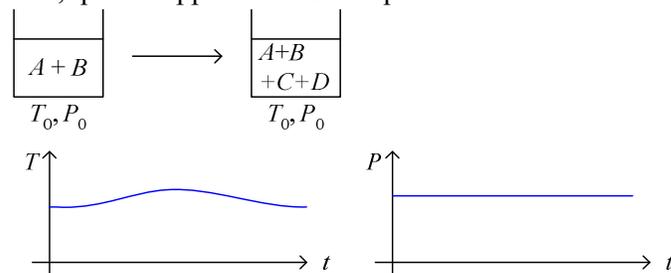
- Cas particuliers :

- Si  $Q = 0$ , on a alors  $\Delta H = W'$

- Si  $W' = 0$ , on a alors  $\Delta H = Q$  (correspond en général à la chimie)

- Application :

Mesure du transfert thermique associé à une réaction chimique non explosive, qu'on suppose exothermique.



Ainsi, la transformation est isobare mais pas isotherme.

On cherche  $Q$ .

$$\text{On a } E_c = 0, \Delta E_p = 0.$$

$$\text{Donc } Q = \Delta H_{i \rightarrow f}.$$

On considère une autre transformation :

$$\text{Etat 1 : } A + B, T_0, P_0$$

On le met dans un calorimètre et on laisse la transformation se faire.

$$\text{Etat 2 : } A + B + C + D, T_1, P_0$$

On le sort du calorimètre et on attend l'équilibre thermique.

$$\text{Etat 3 : } A + B + C + D, T_0, P_0 \text{ (correspond à l'état final)}$$

On le remet dans le calorimètre avec une résistance jusqu'à atteindre  $T_1$ .

$$\text{Etat 4 : } A + B + C + D, T_1, P_0 \text{ (correspond à l'état 2)}$$

Ainsi :

$$1 \rightarrow 2 : Q = 0, W' = 0. \text{ Donc } \Delta H_{1 \rightarrow 2} = 0$$

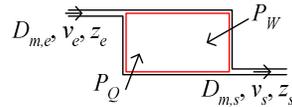
$$3 \rightarrow 4 : W' = Ri^2 \Delta t. \text{ Donc } \Delta H_{3 \rightarrow 4} = W'$$

$$\text{Ainsi, } \Delta H_{i \rightarrow f} = \Delta H_{1 \rightarrow 3} = \Delta H_{1 \rightarrow 2} + \Delta H_{2 \rightarrow 3} = \Delta H_{1 \rightarrow 2} - \Delta H_{3 \rightarrow 4} = -W'$$

$$\text{Donc } Q = -W' = -Rt^2 \Delta t$$

## B) Bilan énergétique des écoulements permanents

### 1) Hypothèses de travail



- Système : fluide dans l'enceinte rouge.
  - Le système est ouvert
  - La surface peut avoir plusieurs nappes (si par exemple il y a une turbine à l'intérieur)
- Transfert de matière :
  - Transfert uniquement convectif
  - Uniquement à l'entrée et à la sortie
- En régime permanent,  $D_{m,e} = D_{m,s} = D_m$  (car la masse est conservative)

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0. \text{ Donc } \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0$$

en régime permanent

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} d\tau = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

En dehors de l'entrée et de la sortie,  $\vec{v} \perp d\vec{S}$  ; on peut ensuite en tirer  $D_m$

- Transfert d'énergie :
    - Transfert thermique : uniquement pour  $P_Q$  (pas à l'entrée ni à la sortie)
    - Travail :
- (1) Travail de transfert (à l'entrée et à la sortie)

$$\overline{\frac{dV}{dt}} \vec{F} = P_e S_e \vec{u}$$

$$\delta W_e = \vec{F} \cdot \vec{v}_e dt = P_e S_e v_e dt$$

De même en sortie,  $\delta W_s = -P_s S_s v_s dt$  (la force est de sens opposé)

$$\text{On a de plus : } D_{m,e} dt = \rho_e S_e v_e dt, \text{ donc } S_e v_e = \frac{D_{m,e}}{\rho_e}$$

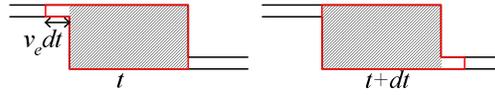
$$\text{Et de même } S_s v_s = \frac{D_{m,s}}{\rho_s}$$

$$\text{Ainsi, } \delta W_1 = \delta W_e + \delta W_s = D_m \left( \frac{P_e}{\rho_e} - \frac{P_s}{\rho_s} \right) dt$$

(2) Travail autre :  $P_W$

$$\text{On a alors } \delta W_2 = P_W dt.$$

## 2) Bilan en régime permanent



Pour le système fermé :

$$dE = \delta Q + \delta W .$$

On est en régime permanent, donc sur l'aire hachurée  $dE_{III} = 0$

$$\text{Donc } dE = D_m dt (e_{m,s} - e_{m,e})$$

$$\text{On a de plus } e_m = u_m + \frac{1}{2} v^2 + gz$$

$$\text{Et } \delta W = D_m \left( \frac{P_e}{\rho_e} - \frac{P_s}{\rho_s} \right) dt + P_w dt, \quad \delta Q = P_Q dt .$$

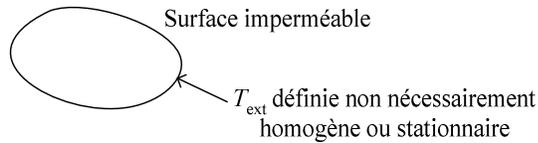
$$\text{Donc } D_m \Delta \left( u_m + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) = D_m \left( \frac{P_e}{\rho_e} - \frac{P_s}{\rho_s} \right) + P_w + P_Q$$

$$\text{Enfin, } H = U + PV, \text{ soit } h_m = u_m + \frac{P}{\rho}$$

$$\text{Donc } \boxed{D_m \Delta \left( h_m + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) = P_w + P_Q}$$

## III Bilans entropiques des systèmes fermés (2<sup>nd</sup> principe)

### A) Relation de Clausius



- Relation générale :

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\delta_e S}{dt}}_{= - \oint_{T_{\text{ext}}} \vec{j}_Q \cdot d\vec{s}} + \underbrace{\frac{\delta_i S}{dt}}_{\geq 0}$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{dS}{dt} \geq - \oint_{T_{\text{ext}}} \frac{\vec{j}_Q}{T_{\text{ext}}} \cdot d\vec{s}}$$

- Si  $T_{\text{ext}}$  est uniforme :

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{1}{T_{\text{ext}}} \times \underbrace{\left( - \oint \vec{j}_Q \cdot d\vec{s} \right)}_{\frac{\delta Q}{dt}}$$

$$\text{Soit } \boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}} \text{ (avec } dt > 0 \text{)}$$

## B) Application aux transformations réversibles

$$\text{On aura } \frac{dS}{dt} = -\oint \frac{\vec{j}_Q}{T_{\text{ext}}} \cdot d\vec{S}$$

### 1) Transformations adiabatiques

$$\text{On a alors } \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = 0$$

- Pour une transformation infinitésimale,  $dS = 0$
- Pour une transformation finie,  $\Delta S = 0$
- Pour une transformation cyclique,  $\Delta S = 0$  (2× !)

### 2) Transformations diathermes

La température intérieure est définie et uniforme (puisque la transformation est réversible), égale à  $T_{\text{ext}}$ .

$$\text{Donc } T = T(\vec{r}, t)$$

- Pour une transformation infinitésimale,  $dS = \frac{\delta Q}{T}$
- Pour une transformation finie,  $\Delta S = \int_i \frac{\delta Q}{T}$
- Pour une transformation cyclique,  $\left. \begin{array}{l} \Delta S = \oint_i \frac{\delta Q}{T} \\ \Delta S = 0 \end{array} \right\} \oint_i \frac{\delta Q}{T} = 0$

### 3) Transformations isothermes

$$\text{Ici, } T = T(\vec{r}, t)$$

- Pour une transformation finie,  $\Delta S = \frac{Q}{T}$
- Pour une transformation cyclique,  $\left. \begin{array}{l} \Delta S = \frac{Q}{T} \\ \Delta S = 0 \end{array} \right\} Q = 0$

## C) Application aux transformations irréversibles

$$\text{On aura } \frac{dS}{dt} > -\oint \frac{\vec{j}_Q}{T_{\text{ext}}} \cdot d\vec{S}$$

### 1) Transformations adiabatiques

On a  $\vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = 0$

- Pour une transformation finie,  $\Delta S > 0$
- Pour un cycle, on devrait avoir  $\Delta S > 0$  et  $\Delta S = 0$ , ce qui est impossible. On ne peut donc pas avoir de transformation cyclique adiabatique irréversible.

