

Chapitre 6 : Les fluides à l'équilibre

I Théorie cinétique du gaz parfait

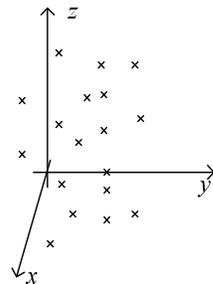
A) Modèle du gaz parfait monoatomique

On suppose que toutes les particules sont ponctuelles et sans interactions (ni interaction de contact ni à distance) sauf par l'intermédiaire de la paroi.

B) Répartition des vitesses

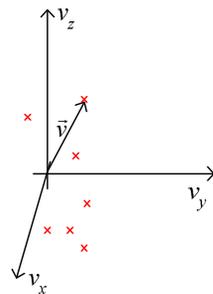
1) Espace des positions et des vitesses

- Espace des positions :



On suppose que la répartition est homogène.

- Espace des vitesses :



A une particule de vitesse \vec{v} , on associe le point M dans l'espace des vitesses tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.

Remarque :

L'espace des positions est borné (par la paroi), mais pas celui des vitesses en mécanique classique (par une sphère de rayon c en mécanique relativiste...)

2) Répartition dans l'espace des vitesses

On suppose que le milieu est isotrope.

Le nuage de point dans l'espace des vitesses est donc à symétrie sphérique.

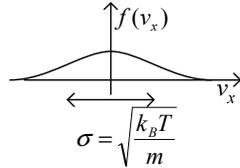
- Nombre de particule dont la vitesse sur Ox est entre v_x et $v_x + dv_x$:

$$dN = A e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_x^2}{k_B T}} dv_x .$$

On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} dN = N$. Donc $A = \sqrt{\frac{m}{2\pi \cdot k_B T}} N$.

$$\text{Ainsi, } \frac{dN}{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi \cdot k_B T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_x^2}{k_B T}} dv_x = f(v_x) dv_x$$

f est une densité de probabilité (c'est-à-dire que $f \geq 0$, et $\int f(v_x) dv_x = 1$).



- Nombre de particules de vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$, v_y et $v_y + dv_y$, v_z et $v_z + dv_z$ (c'est-à-dire entre \vec{v} et $\vec{v} + d\vec{v}$) :

On suppose que v_x , v_y et v_z sont indépendants.

$$\text{On a alors } \frac{\delta^3 N}{N} = f(v_x) dv_x \times f(v_y) dv_y \times f(v_z) dv_z .$$

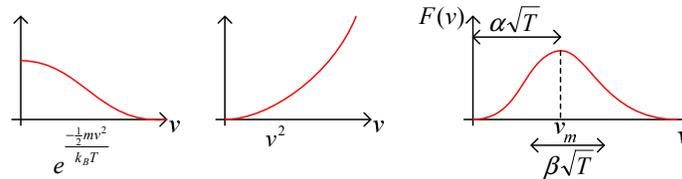
- Nombre de particules dont la vitesse en module est comprise entre v et $v + dv$:

$$dN = \iiint \delta^3 N = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}} \underbrace{\iiint dv_x dv_y dv_z}_{=4\pi v^2 dv}$$

(On reconnaît le coefficient de normalisation $\left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$, la dégénérescence

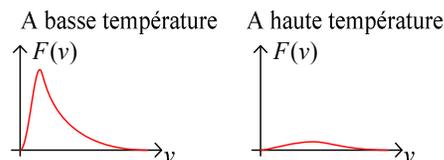
du niveau d'énergie $4\pi v^2 dv$ dans la statistique de Maxwell-Boltzmann)

$$\text{Donc } \frac{dN}{N} = F(v) dv . F : \text{densité de probabilité, } \int_0^{+\infty} F(v) dv = 1 .$$



Explication de l'allure :

Le nombre de molécules diminue avec v , mais la surface considérée augmente.



Entropie et désordre :

$$S = S_0 + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

- (1) $nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$: L'entropie augmente lorsque V augmente : on a moins de renseignement sur la *position* de la particule.
- (2) $nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$: En augmentant la température, on augmente le désordre dans l'espace des *vitesse*s.

3) Vitesses

- Vitesses caractéristiques :
 - Vitesse la plus probable : v_m tel que $F(v_m)$ soit maximum, c'est-à-dire

lorsque $\frac{dF}{dv} = 0$; On a $v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.

- Vitesse moyenne :

$$\bar{v} = \frac{\int v dN}{N} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

- Vitesse quadratique moyenne :

$$u = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- Vitesse du son : $c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$.

Les vitesses caractéristiques sont toutes du même ordre, égales à un facteur numérique près.

- Influence de m :

A $T = 300\text{K}$:

$$u \begin{matrix} \text{N}_2 & \text{H}_2 & e^- \\ \boxed{517\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} & 1930\text{m}\cdot\text{s}^{-1} & 1,2\cdot 10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{matrix}$$

- Influence de T :

Pour le Césium Cs, $M = 199\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ (gazeux à une température suffisante)

Pour avoir $u = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, il faut $T = \frac{mu^2}{3k_B} = 5,3\cdot 10^{-3}\text{K}$ (limite qu'on peut

actuellement atteindre pour la température)

Pour avoir $u = 1\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ (visible à l'œil nu, correspond à peu près à la vitesse d'un escargot), il faut $T = 5,3\cdot 10^{-7}\text{K}$

C) Température et pression

1) Température

- Energie cinétique moyenne d'une particule :

On a $\varepsilon_{c,i} = \frac{1}{2} m v_i^2$, et $\varepsilon_c = \langle \varepsilon_{c,i} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2$.

Ainsi, $\varepsilon_c = \frac{3}{2} k_B T$ (on avait $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$)

- T apparaît ici comme une mesure de l'énergie cinétique moyenne.
- ε_c est indépendant de la masse : par exemple, dans l'air, toutes les molécules ont la même énergie cinétique moyenne.

- Energie interne (dans un gaz parfait, sans interaction) :

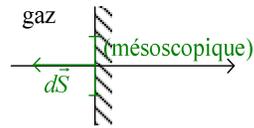
$$U = \sum \varepsilon_{c,i} = N \varepsilon_c = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

- Capacité thermique à volume constant :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} n R$$

2) Pression sur les parois

- Analyse physique :



vitesse \vec{v}_i , quantités de mouvement $\vec{p}_i = m \vec{v}_i$; pour une particule qui percute la paroi : $0 < v_{ix} < +\infty$, $-\infty < v_{iy} < +\infty$, $-\infty < v_{iz} < +\infty$

Lorsque la molécule est adsorbée, elle exerce une force $F_x > 0$, et de même lorsqu'elle est désorbée. (dans les deux cas, elle « pousse » sur la paroi).

