Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ». https://www.immae.eu/cours/

# Chapitre 10 : Espaces vectoriels de type fini

$E$ désigne ici un $\mathbb{K}$-ev (où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$)

## I Les théorèmes fondamentaux

### A) Existence de base

**Théorème :**
On suppose que $E$ admet une famille génératrice finie $g$. Alors, de $g$, on peut extraire une base de $E$.

**Démonstration :**
Montrons par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, « si $E$ admet une famille génératrice $g$ de cardinal $m$, alors, de $g$, on peut extraire une base de $E$ » ($\mathscr{P}(m)$).

- $\mathscr{P}(0)$ : Si $E$ admet une famille de cardinal 0, c'est que $E = \{0_E\}$ et la famille vide est une base de $E$.
- $\mathscr{P}(1)$ : Si $E$ admet une famille génératrice de cardinal 1, disons $g = (u_1)$ :
  - ◇ Si $u_1 = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$, et $\varnothing$ est alors une base de $E$, extraite de $g$.
  - ◇ Si $u_1 \neq 0_E$, $(u_1)$ est une famille libre et génératrice de $E$, extraite de $g$ (car égale à $g$).
- $\mathscr{P}(2)$ : Si $E$ admet une famille libre et génératrice de cardinal 2, disons $g = (u_1, u_2)$ :
  - ◇ Si $(u_1, u_2)$ est libre, alors c'est une base de $E$, extraite de $g$.
  - ◇ Si elle ne l'est pas, alors l'un des $u_i$, disons $u_2$, est combinaison linéaire des « autres » (c'est-à-dire $u_1$). Alors $(u_1)$ est génératrice de $E$. D'après $\mathscr{P}(1)$, on peut donc en extraire une base de $E$.
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(m)$. Montrons $\mathscr{P}(m+1)$. Si $E$ admet une famille génératrice de cardinal $m+1$, disons $g = (u_1, u_2, \dots u_{m+1})$ :
  - ◇ Si $(u_1, u_2, \dots u_{m+1})$ est libre, alors elle est une base de $E$, extraite de $g$.
  - ◇ Si elle ne l'est pas, alors l'un des $u_i$, disons $u_{m+1}$ est combinaison linéaire des autres. Alors $(u_1, u_2, \dots u_m)$ est génératrice de $E$. D'après $\mathscr{P}(m)$, on peut donc en extraire une base de $E$, ce qui achève la récurrence.

**Conséquence :**

- Tout $\mathbb{K}$-ev de type fini admet une base (finie)
- « théorème d'extraction de base » : de toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$-ev, on peut extraire une base (finie) de ce $\mathbb{K}$-ev.

## B) Dimension

**Théorème, définition :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de type fini. Alors toutes les bases de $E$ ont le même cardinal, il est appelé la dimension de $E$, noté $\dim(E)$.

**Démonstration :**
On commence par démontrer un lemme :

**Lemme :**
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires de $n$ vecteurs de $E$ forment toujours une famille liée.

**Démonstration :**
Montrons ce lemme par récurrence sur $n$ :

- Pour $n = 0$ : « 1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié ». C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est $0_E$.
- Pour $n = 1$ : « 2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée ». Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors $(v_0, v_1)$ est liée :
  Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.
  Sinon $v_0 = 0_E$. Donc $v_0$ et $v_1$ sont colinéaires.
- Soit $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai pour $n-1$.
  Considérons $n+1$ vecteurs $v_1, v_2, \dots v_n$, combinaisons linéaires de $n$ vecteurs $u_1, u_2, \dots u_n$. On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ tels que :

$$\begin{cases} v_0 &= \alpha_{0,1}u_1 + \alpha_{0,2}u_2 + \dots + \alpha_{0,n}u_n \quad (L_0) \\ v_1 &= \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \dots + \alpha_{1,n}u_n \quad (L_1) \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ v_n &= \alpha_{n,1}u_1 + \alpha_{n,2}u_2 + \dots + \alpha_{n,n}u_n \quad (L_n) \end{cases} \tag{10.1}$$