### 2) Transformations diathermes

On suppose que  $T_{\text{ext}}$  est uniforme.

- Pour une transformation finie,  $\Delta S > \int_i \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$
- Pour une transformation cyclique,  $\Delta S = 0 > \oint_i \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$

### 3) Transformations monothermes

Ici,  $T_{\text{ext}}(\vec{r}, t)$  (température extérieure stationnaire et homogène)

- Pour une transformation finie,  $\Delta S > \frac{Q}{T_{\text{ext}}}$
- Pour une transformation cyclique,  $0 > Q$

## IV Machines thermiques

### A) Machines monothermes

#### 1) Définition

C'est un système qui :

- Effectue des cycles
- Echange un travail avec l'extérieur
- Echange de la chaleur avec *un* thermostat à  $T_{\text{ext}} = T_0 = \text{cte}$



On représente positivement ce qui entre dans  $S$ .

#### 2) Exemple



On comprime, on détend...

### 3) Machines réversibles

- 2<sup>nd</sup> principe :  
$$\left. \begin{array}{l} \Delta S = 0 \\ \Delta S = \frac{Q}{T_0} \end{array} \right\} \text{Donc } Q = 0$$
  - 1<sup>er</sup> principe :  
$$\left. \begin{array}{l} \Delta U = 0 \\ \Delta U = Q + W \end{array} \right\} \text{Donc } W = 0$$
- Pas très utile...

### 4) Machine monotherme irréversible

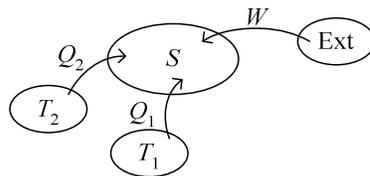
- 2<sup>nd</sup> principe :  
$$\left. \begin{array}{l} \Delta S = 0 \\ \Delta S > \frac{Q}{T_0} \end{array} \right\} \text{Donc } Q < 0$$
- 1<sup>er</sup> principe :  
$$\left. \begin{array}{l} \Delta U = 0 \\ \Delta U = Q + W \end{array} \right\} \text{Donc } W > 0$$

On peut uniquement fournir du travail pour obtenir de la chaleur.

## B) Machines dithermes

### 1) Définition

C'est un système effectuant des cycles et pouvant échanger du travail avec le milieu extérieur et de la chaleur uniquement avec deux thermostats à  $T_1$  et  $T_2$  (avec  $T_1 > T_2$ )



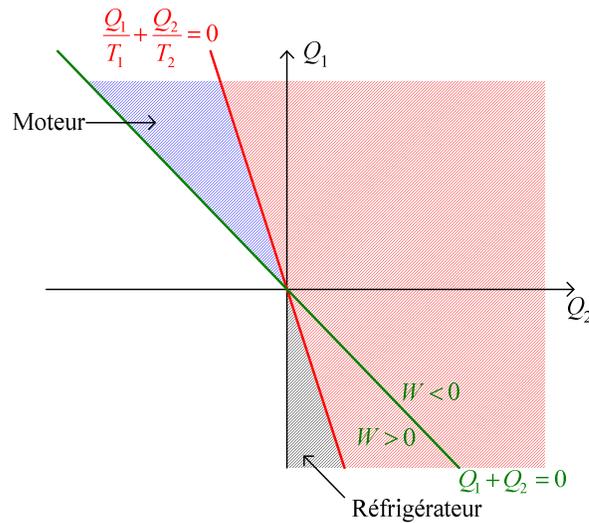
### 2) Nature du cycle

- Cas général :
  - Monotherme à  $T_1$
  - Adiabatique
  - Monotherme à  $T_2$
  - Adiabatique
- Cycle de Carnot : même que général mais réversible
  - Isotherme à  $T_1$

