



# Chapitre 9 : $\mathbb{K}$ -algèbres

$\mathbb{K}$  désigne ici toujours un corps (commutatif).

## I Définition

Soit  $E$  un ensemble, muni de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$ , et d'une loi externe à opérateurs dans  $\mathbb{K}$ ,  $\cdot$ . Alors  $(E, \oplus, \otimes, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre lorsque :

- $(E, \oplus, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.
- La loi  $\otimes$  est associative et admet un élément neutre (qu'on note  $1_E$ )
- La loi  $\otimes$  est distributive sur la loi  $\oplus$ .
- Pour tous  $u, v \in E$ , et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $(\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v)$ .

**Notation :**

Les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  sont généralement notées  $+$  et  $\times$ .

**Exemple :**

$\mathbb{R}$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre (pour les lois usuelles), et  $\mathbb{C}$  aussi. ( $\mathbb{C}$  est aussi une  $\mathbb{C}$ -algèbre).

$(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre,  $X$  étant un ensemble quelconque.

## II Sous-algèbres

**Définition :**

Une sous-algèbre d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $(E, +, \times, \cdot)$ , c'est une partie  $F$  de  $E$  qui contient  $1_E$  et qui est stable pour chacune des trois lois, c'est-à-dire :

- $1_E \in F$ ,
- $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$  et  $u \times v \in F$ ,
- $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in F$ .

**Proposition :**

Une sous-algèbre d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**Exemple :**

L'ensemble des fonctions polynomiales de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  constitue une sous-algèbre de l'algèbre  $(\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ .

### III Morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres

**Définition :**

Soient  $(E, +, \times, \cdot)$ ,  $(F, +, \times, \cdot)$  deux  $\mathbb{K}$ -algèbres. Soit  $\varphi: E \rightarrow F$ . Alors  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres lorsque :

- $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ ,
- $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u \times v) = \varphi(u) \times \varphi(v)$ ,
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$ ,
- $\varphi(1_E) = 1_F$ .

**Exemple :**

L'ensemble des suites convergentes est une sous algèbre de la  $\mathbb{R}$ -algèbre des suites réelles, et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbres.