

Chapitre 7 : Fonctions polynomiales, racines

Ici, \mathbb{K} est un corps commutatif quelconque.

I Fonction polynomiale

Définition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang.

La fonction polynomiale associée à P est la fonction :

$$\begin{aligned} \tilde{P} : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \tilde{P}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k \end{aligned}$$

Attention :

$P \in \mathbb{K}[X]$, c'est un polynôme formel, $\tilde{P} \in \mathfrak{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, c'est une fonction polynomiale.

Théorème :

Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors, pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P_1 + P_2(x) = \tilde{P}_1(x) + \tilde{P}_2(x)$$

$$P_1 \times P_2(x) = \tilde{P}_1(x) \times \tilde{P}_2(x)$$

$$\lambda \tilde{P}_1(x) = \tilde{(\lambda P_1)}(x)$$

$$\tilde{1}(x) = 1_{\mathbb{K}}$$

(Démonstration immédiate)

On en tire alors le théorème :

$$P_1 + P_2 = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$$

$$P_1 \times P_2 = \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_2$$

$$\lambda \tilde{P}_1 = \tilde{(\lambda P_1)}$$

$$\tilde{1} = 1_{\mathfrak{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})}$$

(Car $\forall x \in \mathbb{K}, P_1 + P_2(x) = (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)(x)$, et de même pour les autres)

Ainsi, l'application $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est un morphisme de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ vers

$$P \mapsto \tilde{P}$$

l'anneau $(\mathfrak{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \times)$.

II Racines

A) Définition et caractérisation formelle

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une racine (dans \mathbb{K}) de P lorsque $\tilde{P}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est racine de P si et seulement si $(X - \lambda)$ divise P .

Démonstration :

Déjà, $(X - \lambda)$ est non nul.

On peut donc faire la division euclidienne de P par $(X - \lambda)$:

$P = (X - \lambda)Q + R$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_0[X]$, soit $R = r \in \mathbb{K}$.

Donc $P = (X - \lambda)Q + r$

Donc $\tilde{P} = (X - \lambda)\tilde{Q} + \tilde{r}$ d'où $\tilde{P}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}} \times \tilde{Q}(\lambda) + \tilde{r} = \tilde{r}$.

Donc λ est racine de P si et seulement si $r = 0$ soit si $(X - \lambda)$ divise P .

B) Multiplicité

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Soit λ un scalaire. On suppose que λ est racine de P . La multiplicité de λ dans P est, par définition, $m = \max\{k \in \mathbb{N}, (X - \lambda)^k \text{ divise } P\}$.

La définition est bien correcte car l'ensemble est non vide (contient 1) et est majoré (par $\deg(P)$)

On peut convenir que λ est de multiplicité 0 lorsque λ n'est pas racine de P .

C) Le premier théorème de factorisation

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des racines distinctes de P de multiplicités au moins égales à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Alors $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise P .

Démonstration :

Les polynômes $(X - \lambda_i), i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ (car de degré 1).

Ils sont tous distincts et unitaires, donc les $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont premiers entre eux. De plus, ils divisent tous P . Donc leur produit divise P .

Conséquence :

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P (en les comptant selon leur multiplicité) est inférieur ou égal à n .

Démonstration :

Si P admet les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ distinctes avec les multiplicités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$,

alors $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, de degré $\sum_{k=1}^p \alpha_k$, divise P donc $\sum_{k=1}^p \alpha_k \leq n$.

Conséquence pratique :

Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, et si on a trouvé $n+1$ racines distinctes à P , alors $P = 0$.

Conséquence :

On suppose \mathbb{K} infini.

Alors l'application $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est injective :
 $P \mapsto \tilde{P}$

Si $\tilde{P} = \tilde{Q}$, alors $\tilde{P} - \tilde{Q} = 0_{\mathbb{K}}$, soit $P \sim Q = 0_{\mathbb{K}}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{K}, P \sim Q(x) = 0_{\mathbb{K}}$.

Donc $P \sim Q$ a une infinité de racines. Donc $P - Q = 0_{\mathbb{K}}$. Donc $P = Q$.

Dans la suite du chapitre, \mathbb{K} est un sous corps de \mathbb{C} . \mathbb{K} est donc infini (car il contient au minimum \mathbb{Q} puisqu'il contient 0 et 1 et est stable par +, \times et passage à l'inverse)

Ainsi, on a l'équivalence, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$: $\tilde{P} = \tilde{Q} \Leftrightarrow P = Q$.

On peut donc retirer les \sim mais on distinguera $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ et la fonction $x \mapsto P(x)$.

III Dérivation formelle

A) Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang.

Alors le polynôme dérivé de P est par définition le polynôme :

$$P' = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k a_k X^{k-1}$$

On définit par récurrence le polynôme dérivé n fois de P :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \end{cases}$$

Remarque : si on considère la fonction $\overset{\circ}{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x)$, on remarque que $(\overset{\circ}{P})' = \overset{\circ}{P}'$

B) Propriétés

- Si $\deg P \leq n$, alors $P^{(n)}$ est constant, non nul si et seulement si $\deg P = n$.

En effet :

$$\text{Si } P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

$$\text{Alors } P' = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \dots + a_1$$

Donc si $\deg P = n \geq 1$, alors $\deg P' = n - 1$, d'où par récurrence $\deg P^{(n)} = 0$.

$$\text{Et si } \deg P = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}, \text{ alors } P' = 0.$$

- $(P + Q)' = P' + Q' \rightarrow (P + Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$
- $(\lambda.P)' = \lambda.P' \rightarrow (\lambda.P)^{(n)} = \lambda.P^{(n)}$
- $(P \times Q)' = P'Q + PQ' \rightarrow (PQ)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i P^{(i)} Q^{(k-i)}$
- $(P^m)' = mP' P^{m-1} \quad (m \geq 1)$
- $(P(Q))' = Q' \times P'(Q)$

Démonstration :

(1) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x)$

Donc $(P+Q)' - P' - Q'$ a une infinité de racines, donc $(P+Q)' = P' + Q'$.

De même, (2), (3), (4), puis par récurrence pour les dérivées k -ièmes.

Pour (5), la démonstration ne convient pas si Q n'est pas à coefficients réels.

Dans ce dernier cas (et aussi dans les autres) :

$$P(Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k Q^k$$

Donc $(P(Q))' = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k k Q^k Q^{k-1}$ (d'après (1), (2), (4))

Soit $(P(Q))' = Q' \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k k Q^{k-1} = Q' P'(Q)$.

Remarque :

$$(X^p)^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > p \\ \frac{p!}{(p-i)!} X^{p-i} & \text{si } 0 \leq i \leq p \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } D^{(i)}(X^p)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq p \\ p! & \text{si } i = p \end{cases}$$

C) Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème :

Soit P un polynôme, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg P$.

Alors pour tout $a, b \in \mathbb{K}$:

$$P(a+b) = P(a) + bP'(a) + \frac{b^2}{2!} P''(a) + \dots + \frac{b^n}{n!} P^{(n)}(a)$$

Démonstration :

- Si $a = 0$:

On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = P(0) + xP'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} P^{(n)}(0)$

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$D^{(p)}(P) = \sum_{k=0}^n a_k D^{(p)}(X^k)$$

Donc $D^{(p)}(P)(0) = p! a_p$. Donc $a_p = \frac{D^{(p)}(P)(0)}{p!}$.

- Cas général :

On pose $Q(X) = P(a+X)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(X) = P^{(k)}(a+X)$ (car $(a+X)' = 1$)

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{K}, Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\text{Soit } \forall x \in \mathbb{K}, P(a+x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k$$

Théorème (plus général) :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg P$. Alors, pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$:

$$P(A+B) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(A)}{k!} B^k.$$

Démonstration :

Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a :

$$P(A(x)+B(x)) = \sum_{k=0}^n (B(x))^k \frac{P^{(k)}(A(x))}{k!}$$

(d'après le théorème précédent avec $a = A(x)$ et $b = B(x)$)

D'où l'égalité des polynômes formels $P(A+B)$ et $\sum_{k=0}^n B^k \frac{P^{(k)}(A)}{k!}$ puisqu'ils coïncident sur \mathbb{K} .

D) Application à la multiplicité

Théorème :

Soient $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors λ est racine d'ordre au moins k de P si et seulement si : $P^{(0)}(\lambda) = P^{(1)}(\lambda) \dots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0$

Par conséquent, λ est racine de P d'ordre exactement k si et seulement si :

$$P^{(0)}(\lambda) = P^{(1)}(\lambda) \dots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0 \text{ et } P^{(k)}(\lambda) \neq 0.$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg P$ et $n \geq k$. Alors :

$$P(X) = P(\lambda + (X - \lambda))$$

$$= \underbrace{P(\lambda) + (X - \lambda)P'(\lambda) + \dots + \frac{(X - \lambda)^{k-1}}{(k-1)!} P^{(k-1)}(\lambda)}_{\text{polynôme } R \text{ de degré } \leq k-1} + \underbrace{\dots + \frac{(X - \lambda)^n}{n!} P^{(n)}(\lambda)}_{\text{polynôme divisible par } (X - \lambda)^k}$$

Donc R est le reste dans la division euclidienne de P par $(X - \lambda)^k$.

On a donc les équivalences :

$$\lambda \text{ est racine d'ordre au moins } k \text{ de } P \Leftrightarrow (X - \lambda)^k \text{ divise } P$$

$$\Leftrightarrow R = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} (X - \lambda)^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$$

Pour la dernière équivalence (l'un des sens étant évident) :

$$\text{Si } \sum_{i=0}^{k-1} (X - \lambda)^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0, \text{ alors } \forall x \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{k-1} (x - \lambda)^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0,$$

$$\text{donc } \forall y \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{k-1} y^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{i=0}^{k-1} X^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0, \text{ d'où } \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0.$$

IV Polynôme scindé

A) Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré $n \geq 1$.

On dit que P est scindé (dans \mathbb{K}) lorsque P a toutes ses racines dans \mathbb{K} , ce qui équivaut à dire que P admet exactement n racines dans \mathbb{K} en comptant les multiplicités et aussi à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de \mathbb{K} distincts, des

éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de \mathbb{N}^* et $a \in \mathbb{K}^*$ tels que $P = a \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (théorème de factorisation), ou à dire qu'il existe n éléments $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de \mathbb{K} et $a \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$P = a \prod_{i=1}^n X - \mu_i.$$

Exemple :

$X^3 - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$

B) Relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé

1) Fonctions symétriques élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K} par les formules :

$$\sigma_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\sigma_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_2 \lambda_n + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$$

$$\sigma_3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

$$\sigma_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{Pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

Ces fonctions sont symétriques, c'est-à-dire :

Etant donnée $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est symétrique lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall s \in \mathfrak{S}_n, f(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \dots, x_{s(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ce sont les fonctions symétriques élémentaires sur n éléments en vertu d'un résultat (hors programme) : toutes les fonctions symétriques rationnelles sur n éléments sont fonctions rationnelles des σ_k .

2) Le résultat

Soit P un polynôme scindé de degré $n \geq 1$ de $\mathbb{K}[X]$, d'écriture développée

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et d'écriture factorisée } P = a_n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i).$$

Pour alléger, on notera σ_k pour $\sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les formules suivantes donnent un lien entre les σ_k et les a_k :

$$-a_n \sigma_1 = a_{n-1}$$

$$a_n \sigma_2 = a_{n-2}$$

$$\dots (-1)^k a_n \sigma_k = a_{n-k}$$

En effet :

$$\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = X^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) X^{n-1} + \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j X^{n-2} + \dots + (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} X^{n-k} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

3) Réciproque

Soient $u_1, u_2, \dots, u_n \in \overline{\mathbb{K}}$. Alors les solutions du système suivant, d'inconnues x_1, x_2, \dots, x_n dans $\overline{\mathbb{K}}$:

$$(S) : \begin{cases} \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_1 \\ \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_2 \\ \vdots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_n \end{cases}$$

sont exactement les racines du polynôme :

$$P = X^n - u_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^k u_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n u_n$$

Démonstration :

- Si x_1, x_2, \dots, x_n sont racines de P , alors (x_1, x_2, \dots, x_n) est solution de (S) d'après le 2).
- Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est solution de (S), alors le polynôme $P = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ s'écrit sous forme développée $X^n - u_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n u_n$.

V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

A) Dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème d'Alembert :

Tout polynôme de degré ≥ 1 à coefficients dans \mathbb{C} a au moins une racine. Par conséquent, les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 sont tous scindés dans $\mathbb{C}[X]$ (démonstration par récurrence)

Énoncé équivalent :

Les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes $X - \lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

On dit que \mathbb{C} est algébriquement clos.

B) Dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, racine de multiplicité α . Alors $\bar{\lambda}$ est aussi racine de P , et avec la même multiplicité α .

Démonstration :

- Si λ est racine de P , où $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors :

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \lambda^0 = 0$$

Donc $\overline{P(\lambda)} = 0$, et :

$$\begin{aligned} \overline{P(\lambda)} &= \overline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \lambda^0} \\ &= a_n \bar{\lambda}^n + a_{n-1} \bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_0 \bar{\lambda}^0 \\ &= P(\bar{\lambda}) \end{aligned}$$

Soit $P(\bar{\lambda}) = 0$. Donc $\bar{\lambda}$ est racine de P .

- Si λ est racine de multiplicité $\alpha \geq 1$ de P , alors :

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0 \text{ et } P^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0.$$

Donc $P(\bar{\lambda}) = P'(\bar{\lambda}) = \dots = P^{(\alpha-1)}(\bar{\lambda}) = 0$ (étape précédente appliquée aux $P^{(k)}$), et $P^{(\alpha)}(\bar{\lambda}) \neq 0$ car sinon $P^{(\alpha)}(\lambda) = P^{(\alpha)}(\bar{\lambda}) = 0$.

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et λ une racine de P . Peut-on affirmer que $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ divise P ?

C'est vrai uniquement si $\lambda \notin \mathbb{R}$, car sinon dans ce cas là $\lambda = \bar{\lambda}$ et donc on peut avoir $(X - \lambda)$ qui divise P mais pas forcément $(X - \lambda)^2$.

Théorème :

Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 et de degré 2 sans racine réelle. Ainsi, tout polynôme P à coefficients réels de degré ≥ 1 s'écrit de manière unique $P = a \prod_{i=1}^m P_i$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et où $P_i \in \mathbb{R}_2[X] \setminus \{P \in \mathbb{R}_2[X], \Delta(P) \geq 0\}$.

Démonstration :

- Déjà, si $P = aX + b$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$), alors P est irréductible.

Si $P = aX^2 + bX + c$ avec $\begin{cases} (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$, alors P est irréductible dans

$\mathbb{R}[X]$ (sinon il s'écrit $(\alpha X + \beta)(\alpha' X + \beta')$ et aurait deux racines réelles)

- Soit maintenant P un polynôme de degré ≥ 2 .

Selon le théorème d'Alembert, il y a au moins une racine $\lambda \in \mathbb{C}$.

• Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P = (X - \lambda)Q$ où $\deg Q = n - 1 \geq 1$, donc P n'est pas irréductible.

• Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi racine de P , et $\bar{\lambda} \neq \lambda$ donc $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ divise P .

Or, $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - (\lambda + \bar{\lambda})X + \lambda\bar{\lambda} \in \mathbb{R}[X]$.

Donc $P = (X^2 - sX + p)Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$, $s \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Donc $\deg Q = n - 2$.

Donc soit $n = 2$ et P est irréductible, soit $n \geq 3$ et P n'est pas irréductible.

Il n'y a donc pas d'autres polynômes irréductibles.

Plus précisément :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant a . Alors P admet n racines dans \mathbb{C} , regroupées ainsi :

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ racines réelles de multiplicités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

$\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_p, \bar{\mu}_p$ racines complexes de multiplicités $\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \dots, \beta_q, \beta_q$.

Avec $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i = n$. Alors :

$$\begin{aligned} P &= a \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^q (X - \mu_i)^{\beta_i} (X - \bar{\mu}_i)^{\beta_i} \\ &= a \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^q (X^2 - s_i X + p_i)^{\beta_i} \end{aligned}$$

Où $\forall i \in [1, q], s_i = \mu_i + \bar{\mu}_i = 2 \operatorname{Re}(\mu_i)$

$$p_i = \mu_i \bar{\mu}_i = |\mu_i|^2$$

Algorithme de Horner :

$$\text{Soit } P: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

L'algorithme permet de calculer la valeur d'une fonction polynomiale en un point de \mathbb{K} avec un minimum d'opérations élémentaires :

$$(\dots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots)x + a_1)x + a_0$$

On a ainsi au pire n multiplications et n additions.