- Isentropique
- Isotherme à  $T_2$
- Isentropique

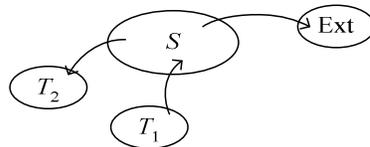
### 3) Application des principes

- 1<sup>er</sup> principe :  $0 = Q_1 + Q_2 + W$
- 2<sup>nd</sup> principe :  $0 \geq \oint_{T_{\text{ext}}} \frac{\delta Q}{T}$ , ou  $0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$
- Diagramme de Raveau :



### 4) Différents types de machine ditherme

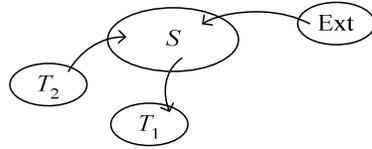
- Moteur :  
But : obtenir du travail ( $W < 0$ )  
Ainsi :  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$  (/// sur le diagramme)



$$\text{Efficacité : } e = \frac{-W}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$e \leq 1 - \underbrace{\frac{T_2}{T_1}}_{e_{\text{rév}}} \text{ . Dans tous les cas, } 0 \leq e \leq 1$$

- Réfrigérateur :  
But : Prélever de la chaleur à la source froide ( $Q_2 > 0$ )  
Ainsi,  $Q_1 < 0$ ,  $W > 0$  (/// sur le diagramme)



Efficacité :

$$e = \frac{Q_2}{W} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_1}{Q_2}} \leq \frac{T_2}{\underbrace{T_1 - T_2}_{e_{\text{rév}}}}$$

Remarque :

On n'a pas nécessairement  $e \leq 1$ . Le réfrigérateur est d'autant plus efficace que l'écart entre la source froide et la source chaude est faible.

- Pompe à chaleur :

But : donner de la chaleur à la source chaude ( $Q_1 < 0$ ), et avoir  $W$  le plus faible possible (/// sur le diagramme)

Efficacité :

$$e = \frac{-Q_1}{W} \leq \frac{T_1}{\underbrace{T_1 - T_2}_{e_{\text{rév}}}}$$

Remarque :

On peut là aussi avoir  $e > 1$ , et l'écart doit aussi être faible pour une meilleure efficacité.

## 5) Rendement

- Définition :

$$r = \frac{-W}{Q_1}$$

( $-W$  : ce qui est gagné,  $Q_1$  : ce qu'on paye pour garder la source suffisamment chaude).  $r$  correspond à l'efficacité pour un moteur, mais dans tous les cas on a  $0 < e < 1$

- 1<sup>er</sup> théorème de Carnot :

Pour une machine réversible,  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ , donc  $r = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  ;

Ainsi, le rendement d'une machine réversible ne dépend que des températures.

Pour avoir  $r = 1$ , il faut que  $T_2 = 0$  ou  $T_1 = \infty$ .

- Par définition, on a posé  $T_0 = 273,16\text{K}$  (valeur exacte) pour le point triple de l'eau. Ainsi, avec la formule du rendement, on peut calculer n'importe quel rapport de températures ( $W$  et  $Q_1$  peuvent être calculés facilement), et, grâce à  $T_0$ , n'importe quelle température.

Remarque : par définition,  $T(^{\circ}\text{C}) = T - 273,15\text{K}$  (exact aussi)

- 2<sup>ème</sup> théorème de Carnot.

Pour une machine irréversible,  $r < 1 - \frac{T_2}{T_1} = r_{\text{rév}}$  (et  $e < e_{\text{rév}}$ )

## V Compléments

### A) Transformation de Legendre

#### 1) Problème

On considère une grandeur  $Y = f(X)$  ( $U = U(S)$ )

On pose  $Z = f'(X) = \frac{dY}{dX}$ .

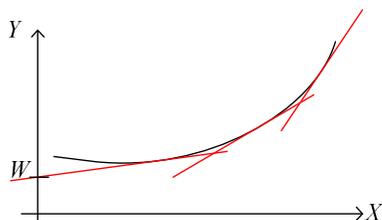
On veut alors travailler avec  $Z$  au lieu de  $X$  ( $U = U(T)$ )

#### 2) Solution bâtarde

On a  $Y = f(X)$ ,  $Z = f'(X)$ , donc  $Y = g(Z)$  avec  $g$  une primitive de  $Z$ .