Elle repart alors avec une vitesse \vec{v}'_i , une quantité de mouvement $\vec{p}'_i = m \vec{v}'_i$, et $-\infty < v'_{ix} < 0$, $-\infty < v'_{iy} < +\infty$, $-\infty < v'_{iz} < +\infty$.

- Calcul :

- Variation de la quantité de mouvement des particules qui frappent dS pendant dt :

$$\delta^2 \vec{p} = \sum \vec{p}'_i - \sum \vec{p}_i.$$

On a $\begin{cases} \sum p'_{iy} = 0 & \sum p_{iy} = 0 \\ \sum p'_{iz} = 0 & \sum p_{iz} = 0 \end{cases}$ (car la répartition est symétrique)

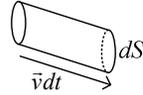
Et $\sum p'_{ix} = -\sum p_{ix}$ (pas de transfert global d'énergie)

$$\text{Ainsi, } \delta^2 \vec{p} = -2 \sum p_{ix} \vec{u}_x.$$

- Calcul de $\delta^2 \vec{p}$:

$\delta^3 N$: nombre de particules qui ont une vitesse sur Ox comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ et frappant dS pendant dt .

$$\text{On a alors, } \delta^2 \vec{p} = \int_{v_x=-\infty}^{+\infty} -2mv_x \delta^3 N \vec{u}_x$$



(1) Volume : $v_x dt dS$

(2) $Nf(v_x)dv_x$: nombre de particules de vitesse v_x dans l'enceinte.

$$\text{Ainsi, } \delta^3 N = N \times f(v_x) dv_x \times \frac{v_x dS dt}{v}$$

$$(3) \delta^2 \vec{p} = -2 \frac{N}{V} \left(\int_0^{+\infty} mv_x^2 f(v_x) dv_x \right) dS \cdot dt \cdot \vec{u}_x$$

$$\text{Or, } 2 \int_0^{+\infty} mv_x^2 f(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} mv_x^2 f(v_x) dv_x = \langle mv_x^2 \rangle$$

$$\text{De plus, } \langle mv_x^2 \rangle = \langle mv_y^2 \rangle = \langle mv_z^2 \rangle = \frac{2}{3} \epsilon_c = k_B T$$

(car $\langle mv_x^2 \rangle + \langle mv_y^2 \rangle + \langle mv_z^2 \rangle = 2\epsilon_c$, et le milieu est isotrope)

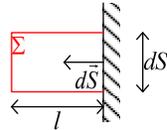
$$\text{Ainsi, } \delta^2 \vec{p} = -\frac{N}{V} k_B T dS \cdot dt \cdot \vec{u}_x$$

- Force exercée sur dS :

$$d\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow i} = -d\vec{F}_{i \rightarrow \text{gaz}} = -\frac{\delta^2 \vec{p}}{dt} = \frac{N}{V} k_B T dS \vec{u}_x = \frac{N}{V} k_B T d\vec{S}$$

$$\text{Donc } P = \frac{N}{V} k_B T = \frac{nRT}{V}$$

• Pression et flux de quantité de mouvement normale :



$$\delta^2 \vec{p} = d\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}} dt + \delta^2 \vec{p}_{\text{flux de particules}}$$

On est en régime permanent ; donc $\delta^2 \vec{p} = \vec{0}$

$$d\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}} = Pd\vec{S} = -PdS\vec{u}_x$$

On peut supposer que ce qui entre par une paroi latérale du cylindre en ressort ; on ne doit donc considérer que les extrémités :

$$\delta^2 \vec{p}_{\text{flux}} = \delta^2 p_{x,\text{flux}} \vec{u}_x = -\vec{j}_{P_x} \cdot d\vec{S} \cdot dt \cdot \vec{u}_x$$

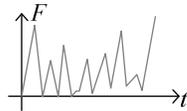
$$\text{Donc } Pd\vec{S} = \vec{j}_{P_x} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{u}_x = \vec{j}_{P_x} \cdot \vec{u}_x dS \cdot \vec{u}_x$$

$$\text{Soit } P = \vec{j}_{P_x} \cdot \vec{u}_x.$$

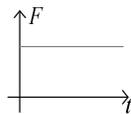
Ainsi, P est la projection de la densité de flux de quantité de mouvement normale sur la composante normale.



Si on place un ressort microscopique sur la paroi :



Ou, si le ressort est mésoscopique :



Ainsi, P peut être vue comme la force moyenne par unité de surface.

3) Pression au sein d'un gaz



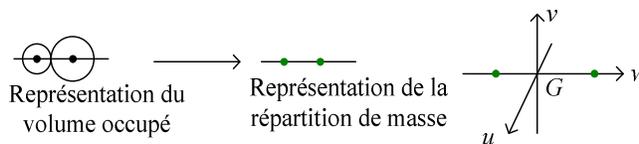
Comment définir la pression au sein d'un gaz ?

Une particule qui entre a une quantité de mouvement normale positive, et celle qui sort a une quantité de mouvement normale négative.

Ainsi, elles ne vont pas s'annuler, mais s'ajouter dans le flux (\vec{j}_p est ce qui entre – ce qui sort).

Ainsi, on peut poser $P = \vec{j}_p \cdot \vec{n}$.

D) Gaz parfait diatomique



G : centre d'inertie.

1) Energie élémentaire

- Energie cinétique de translation :

$$E_{c,t} = \frac{1}{2} m \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (v_x, v_y, v_z : \text{composantes de la vitesse de } G)$$

- Energie cinétique de rotation :

$$\epsilon_{c,r} = \frac{1}{2} J_u \omega_u^2 + \frac{1}{2} J_w \omega_w^2 \quad (\text{vu plus tard en mécanique ; } J : \text{moment d'inertie pour la rotation})$$

- Energie cinétique de vibration :
(Dû au fait que la distance entre les deux particules n'est pas constante)

$$\mathcal{E}_v = \frac{1}{2} \mu \dot{w}^2 + \frac{1}{2} k w^2$$

(μ : masse réduite, \dot{w} : vitesse du mobile réduit)

- Energie électronique
- Energie nucléaire

2) Energie interne

$$U = U_t + U_r + U_v + U_e + U_n$$

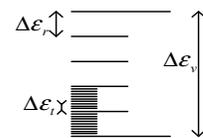
3) Niveaux d'énergie

- Rappel :

$T_c = \frac{\Delta \mathcal{E}}{k_B}$; si $T \ll T_c$, seul l'état le plus bas est peuplé ; si $T \gg T_c$ les deux

états sont aussi peuplés.