  - ◇ Si $\forall i \in [\![0, n]\!], \alpha_{i,n} = 0$, alors $v_1, v_2, \dots v_n$ sont combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $u_1, u_2, \dots u_n - 1$. Par hypothèse de récurrence, $(v_1, v_2, \dots v_{n-1})$ est liée. Donc $(v_1, v_2, \dots v_n)$ l'est aussi.
  - ◇ Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![0, n]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n,n}}}_{\lambda_i} L_n$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ donnent :

$$\begin{cases} v_0 - \lambda_0 v_n &= \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_n \\ v_1 - \lambda_1 v_n &= \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_n \\ \quad\vdots & \\ v_n - \lambda_n v_n &= \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_n \end{cases} \tag{10.2}$$

  Les vecteurs $v_i - \lambda_i v_n, i \in [\![0, n-1]\!]$ forment donc une famille liée puisque ce sont $n$ vecteurs combinaisons linéaires de $n-1$ (hypothèse de récurrence). Il existe donc des scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}$

non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(v_i - \lambda_i v_n) = 0$.
Donc $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i v_i + \gamma.v_n) = 0$, avec $\gamma = -\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \lambda_i$, ce qui prouve que $(v_1, v_2, \dots v_n)$ est liée car au moins l'un des $\beta_i$ est non nul, ce qui achève la récurrence.

Maintenant :

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases (finie) de $E$, notons $m$, $n$ leur cardinal.

- $\mathscr{B}$ est génératrice de $E$. donc chacun des $m$ vecteurs de $\mathscr{B}'$ est combinaison linéaire des $n$ vecteurs de $\mathscr{B}$. donc $m \leqslant n$ (sinon, selon le lemme, $\mathscr{B}'$ serait liée).
- De même, $n \leqslant m$. Donc $n = m$.

**Exemple (important) :**

$\mathbb{K}^n$ est de dimension $n$ : on en connaît une base de cardinal $n$ (la base canonique)

**Remarque :**

- Si $E$ est de dimension 0, alors $E = \{0_E\}$.
- Si $E$ est de dimension 1, alors $E$ est une droite vectorielle.

**Vocabulaire :**

« $E$ de type fini » = « $E$ de dimension finie ».

**Théorème (De la base incomplète) :**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n$. Alors toute famille libre de $E$ peut être complétée en une base de $E$.

**Démonstration :**

Soit $L$ une famille libre de $E$.

- Si $L$ est vide, il suffit de la compléter avec une base de $E$.
- Sinon, $L = (u_1, u_2, \dots u_p)$, où $p \in \mathbb{N}^*$.
  Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de $E$.
  - ◇ Si $L$ est génératrice de $E$, alors $L$ est une base de $E$.
  - ◇ Sinon, l'un au moins des $e_i, i \in [\![1, n]\!]$ n'est pas combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots u_p$ (car sinon $L$ serait génératrice). Soit alors $i_1 \in [\![1, n]\!]$ tel que $e_{i_1} \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p)$. Alors la famille $L' = (u_1, u_2, \dots u_p, e_{i_1})$ est libre. Si elle est génératrice, c'est une base de $E$. Sinon, on recommence. Au bout d'un moment, on obtient une famille libre et génératrice (puisque, au pire, $(u_1, u_2, \dots u_p, e_1, e_2, \dots e_n)$ est génératrice).

**Conséquence :**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$. Alors :

- Les familles libres de $E$ ont au plus $n$ vecteurs.
- Si une famille libre de $E$ est de cardinal $n$, alors c'est une base de $E$.

**Remarque :**

La démonstration du théorème montre que, pour compléter une famille libre en une base de $E$, on peut imposer de piocher les éléments qui complètent dans une base, fixée d'avance, de $E$.

**Conséquence (du théorème d'extraction de base) :**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$. Alors :

- Les familles génératrices de $E$ sont de cardinal $\leqslant n$.
- Si une famille génératrice de $E$ est de cardinal $n$, alors c'est une base de $E$.