La solution est mauvaise : on peut obtenir une même fonction de  $X$  avec un même  $g(Z)$  ; on perd donc des renseignements.

#### 3) Solution de Legendre



$W(Z)$  : famille de droites correspondant aux pentes de la courbe au point d'abscisse 0. Ainsi,  $W(Z)$  a les mêmes informations que  $Y(X)$ . On peut donc changer de fonction.

Equation d'une des droites :  $\frac{Y-W}{X-0} = Z$ , donc  $W = Y - ZX$

( $U(T) = U - TS = F$ )

### B) Moteur fonctionnant entre deux briques

$\alpha$        $\beta$

On considère deux briques identiques, de même capacité  $c$ , indilatables.

A  $t = 0$ ,  $T_\alpha = T_1$ ,  $T_\beta = T_2$ .

• Mise en contact adiabaticquement :

- Calcul de  $T_f$  :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

$dU_\alpha = cdT_\alpha$ ,  $dU_\beta = cdT_\beta$  (en considérant une transformation où la température reste uniforme dans chaque compartiment)

$$\text{Donc } c(T_f - T_1) + c(T_f - T_2) = 0, \text{ soit } T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

- Calcul de  $\Delta S$  :

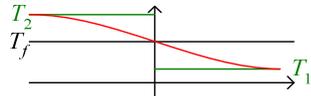
$$dS_\alpha = \frac{\delta Q_{\alpha,\text{rév}}}{T_\alpha} = \frac{cdT_\alpha}{T_\alpha}, \quad dS_\beta = \frac{\delta Q_{\beta,\text{rév}}}{T_\beta} = \frac{cdT_\beta}{T_\beta}$$

$$\text{Donc } \Delta S = c \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 2c \ln \frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} > 0$$

Et  $\Delta S = S_i$  (adiabatique)

- Calcul de  $S_{i,\alpha}$  et  $S_{i,\beta}$  :

$S_{i,\alpha} = \Delta S_\alpha - S_{e,\alpha}$  ; il faut donc connaître la température à l'interface.



On admet pour l'instant qu'à l'interface  $T = T_f$

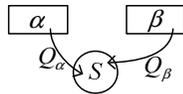
$$\text{Ainsi, } S_{e,\alpha} = \int \frac{\delta Q_\alpha}{T_f} = \frac{Q_\alpha}{T_f}$$

$$Q_\alpha = \Delta U_\alpha = c(T_f - T_1).$$

$$\text{Donc } S_{i,\alpha} = c \left( 2 \ln \frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} + \frac{T_1}{T_f} - 1 \right), \text{ et de même } S_{i,\beta} = c \left( 2 \ln \frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} + \frac{T_2}{T_f} - 1 \right)$$

Remarque : c'est la brique ayant la température initiale la plus importante pour laquelle  $S_i$  est le plus grand.

• On place maintenant une machine thermique entre les deux briques :



On suppose les cycles élémentaires, c'est-à-dire que les températures  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  sont constantes au cours d'un cycle.

$$\text{On a } \delta Q_\alpha + \delta Q_\beta + \delta W = 0, \text{ et } \frac{\delta Q_\alpha}{T_\beta} + \frac{\delta Q_\beta}{T_\beta} \leq 0$$

Donc  $\delta Q_\alpha = -cdT_\alpha$ , et  $\delta Q_\beta = -cdT_\beta$  (pour le signe - :  $\delta Q_\alpha$ , c'est ce qui est fourni au système, donc enlevé à la brique)

$$\text{Donc } c \frac{dT_\alpha}{T_\alpha} + c \frac{dT_\beta}{T_\beta} \geq 0$$

$$\text{Donc } c \ln \frac{T'_f}{T_1} + c \ln \frac{T'_f}{T_2} \geq 0, \text{ soit } T'_f \geq \sqrt{T_1 T_2}.$$

$$\text{Ainsi, } \delta W_{\text{récupérable}} = -\delta W = \delta Q_\alpha + \delta Q_\beta$$

$$\text{Soit } W_{\text{récupérable}} = -c(T'_f - T_1) - c(T'_f - T_2) = 2c(T_f - T'_f)$$

$$\text{Et } W_{\text{max récupérable}} = 2c \left( \frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2} \right) \text{ en cas de réversibilité (positif car une}$$