- Les niveaux d'énergie de translation sont très rapprochés par rapport aux niveaux d'énergie de rotation, qui sont eux mêmes très rapprochés par rapport aux niveaux d'énergie de vibration...(puis électronique, nucléaire) :



Ainsi, $\Delta \mathcal{E}_t \ll \Delta \mathcal{E}_r \ll \Delta \mathcal{E}_v \ll \Delta \mathcal{E}_e \ll \Delta \mathcal{E}_n$

Soit $T_t \ll T_r \ll T_v \ll T_e \ll T_n$ ($T_t \sim 10^{-18}$ K)

4) Capacités thermiques

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

- A très basse température : $T_t \ll T \ll T_r$

On a alors $U_r, U_v, U_e, U_n = \text{cte}$ (seul le niveau fondamental est peuplé)

Ainsi, le gaz se comporte comme un gaz monoatomique :

$$C_V = \frac{3}{2} nR$$

- A plus haute température : $T_r \ll T \ll T_v$

$$\text{Ainsi, } \frac{U}{N} = \underbrace{\frac{3}{2} k_B T}_{U_t} + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2} J_u \omega_u^2 \right\rangle}_{=\frac{1}{2} k_B T} + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2} J_v \omega_v^2 \right\rangle}_{=\frac{1}{2} k_B T} + \text{cte}$$

Donc $\frac{U}{N} = \frac{5}{2}k_B T + \text{cte}$, soit $C_V = \frac{5}{2}nR$.

- A plus haute température : $T_v \ll T \ll T_e$

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{w}^2 \right\rangle}_{=\frac{1}{2}k_B T} + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}k \cdot w^2 \right\rangle}_{=\frac{1}{2}k_B T} + \text{cte}$$

Soit $\frac{U}{N} = \frac{7}{2}k_B T$.

Remarque :

Ce résultat est un cas particulier du théorème de l'équipartition de l'énergie :

Si $\varepsilon = \sum \alpha_i q_i^2$ (où q_i est un paramètre), alors $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}k_B T$:

Chaque degré de liberté (q_i) contribuant à l'énergie de façon quadratique contribue à l'énergie moyenne en $\frac{1}{2}k_B T$ (dans l'approximation où on considère qu'on a un continuum d'énergie, c'est-à-dire pour T suffisamment grand par rapport à la température caractéristique)

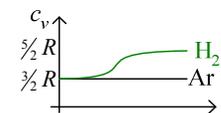
- Ordres de grandeur :

$$T_e \sim 12000\text{K} \left(= \frac{1\text{eV}}{k_B} \right)$$

$$T_v \sim 700\text{K} \rightarrow 5000\text{K}$$

$$T_r \sim 0,5\text{K} \rightarrow 50\text{K}$$

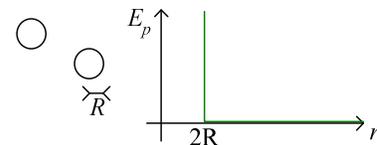
$$T_i \sim 10^{-18}\text{K}$$



E) Chocs entre les particules

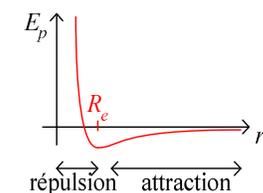
On revient au monoatomique

1) Modèle des sphères dures



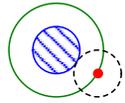
Il n'y a pas d'interaction quand elles sont à distance, et elles sont indéformables.

En réalité :



En R_e , il n'y a ni attraction ni répulsion.

2) Section efficace de choc



On considère qu'il y a une particule (hachurée en bleu) dont la surface de protection est la sphère (verte) de rayon $2R$ (où R est le rayon d'une particule), et que les autres sont ponctuelles (rouge).

Lorsque la particule bleue se déplace, elle décrit un sillage de section $\sigma = 4\pi R^2 (= \pi(2R)^2)$.

σ : section efficace de choc.

3) Libre parcours moyen

- C'est la distance moyenne entre deux chocs
- Calculs :
 - On suppose que la vitesse de la particule bleue est constante en module.
 - Les autres particules sont fixes.



Volume du boyau = $\sigma \times v\Delta t$.

Nombre de particules dans le boyau = $n \cdot \sigma \times v\Delta t$

(correspond ainsi au nombre de choc)

Distance parcourue = $v\Delta t$

Donc libre parcours moyen $l = \frac{v\Delta t}{n \cdot \sigma \times v\Delta t} = \frac{1}{n\sigma}$

- Commentaires :
 - Le libre parcours moyen est indépendant de la température (ce qui est normal puisque bien que les particules aient des chocs plus souvent quand la température augmente, elles vont plus rapidement donc peuvent parcourir la même distance)
 - On obtient le même résultat si on suppose que v n'est pas constante.

Si les autres particules ne sont pas fixes, on obtient $l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$.

On a $PV = Nk_B T$. Donc $n = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T}$. $\sigma = 4\pi R^2$

Ainsi, $l \approx 0,1 \mu m$

- Aspect probabiliste du libre parcours moyen :

On considère N_0 particules.

On note $N(x)$ le nombre de particules qui, après avoir parcouru une distance x , n'ont toujours pas eu de chocs.

On suppose enfin que $dp = \alpha dx$, où α est indépendant de x . Ainsi, la probabilité dp d'avoir un choc en parcourant dx ne dépend pas de la distance parcourue depuis le dernier choc.

$\frac{-dN(x)}{N(x)} = dp = \alpha \cdot dx$ ($-dN(x)$ nombre de particules qui ont un choc entre x et $x + dx$)

Ainsi, $N(x) = N_0 e^{-\alpha \cdot x}$.

Distance moyenne parcourue depuis $x = 0$:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} x \cdot (-dN(x)) = \frac{1}{N_0} \left[\underbrace{-N(x)x}_0^{+\infty} + \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} N(x) dx \right] = \frac{1}{\alpha}$$

Ainsi, $l = \frac{1}{\alpha}$ (puisque la probabilité d'avoir un choc ne dépend pas de la distance parcourue).

Donc $dp = \frac{dx}{l}$.

De même entre t et $t + dt$, $dp = \frac{dt}{\tau}$ où τ est le temps libre moyen entre deux chocs.

II Pression dans les fluides

A) Pression cinétique, pression moléculaire

1) Pression cinétique

- Définition (rappel) :



$$P_c = \vec{j}_{P_n} \cdot \vec{n}$$

Et $d\vec{F} = -P_c d\vec{S}$ ($P_c > 0$)

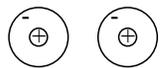
- Ordre de grandeur :

- Gaz : $P_c = \frac{nRT}{V} = 1 \text{ bar}$

- Liquide : $P_c = \frac{nRT}{V} = 10^3 \text{ bar}$

2) Pression moléculaire

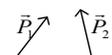
- Interactions moléculaires :
 - Répulsives à courte distance :



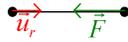
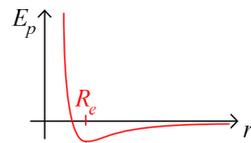
(Peut être vu comme conséquence du principe d'exclusion de Pauli ou de la force de Coulomb)

- Attractives à longue distance (dipôle/dipôle) :

Forces de Van der Waals :

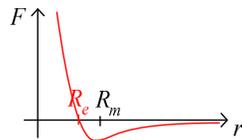


La force entre les deux dipôles est en général attractive, avec une énergie potentielle en $1/r^6$:



On a $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$.

Et $F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$:



(1) R_e :

R_e correspond au diamètre de la particule (nuage compris)

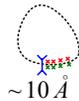
$\frac{R_e}{2}$ s'appelle le rayon de Van der Waals de la molécule.

(2) On a, à cause de l'agitation thermique, $\langle r \rangle > R_e$.

(3) Formule empirique de Lenhard-Jones :

$$E_p = \frac{-A}{R^6} + \frac{B}{R^{12}}$$

- Macroscopiquement :

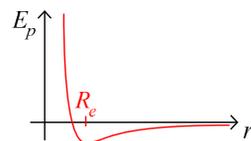


\vec{F}_{ext}

On peut considérer que les interactions concernent une surface dS .

On définit $d\vec{F} = P_m d\vec{S}$. (En général, $P_m \geq 0$)

- Cas des gaz :
 - Gaz parfaits : $P_m = 0$ (pas d'interaction)
 - Gaz réels : $P_m \neq 0$ mais $P_m \ll P_c$:



$$R_e \approx 300\text{pm}, \quad \langle r \rangle = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} \sim \sqrt[3]{\frac{k_B T}{P}} \sim 4000\text{pm}.$$

Donc \vec{F} est très faible, donc P_m aussi.

- Cas des liquides :
 - $P_m \neq 0$ et $P_m \sim P_c$: $\langle r \rangle \sim R_e$.

3) Pression totale

$$P = P_c - P_m$$

(Car $d\vec{F} = -P_c d\vec{S}$, $d\vec{F}' = P_m d\vec{S}$, donc $d\vec{F} + d\vec{F}' = -(P_c - P_m)d\vec{S} = -Pd\vec{S}$)

- Cas des gaz :

$$P_m \ll P_c ; \text{ donc } P \approx P_c = n \frac{RT}{V}$$

- Modèle de Van der Waals :

$$(1) P_m = \frac{a}{V_m^2} = \frac{n^2 a}{V^2}$$

(attention aux notations : le m de P_m est pour moléculaire et celui de V_m pour molaire)

$$\text{Ainsi, } P = n \frac{RT}{V} - \frac{n^2 a}{V^2}, \text{ soit } \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) V = nRT$$

(2) On ne peut pas réduire le volume à 0 lorsque $P \rightarrow +\infty$; la formule ne convient donc pas ; on ajoute un terme correctif :

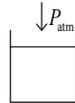
$V \rightarrow V - nb$ (sauf dans le terme correctif de la pression).

$$\text{Ainsi, } \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT.$$

nb s'appelle le covolume.

Le terme correctif de la pression correspond ainsi à la prise en compte des interactions, et celui du volume au fait que les particules ont un volume fini.

- Les liquides
 - Ordre de grandeur :
 $P_c \sim 1000\text{bar}$, $P \sim 1\text{bar}$; donc $P_m \sim 1000\text{bar}$.

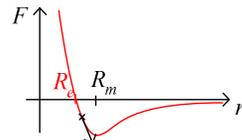


T détermine P_c , P_{atm} détermine P , et P_m compense les deux.

- Cas des liquides tirés :



En tirant suffisamment lentement, on peut atteindre une pression P négative :



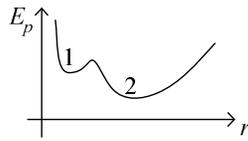
Lorsque r augmente, $|F|$ augmente, donc P_m aussi.

Ainsi, $P = P_c - P_m$ diminue.

Le liquide est dans un état métastable :

Il devrait normalement en dessous d'une certaine pression passer à l'état gazeux, qui est l'état le plus stable, mais l'état dans lequel il se trouve est

suffisamment stable pour qu'il y reste. C'est analogue à ce genre de courbe d'énergie potentielle :



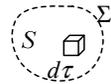
L'état 1 est stable, mais une perturbation suffisamment importante mènera à l'état 2.

Si on assimile un gaz à un ressort, celui-ci travaillerait toujours en compression ; pour un liquide, il travaillerait soit en compression (quand $P > 0$), soit en extension (quand $P < 0$)

B) Relation fondamentale de l'hydrostatique

1) Cas général

- Forces dans un fluide à l'équilibre :



- Forces volumiques : $d\vec{F} = \vec{f} \cdot d\tau$

$$\text{Ainsi, } \vec{F} = \iiint \vec{f} \cdot d\tau$$

Exemples :

$$d\vec{F} = dm \cdot \vec{g} = \rho \vec{g} \cdot d\tau$$

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{E} = \rho_q \vec{E} \cdot d\tau$$

Remarque :

Ce sont des actions à longue portée (elles ont lieu dans tout le système).

- Forces de pression :



Forces s'exerçant sur la surface :

$$d\vec{F} = -Pd\vec{S}, \text{ soit } \vec{F} = -\iint Pd\vec{S}$$

Dans le cas général (en dehors du cadre de l'hydrostatique), on devrait aussi ajouter une force surfacique tangentielle (exemple : frottement visqueux)

- Equivalence des forces de pression à des forces volumiques :

$$\text{On a } \vec{F} = \iint -Pd\vec{S} = \iiint -\vec{\nabla}P \cdot d\tau$$

$$\text{Ainsi, pour un volume élémentaire : } d\vec{F} = -\vec{\nabla}P \cdot d\tau$$

$$\text{Densité volumique de force de pression : } \vec{\varphi} = -\vec{\nabla}P$$

$$\text{Ainsi, } d\vec{F} = \vec{\varphi} \cdot d\tau$$

Remarque : il faut une surface fermée (pour avoir un volume)

- Expression de l'équilibre :

$$d\vec{F}_{\text{volumique}} + d\vec{F}_{\text{pression}} = \vec{0}, \text{ soit } \vec{f} \cdot d\tau + \vec{\varphi} \cdot d\tau = \vec{0}, \text{ donc } \vec{f} = \vec{\nabla}P$$

2) Cas d'un fluide dans un champ de pesanteur uniforme

$$\begin{array}{c} \downarrow \vec{g} \quad \uparrow z \\ \vec{g} = -g \vec{u}_z \end{array}$$

- Equilibre hydrostatique :

$$- \vec{F} = \rho \vec{g}, \text{ soit } \vec{\nabla} P = \rho \vec{g}, \text{ c'est-à-dire } \vec{\nabla} P = -\rho g \vec{u}_z$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ (c'est-à-dire } P = P(z)),$$

$$\text{et } \frac{dP}{dz} = -\rho g, \text{ (soit } \rho = \rho(z))$$

- Equation d'état : $f(P, T, \rho) = 0$; donc $T = T(z)$.

$$- \text{ On a ainsi } dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

- Cas des liquides :

On considère que $\rho \approx \text{cte}$.