**Théorème :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} E \text{ est de dimension finie} &\iff \text{il admet une famille génératrice finie} && (10.3)\\ &\iff \text{il admet une base finie} && (10.4)\\ &\iff \text{le cardinal des familles libres de } E \text{ est majoré} && (10.5) \end{aligned}$$

**Démonstration :**
(les deux premières équivalences sont des rappels)

$\Longrightarrow$ : Evident, l'ensemble est majoré par $\dim(E)$.

$\Longleftarrow$ : Supposons que le cardinal des familles libres de $E$ est majoré. L'ensemble des cardinaux des familles libres est donc une partie non vide (contient 0) et majorée de $\mathbb{N}$. On note $n$ le maximum de cette partie.

Soit alors une famille $L$ de cardinal $n$.

- Si $n = 0$, alors $E = \{0_E\}$ car $\varnothing$ est la seule famille de cardinal 0.
- Sinon, $L = (u_1, u_2, \dots u_n)$. Alors cette famille est génératrice, car sinon on pourrait trouver $v \in E$ qui n'est pas combinaison linéaire des $u_i$, et ainsi la famille $(u_1, u_2, \dots u_n, v)$ serait libre de cardinal $n+1$, ce qui contredit la définition de $n$.

**Théorème :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n$.
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.
Alors $F$ a une dimension finie et $\leqslant n$, et si elle vaut $n$, alors $F = E$

**Démonstration :**

- Les familles libres d'éléments de $F$ sont des familles libres d'éléments de $E$. Donc leur cardinal est majoré par $n$. Donc $F$ est de dimension finie $p \leqslant n$ (puisque si $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est une base de $F$, alors c'est aussi une famille libre de $E$, donc $p \leqslant n$)
- Si $p = n$, alors soit $(u_1, u_2, \dots u_p)$ une base de $F$. C'est donc une famille libre de $E$ de cardinal $p = n$. C'est donc une base de $E$. Donc $F = E$.

**Théorème :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n$. Alors tout sous-espace vectoriel de $E$ admet un supplémentaire dans $E$ (mais pas un seul en général).

**Démonstration :**
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

- Si $F = E$, $\{0_E\}$ est supplémentaire de $F$. (et vice-versa)

- Sinon, $F$ est de dimension finie $p$ avec $1 \leqslant p < n$. Soit $(u_1, u_2, \dots u_p)$ une base de $F$. C'est aussi une famille libre de $E$. on peut donc la compléter en une base $(u_1, u_2, \dots u_p, u_{p+1}, \dots u_n)$ de $E$. On pose alors $G = \mathrm{Vect}(u_{p+1}, \dots u_n)$. Alors $G$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$. En effet :
  - Soit $v \in E$. Donc
  $$v = \underbrace{x_1u_1 + \cdots + x_pu_p}_{\in F} + \underbrace{x_{p+1}u_{p+1} + \cdots + x_nu_n}_{\in G}. \tag{10.6}$$
  (car $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est génératrice de $E$) C'est vrai pour tout $v \in E$. Donc $E = F + G$.
  - Montrons maintenant que la somme est directe, soit que $F \cap G = \{0_E\}$ : Soit $v \in F \cap G$, alors
  $$v = x_1u_1 + \cdots + x_pu_p, \tag{10.7}$$
  et
  $$v = y_1u_{p+1} + \cdots + y_{n-p}u_n. \tag{10.8}$$
  Donc
  $$x_1u_1 + \cdots + x_pu_p - y_1u_{p+1} - \cdots - y_{n-p}u_n = 0. \tag{10.9}$$
  Comme la famille $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre,
  $$x_1 = x_2 = \cdots = x_p = y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-p} = 0. \tag{10.10}$$
  Donc $v = 0$.
  Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.
  Donc $E = F \oplus G$.

# II Rang d'une famille de vecteurs

Dans ce paragraphe, $E$ est un $\mathbb{K}$-ev.

**Définition :**
Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $E$. Le rang de $\mathscr{F}$ est : $\mathrm{rg}(F) = \dim(\mathrm{Vect}(F))$.