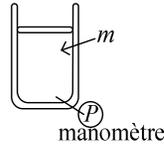
moyenne arithmétique est plus grande qu'une moyenne géométrique)

## C) Ecoulement dans une tuyère

### 1) Préliminaire : vitesse du son dans un fluide

Dans un fluide quelconque,  $c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$

Pour le calcul :



On fait une petite variation du piston,  $\delta V$ , réversible (donc isentropique)

On calcule ensuite  $\delta P$ ,  $\delta \rho$ , puis on a  $\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$  !!

Pour un gaz parfait :

A  $S$  constante,  $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$

Donc  $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$ , soit  $\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$ .

Comme  $PV = nRT$ , on a  $P = \rho \frac{RT}{M}$  ( $M$ : masse molaire du gaz)

Ainsi,  $\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{RT}{M}$ , soit  $c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$

Pour l'air, à 25°C, on a  $c = 345 \text{ m.s}^{-1}$  ( $\gamma = 1,4$ )

### 2) Ecoulement permanent dans une tuyère



On suppose que la section  $S_i$  ne dépend que de  $x$  (on a ainsi une symétrie de révolution autour de l'axe  $x$ )

On suppose aussi que l'écoulement est permanent et unidimensionnel ( $v(x), P(x), T(x), \rho(x)$ )

- Gaz parfait :  $P = \rho \frac{RT}{M}$

- Conservation de la masse :

$dm = \rho S_i v dt$ , soit  $\rho S_i v = \text{cte}$

- 1<sup>er</sup> principe :

$D_m \Delta(h_m + \frac{1}{2}v^2) = 0$  (on suppose qu'il n'y a pas de variation d'énergie potentielle, et que le système ne reçoit pas d'énergie de l'extérieur)

Donc  $h_m + \frac{1}{2}v^2 = \text{cte}$

- On suppose de plus que chaque tranche de gaz (verticale) n'échange pas de chaleur avec les autres et évolue réversiblement. Donc  $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$ .

Ecriture différentielle logarithmique de tous les points précédents (sauf le troisième) :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS_t}{S_t} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$c_{p,m}dT + vdv = 0$$

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

On obtient ainsi :

$$\frac{dS_t}{S_t} + \frac{dv}{v} \left( 1 - \gamma \frac{\rho}{P} \right) = 0 ; \text{ pour un gaz parfait, } \frac{\rho}{P} = \frac{1}{c^2} .$$

$$\text{Donc } \frac{dS_t}{S_t} = \frac{dv}{v} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\frac{v}{c} = M : \text{ nombre de Mach.}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{dS_t}{S_t} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1) \text{ (Loi de Hugoniot)}$$

### 3) Discussion

- Sens de variation de  $v$ ,  $T$ ,  $P$  :

$$- h_m + \frac{1}{2}v^2 = \text{cte}$$

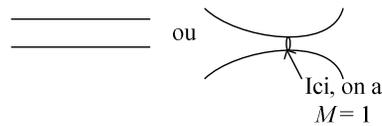
Si  $v$  augmente,  $h_m$  diminue, donc  $T$  diminue.

$$- dh_m = Tds_m + \frac{dP}{\rho} \text{ (C'est } dH = TdS + VdP \text{ pour une unité de masse)}$$

$$\text{Donc } dh_m = \frac{dP}{\rho}$$

Donc si  $v$  augmente,  $T$  diminue et  $P$  diminue aussi.

- Si on veut que  $M = 1$ , on doit avoir  $\frac{dS_t}{S_t} = 0$  :



- Tuyère convergente :

$$\frac{dS_t}{S_t} < 0$$

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} < 0 . \text{ Donc, si } M < 1, dv > 0 \text{ et si } M > 1, dv < 0$$

- Pour une tuyère divergente, on inverse les relations.