- Théorème de Pascal :

$$\text{On obtient par intégration } P - P_0 = -\rho \cdot g \cdot (z - z_0).$$

Remarques:

- o z doit être dirigé vers le haut (sinon on change de signe)
- o On ne peut plus considérer que $\rho = \text{cte}$ au voisinage du point critique, ou lorsque $z - z_0$ est très grand.
- o L'énoncé de Pascal était : « les liquides transmettent intégralement la pression d'un point à un autre du système »
- Ordre de grandeur :

Eau : pour $\Delta P = 1 \text{ bar}$, $\Delta z = -10,33 \text{ m}$.

Mercure ($\rho = 13,6 \text{ g.cm}^{-3}$) : pour $\Delta P = 1 \text{ atm}$, $\Delta z = -0,76 \text{ m}$.

- Cas des gaz :

$$\text{Gaz parfait : } \rho = \frac{MP}{RT}$$

$$\text{Donc } \frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{RT} dz. \text{ Si } T = T_0 \text{ uniforme,}$$

$$P = P_0 e^{\frac{-Mg}{RT_0} z} : \text{ formule du nivellement barométrique.}$$

$$\text{Si on note } H = \frac{RT_0}{Mg}, \text{ on a } P = P_0 e^{-z/H}.$$

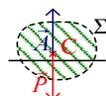
A $T_0 = 300 \text{ K}$, $H = 8800 \text{ m}$.

Dans un laboratoire, on peut donc considérer que $P = P_0$.

3) Théorème d'Archimède

- Enoncé et démonstration :

Fluide(s) à l'équilibre dans \vec{g} :



C : centre d'inertie du fluide délimité par Σ .

Ce fluide est soumis à son poids \vec{P} , dont le point d'application est en C .

La résultante \vec{A} des forces exercées sur ce fluide doit donc être appliquée aussi en C (où au moins à la verticale, pour éviter une rotation), et $\vec{A} = -\vec{P}$.

On remplace le volume délimité par Σ par un solide.

Enoncé :

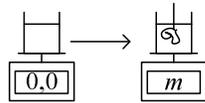
Les forces de pression exercées sur un solide en équilibre par les fluides sur sa surface est une force opposée au poids du fluide déplacé et appliquée au centre d'inertie du fluide. Ce centre est aussi appelé centre de poussée.

- Corollaire :

On veut mesurer le volume d'un échantillon solide.

1^{ère} méthode : on peut placer l'échantillon dans une éprouvette graduée remplie d'eau à ras bord, le retirer et voir quel volume a été déplacé ; la mesure n'est pas précise, d'autant plus que l'échantillon sort tout mouillé.

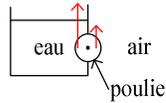
2^{ème} méthode : on utilise le théorème de l'action et de la réaction :



On connaît donc la masse d'eau déplacée m , d'où on tire V .

- Précaution d'utilisation :

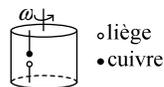
- Le solide doit être totalement entouré de fluide
- Le solide doit pouvoir être remplacé par du fluide à l'équilibre :



La poulie va donc tourner éternellement, et on obtient un moteur perpétuel de première espèce ! (C'est-à-dire qui viole le premier principe)

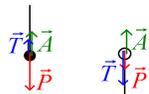
- Le théorème d'Archimède est un théorème de statique.

- Généralisation :



On n'a plus seulement un champ de pesanteur.

- Analyse des forces pour $\omega = 0$:

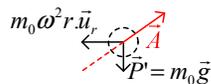


Le liège est moins dense que l'eau, donc la force d'Archimède est plus forte en module que le poids. C'est le contraire pour le cuivre.

Le fil compense les deux forces.

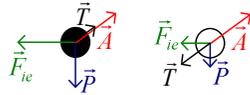
- Analyse des forces pour $\omega \neq 0$:

Il faut ajouter la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_r$.



Pour une boule de fluide à l'équilibre, la force d'Archimède doit compenser les deux autres ; on peut donc calculer \vec{A} ($\vec{A} = -m_0\omega^2 r \vec{u}_r - m_0\vec{g}$ où m_0 est la masse de la boule d'eau).

Ainsi, la force d'Archimède sera la même pour la boule de cuivre et de liège, et la tension du fil compensera les forces (elle sera colinéaire à \vec{A} puisque \vec{F}_{ie} et \vec{P} sont proportionnels à m) :



On obtient ainsi :



III Etude expérimentale des fluides

On considère que $n = \text{cte}$, P , V , T sont définis et $W = W_p$ ($W' = 0$).

A) Equation d'état, coefficients stoechiométriques

1) Equation d'état

C'est une équation $f(P, V, T) = 0$ ou $f(P, \rho, T) = 0$ (en variables extensives)

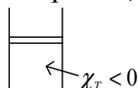
- C'est une relation expérimentale
- Ce n'est pas une loi fondamentale
- L'équation n'est valable que pour une transformation quasi-statique.
- Certains fluides peuvent ne pas avoir d'équation d'état (systèmes à hystérésis)
- On peut adapter les résultats obtenus ici à d'autres types de système (En changeant bien sûr les variables : par exemple, pour un fil, en fonction de L, F, T)

2) Coefficients thermodynamiques

• Définitions :

- $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$: coefficient de dilatation isobare.
- $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$: coefficient de compression isochore.
- $\chi_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$: coefficient de compressibilité isotherme.

Les coefficients α, β peuvent être positifs ou négatifs, mais χ_T est forcément positif, car sinon le système est instable :



Ainsi, P augmente ou diminue lorsque V augmente ou diminue.

En appuyant légèrement sur le piston (V diminue), le piston va s'effondrer, (puisqu'alors P diminue), et de même si on le soulève légèrement (V augmente), il va continuer à monter tout seul.

- On a $\alpha = \alpha(T, V)$, $\beta = \beta(T, P)$ et $\chi_T = \chi_T(P, V)$.
- On a $\alpha = \beta \times \chi_T \times P$ (car $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \times \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \times \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$)

Comme P et χ_T sont positifs, α et β ont même signe.

- L'équation d'état donne α, β, χ_T , mais la donnée de ces trois coefficients permet de retrouver l'équation d'état.

Par exemple, si $\alpha = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{b}{V}\right)$ et $\beta = \frac{1}{T}$, alors $P(V - b) = nRT$

B) Capacité thermique

1) Définition

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V. \text{ Donc } dU = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P. \text{ Donc } dH = C_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

2) Propriétés

- $C_P(T, V)$, $C_V(T, P)$
- $C_V = nc_V$, $C_P = nc_P$
- $C_V > 0$:

$$\boxed{T} \quad T_0$$

\swarrow
 $C_V < 0$

(On travaille à V constant) On suppose que $T = T_0$.

S'il y a une petite fluctuation, $dU = C_V dT = \delta Q$.

Si $\delta Q > 0$, comme $C_V < 0$ on aura $dT < 0$ (il reçoit de la chaleur et sa température diminue) ; il y a alors un gradient de température ; il y a donc plus de chaleur qui entre, et T diminue encore plus...

- De même, on a $C_P > 0$.

3) Expression de la chaleur élémentaire quasi-statique

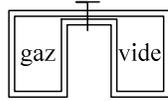
- Transformation isochore :
 $dV = 0$.
Donc $dU = C_V dT$ d'une part, et $dU = \delta Q$ d'autre part (car $\delta W = 0$)
Ainsi, $\delta Q = C_V dT$
(D'où le nom de capacité thermique à V constant)

- Transformation isobare :
 $dP = 0$.
 Donc $dH = C_p dT$ d'une part, et $dH = \delta Q$ d'autre part.
 Ainsi, $\delta Q = C_p dT$. (même remarque)
- Transformation quelconque :
 $\delta Q = C_v dT + l dV$, ou $\delta Q = C_p dT + h dP$.

C) Détentes

1) Détente de Joule–Gay-Lussac

- Description :



Etat A : P_A, V_A, T_A

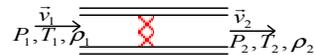
Etat B : P_B, V_B, T_B

(l'équilibre se fait en deux étapes : équilibre de pression, très rapide, puis équilibre de température, plus long)

- 1^{er} principe :
 $\Delta U = 0$ (car $Q = W = 0$)
- 2nd principe :
 $\Delta S > 0$ (car la transformation est irréversible)

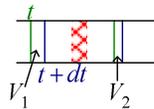
2) Détente de Joule–Kelvin

- Description :



$P_2 < P_1$; on suppose P, T, ρ uniformes avant ou après la bourre de coton.

- 1^{er} principe :
 En régime permanent :



On a $\Delta U = Q + W = P_1 V_1 - P_2 V_2$ et $\Delta U = U_2 - U_1$.

Donc $\Delta H = U_2 + P_2 V_2 - (U_1 + P_1 V_1)$. Soit $\Delta H = 0$.

En réalité, on a $\Delta H + \Delta E_c = 0$, mais on peut négliger ΔE_c .

Attention : on ne peut pas négliger ΔE_c devant ΔH (ils sont rigoureusement égaux en valeur absolue), mais devant H_1 et H_2 séparément.

(On peut par exemple dire que $(1000 - 999) - 1 = 0 \Rightarrow 1000 \approx 999$, mais certainement pas que $1 \approx 0$!!)

- 2nd principe :
 $\Delta S > 0$

- Coefficient de Joule–Kelvin :

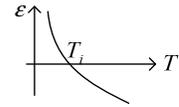
- Définition :

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$$

Si $\varepsilon > 0$, la température décroît au cours de la détente.

Si $\varepsilon < 0$, la température augmente au cours de la détente.

- ε dépend de T :



Ainsi, si $T_1 < T_i$, on aura $T_2 < T_1 < T_i$, et si $T_1 > T_i$, on aura $T_2 > T_1 > T_i$.

	He	H ₂	N ₂
T_i (K)	34	202	625

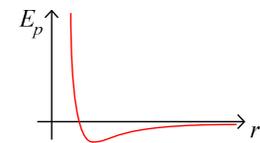
IV Modèle microscopique du gaz parfait

A) Comportement des gaz réels aux faibles pressions

1) Limite de PV .

- Expérimentalement, on remarque que $\lim_{\substack{P \rightarrow 0 \\ V \rightarrow +\infty \\ n = \text{cte}}} PV = nRT$.

• Interprétation :



On se rapproche de plus en plus de $E_p = 0$, ce qui correspond à un gaz parfait.

2) Définition

Par définition, un gaz est parfait lorsque, quelle que soit la pression, $PV = nRT$.

- C'est un modèle.
- Pour un gaz quelconque, son équation d'état doit tendre vers $PV = nRT$ lorsque $P \rightarrow 0$.

On a bien $\chi_T > 0$

- L'équation $PV = nRT$ peut correspondre à l'équation de plusieurs gaz parfaits différents (avec des C_V différents par exemple)
- Pour $P = 1\text{bar}$ à 10bar , on peut considérer qu'un gaz est parfait.

B) Calcul des fonctions d'état

• U :

- $U = U(T)$:

$$PV = nRT$$

$$dU = TdS - PdV$$

$$= T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \right) - PdV$$

$$= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - P \right) dV$$

Or, $dF = -SdT - PdV$, donc $\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{P}{T}$ (Théorème de Schwarz)

Donc $dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT$, soit $U = U(T)$.

- $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{dU}{dT} = C_V(T)$

- Détente de Joule–Gay-Lussac :

$\Delta U = 0$, donc $U(T_A) = U(T_B)$, soit $T_A = T_B$.

• H :

- $H = H(T)$:

$$H = U + PV = U(T) + nRT$$

- $C_P = C_P(T)$, et $C_P - C_V = \frac{dH}{dT} - \frac{dU}{dT} = \frac{d(H-U)}{dT} = \frac{d(nRT)}{dT} = nR$.

- Détente de Joule–Kelvin :

On a $\Delta H = 0$, et $H = H(T)$, donc $T_1 = T_2$.

• S :

- $S(T, V)$:

On a $dU = TdS - PdV = C_V dT$

$$\text{Donc } dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\text{Soit } S - S_0 = \int_{T_0}^T C_V \frac{dT}{T} + nR \ln \frac{V}{V_0}.$$

Si $C_V(T)$, on a $S - S_0 = C_V \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$

- $S(T, P)$:

$$dH = TdS + VdP = C_P dT$$

$$\text{Donc } dS = C_P \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

$$\text{D'où } S - S_0 = \int_{T_0}^T C_P \frac{dT}{T} - nR \ln \frac{P}{P_0}.$$

Et, si $C_P(T)$, on a alors $S - S_0 = C_P \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$.

- Relation de Laplace :

Lorsque $S = \text{cte}$, on obtient alors avec les deux égalités précédentes :

$$PV^\gamma = \text{cte}$$

Ou, localement : $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$ ou $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cte}$.

Attention, pour que la loi de Laplace soit valable, il faut que la transformation soit adiabatique, réversible, pour un gaz parfait et que $C_V(T)$ (C'est-à-dire $\gamma(T)$)

Récapitulation pour les gaz parfaits :

	Parfait monoatomique	Parfait quelconque	Réel
U	$\frac{3}{2}nRT$	$U(T)$	$U(T, V)$
C_V	$\frac{7}{2}nR$	$C_V(T)$	$C_V(T, V)$
C_P	$\frac{5}{2}nR$	$C_P(T) = C_V + nR$	$C_P(T, P)$
H	$\frac{5}{2}nRT$	$H(T)$	$H(T, P)$
S	$S = S_0 + C_P \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$	$S = f(T) - nR \ln \frac{P}{P_0}$	$S(T, P)$

On peut montrer que quand U et H *simultanément* ne dépendent que de T , alors le gaz est nécessairement parfait.

C) Mélange idéal de gaz parfaits

1) Modèle

- Microscopique :

Pour un gaz parfait A , il n'y a pas d'interactions entre les différentes particules A . Pour un gaz parfait B , il n'y en a pas non plus.

On dit que le mélange de A et B est parfait lorsqu'il n'y a pas non plus d'interactions entre A et B .

- Macroscopique :

Il faut deux conditions :

- $PV = (n_A + n_B)RT$ (quels que soient n_A et n_B)
- Pour un mélange :

$A+B$	A	B
V, T	V, T	V, T
U_{A+B}	U_A	U_B

On doit avoir $U_{A+B} = U_A + U_B$ (traduit l'absence d'interactions entre A et B)

2) Pression partielle

Définition :

C'est la pression qu'aurait le gaz s'il était seul dans l'enceinte.

Ainsi, pour un gaz parfait :

$$P_A V = n_A RT, \quad P_B V = n_B RT, \quad \text{donc } (P_A + P_B)V = (n_A + n_B)RT = PV$$

Pour un gaz non parfait, la pression n'est pas forcément la somme des pressions partielles.

En chimie, la pression partielle est par définition $P_i = x_i P$, où x_i est la fraction molaire du gaz. Ainsi, par définition, en chimie, la pression est la somme des pressions partielles (dans le cas d'un gaz parfait, la définition coïncide)

3) Enthalpie

On a $H = U + PV$, donc $H_{A+B} = H_A + H_B$.

4) Entropie : théorème de Gibbs

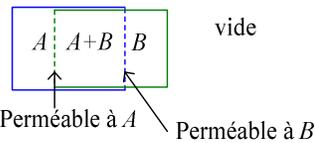
On cherche à savoir si $S_{A+B} = S_A + S_B$.

- Approche intuitive :

La température est la même, il n'y a donc pas de désordre dans l'espace des vitesses.

Lorsqu'on sépare les deux gaz, le volume est multiplié par 2, donc on a deux fois moins de chance de trouver une particule ; cependant, on est absolument sûr de la particule qu'on trouvera dans un des compartiments → le désordre semble ne pas augmenter globalement.

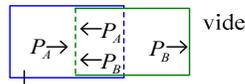
- Démonstration :



On peut ainsi, en tirant ou poussant de chaque côté de la boîte, se retrouver avec A et B séparés ou ensemble.

On part de la position séparée :

Comme U est extensif, $\Delta U = U_f - U_i = U_{A+B} - (U_A + U_B) = 0$



Toutes les forces de pression se compensent.

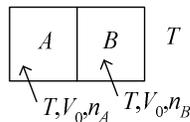
Ainsi, on n'a pas besoin de fournir de travail pour faire avancer ou reculer le compartiment B (A étant supposé fixe) – une "caresse" suffit.

Ainsi, $Q = \Delta U - W = 0$.

D'où pour une transformation réversible $\Delta S = \frac{Q}{T_1} = 0$, soit $S_{A+B} = S_A + S_B$

(valable pour toute transformation puisque S est une fonction d'état)

- Paradoxe de Gibbs :



Si on retire la paroi, que vaut ΔS ?

$$\Delta S = S_f - S_i.$$

On a $S_f = S_A(T, 2V_0) + S_B(T, 2V_0)$

Et $S_i = S_A(T, V_0) + S_B(T, V_0)$. Donc $\Delta S = n_A R \ln 2 + n_B R \ln 2$

Comme $W = 0, \Delta U = 0$, on a $Q = 0$, donc $S_e = \frac{Q}{T} = 0$, soit $\Delta S = S_i$.

Si on met maintenant deux gaz A avec le même nombre de moles, le fait de retirer la cloison ne changera rien (le système sera toujours à l'équilibre), mais on aura toujours $\Delta S = 2n_A R \ln 2$.

En fait, on ne peut pas appliquer le théorème de Gibbs dans ce cas là : on ne peut pas faire une paroi qui serait à la fois perméable à A et imperméable à A !!

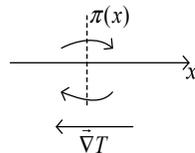
V Compléments

A) Interprétation microscopique de la conduction thermique dans le gaz

1) Hypothèses de travail

- On suppose le gaz parfait,
- Qu'il y a un équilibre thermodynamique local ($T(\vec{r}, t)$)
- Que T est indépendant de t (régime permanent)
- On suppose le problème unidirectionnel ($T(x)$)
- Enfin, on suppose qu'on est à l'équilibre mécanique (pas de flux de matière global, $\vec{j}_N = \vec{0}$).

2) Origine du flux de chaleur



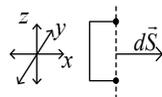
Une particule allant de la droite vers la gauche aura en moyenne une énergie cinétique plus grande qu'une particule allant de gauche à droite.

On aura donc un transfert d'énergie sans flux de matière global.

3) Loi de Fourier

- Flux de particules :

Hypothèses : on suppose que toutes les particules ont pour vitesse la vitesse moyenne \bar{v} . On suppose de plus que cette vitesse ne peut prendre que 6 directions (c'est-à-dire qu'elle est dirigée soit par \vec{u}_x , soit par \vec{u}_y , ou par $\vec{u}_z \dots$).



Il y aura $\frac{1}{6}$ des particules situées dans le cylindre (de volume $\bar{v}.dt.dS$) qui traverseront la surface dS (de gauche à droite), c'est-à-dire $\frac{1}{6}n\bar{v}.dt.dS$ particules.

Ainsi, $j_{N^+} = \frac{1}{6}n\bar{v}$ (gauche à droite), et $j_{N^-} = -\frac{1}{6}n\bar{v}$ (droite à gauche)

- Energie cinétique moyenne :

Une particule qui traversera la paroi dS aura parcouru depuis le dernier choc l (libre parcours moyen), et se trouvait donc en $x_+ = x-l$ ou $x_- = x+l$.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{E}_c^+ = \frac{3}{2} k_B T(x-l), \quad \mathcal{E}_c^- = \frac{3}{2} k_B T(x+l).$$

Donc

$$j_Q = j_{N^+} \mathcal{E}_c^+ + j_{N^-} \mathcal{E}_c^- = j_{N^+} (\mathcal{E}_c^+ - \mathcal{E}_c^-) = \frac{1}{6} n \bar{v} \frac{3}{2} k_B (T(x-l) - T(x+l))$$

$= -2l \frac{dT}{dx}$

$$\text{Soit } j_Q = -\frac{1}{2} n k_B l \bar{v} \frac{dT}{dx}.$$

4) Discussion

- On retrouve la loi de Fourier :

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

- On peut calculer λ :

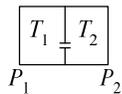
$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Soit $\lambda = \sqrt{\frac{k_B^3 T}{\pi m}} \times \frac{1}{\sigma}$ (sans faire toutes les approximations lors des calculs, on aurait obtenu exactement le même résultat)

$$\lambda \propto \sqrt{T}.$$

Tant que le modèle du gaz parfait est valide, λ est indépendant de P . Un gaz de petites particules conduit mieux qu'un gaz de grosses particules (via m et σ).

B) Equilibre moléculaire entre deux enceintes



On maintient les deux enceintes aux températures T_1 et T_2 .

On a donc un état stationnaire de non équilibre.

En régime permanent, $\vec{j}_N = \vec{0}$.

1) Méthode rapide

On suppose que les particules dans le compartiment 1 sont toutes à \bar{v}_1 , celles du compartiment 2 à \bar{v}_2 , et que seules six directions peuvent être prises.

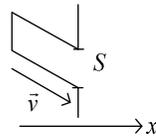
Ainsi, on aura $\frac{1}{6} n_1 \bar{v}_1 S dt = \frac{1}{6} n_2 \bar{v}_2 S dt$ (la quantité de particules qui traverse de gauche à droite pendant dt est la même que de droite à gauche).

On a $P_1 V = N_1 k_B T_1$. Donc $n_1 = \frac{P_1}{k_B T_1}$, et de même $n_2 = \frac{P_2}{k_B T_2}$.

On a $\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{8k_B T_1}{\pi m}}$

Donc $\frac{P_1}{T_1} \sqrt{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \sqrt{T_2}$, soit $\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

2) Calcul rigoureux



Volume du cylindre = $v_x S dt$.

Nombre de particules de vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$: $N f(v_x) dv_x$.

Ainsi, il y en a $N_1 f(v_x) dv_x \times \frac{v_x S dt}{V_1}$ dans le cylindre.

Donc $\frac{N_1 S}{V_1} \int_0^{+\infty} v_x f(v_x) dv_x = \frac{N_2 S}{V_2} \int_{-\infty}^0 v_x f(v_x) dv_x$

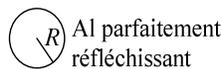
On a $f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2k_B T \pi}} e^{-\frac{\frac{1}{2} m v_x^2}{k_B T}}$.

Donc $\frac{N_1}{V_1} \sqrt{\frac{k_B T_1}{2\pi m}} S dt = \frac{N_2}{V_2} \sqrt{\frac{k_B T_2}{2\pi m}} S dt$

Comme $\frac{N_1}{V_1} = \frac{P_1}{k_B T_1}$, on a alors $\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$!!

On retrouve la même relation que dans le calcul simple.

C) Lévitiation dans un faisceau laser



↑↑↑↑ P : puissance surfacique du laser

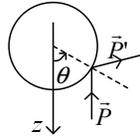
1) Modèle

- Photons de quantité de mouvement $\vec{P} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}$, de vitesse $\vec{v} = c\vec{u}$ et d'énergie $\varepsilon = h\nu$.
- On suppose que les photons subissent sur la sphère des chocs élastiques (ils ne sont pas absorbés)

2) Analyse

- On doit faire en quelque sorte une étude de pression
- Les particules arrivent toutes dans la même direction
- Méthode : on commence par voir pour une particule, puis toutes les particules qui frappent pendant dt , et enfin on utilise le théorème d'action-réaction.

3) Variation de la quantité de mouvement d'une particule



$$\Delta \vec{P} = \vec{P}' - \vec{P} = 2 \frac{h\nu}{c} \cos \theta \vec{u}_z$$

4) Variation de la quantité de mouvement des photons pendant dt .

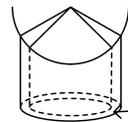
- Variation de la quantité de mouvement des particules qui frappent, pendant dt , la bande d'angle compris entre θ et $\theta + d\theta$:



On a une symétrie de rotation autour de l'axe z , donc $\Delta \vec{P}$ est dans la direction de \vec{u}_z :

$$\Delta \vec{P} = \Delta P_z \vec{u}_z = \frac{2h\nu}{c} \cos \theta \underbrace{(\cos \theta \vec{u}_z)}_{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z} = \frac{2h\nu}{c} \cos^2 \theta \vec{u}_z$$

- Nombre de photons qui viennent frapper cette bande :



$$dS = 2\pi R \sin \theta \cdot d(R \sin \theta)$$

Nombre de particule qui traversent dS : $\frac{PdSdt}{h\nu}$ (= $\frac{\text{puissance totale}}{\text{puissance d'un photon}}$)

$$\text{Ainsi, } \delta^2 \vec{P} = \frac{Pdt}{h\nu} \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot d(R \sin \theta) \times \frac{2h\nu}{c} \cos \theta \cdot (\cos \theta \vec{u}_z)$$

$$\text{Soit } \delta^2 \vec{P} = \frac{4\pi R^2 P}{c} \cos^3 \theta \sin \theta \cdot d\theta \cdot dt \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{Donc } \delta \vec{P} = \frac{4\pi R^2 P}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \cdot dt \cdot \vec{u}_z = \frac{\pi R^2 P}{c} dt \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{Soit } \frac{\delta \vec{P}}{dt} = \frac{\pi R^2 P}{c} \vec{u}_z.$$

5) Force exercée sur la sphère

D'après le principe d'action et de réaction, $\vec{F} = -\frac{\delta\vec{P}}{dt} = -\frac{\pi R^2 P}{c} \vec{u}_z$

6) Discussion

La condition de lévitation s'écrit ainsi :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Al}} g = \frac{\pi R^2 P}{c}$$

Si la sphère est noircie, on obtient $\Delta\vec{P} = \frac{-h\nu}{c} \vec{u}_z$ pour un photon (celui-ci est alors absorbé par la sphère).

Et on obtient alors $\frac{\delta\vec{P}}{dt} = \frac{-2\pi R^2 P}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \vec{u}_z = \frac{-2\pi R^2 P}{3c} \vec{u}_z$.