**Exemple :**

- Si $E = \mathbb{R}^3$.
$$\mathscr{F} = [\underbrace{(1,2,3)}_{u_1}, \underbrace{(4,5,6)}_{u_2}, \underbrace{(7,8,9)}_{u_3}]. \tag{10.11}$$
Alors $\mathrm{rg}(F) = 2$ (car $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)$).
- Si $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
$$f_1 \colon x \mapsto 1, \qquad f_2 \colon x \mapsto e^x, \qquad f_1 \colon x \mapsto |x| \tag{10.12}$$
Alors $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3) = 3$ ($(f_1, f_2, f_3)$ est libre, donc une base de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$).
**Démonstration :**
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$.
D'où, en prenant trois valeurs pour $x$, par exemple $-1$, $0$, $1$, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

**Propriété :**

Soit $E$ de dimension finie $n$.

Soit $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de $E$ de cardinal $p$, disons $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots u_p)$.

Notons $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Soit $r = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$ (ainsi, $r = \dim F$).

Alors :

- $r \leqslant p$ : $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est génératrice de $F$ donc $p \geqslant r$.
- $r \leqslant n$ : $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ donc $\dim F \leqslant \dim E$.
- $r = p \iff \mathscr{F}$ est libre : $r = p \iff \dim F = p \iff (u_1, u_2, \dots u_p)$ est une base de $F$.
- $r = n \iff \mathscr{F}$ est génératrice de $E$ : $r = n \iff \dim F = n \iff F = E \iff \mathscr{F}$ engendre $E$.
- $r = n = p \iff \mathscr{F}$ est une base de $E$ (résulte des deux derniers points)

**Exemple :**

Famille de 5 vecteurs de rang 3 dans un espace vectoriel de dimension 4 :

$$[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(7,5,2,0),(49,2,-3,0)] \tag{10.13}$$

# III Somme de sous-espaces vectoriels et dimension

Ici, $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n$.

**Théorème :**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ en somme directe.

Si $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est une base de $F$,

et si $(v_1, v_2, \dots v_q)$ est une base de $G$,

alors $(u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q)$ est une base de $F \oplus G$.

**Démonstration :**

- $(u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q)$ est génératrice de $F \oplus G$ : évident.
- Cette famille est libre : si

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p}_{=u \in F} + \underbrace{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_q v_q}_{=v \in G} = 0_E, \tag{10.14}$$

  alors $v = u = 0_E$ car $F$ et $G$ sont en somme directe.

  Or, si $u = 0_E$, alors $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$ car $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre.

  Et si $v = 0_E$, alors $\forall i \in [\![1, q]\!], \mu_i = 0$ car $(v_1, v_2, \dots v_q)$ est libre.

  Donc $(u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q)$ est libre. C'est donc une base de $F \oplus G$.

**Conséquence :**

si $F$ et $G$ sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

**Théorème :**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

Alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

**Démonstration :**

Posons $H = F \cap G$. Alors $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$, $F$ et $G$.

$H$ est un sous-espace vectoriel de $G$, il a donc un supplémentaire dans $G$, disons $G_1$.

Donc $G = H \oplus G_1$.

Alors $F + G = F + G_1$, et $F$ et $G_1$ sont en somme directe :

1. La somme est directe : si $u \in F \cap G_1$, alors $u \in F \cap G = H$, et $u \in G_1$. Donc $u \in \underbrace{H \cap G_1}_{=\{O_E\}}$. Donc $u = 0_E$.

2. $F + G = F + G_1$ : Déjà, $F + G \subset F + G_1$ (si $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w_1}_{\in G_1 \subset G}$, alors $u \in F + G$)

   Soit $u \in F + G$. Alors $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$. Or, $w \in G$. Donc $w = \underbrace{h}_{\in H} + \underbrace{w_1}_{\in G_1}$.

   Donc $u = \underbrace{v + h}_{\in F \text{ car } h \in H \subset F} + \underbrace{w_1}_{\in G_1}$.

Donc $F + G = F \oplus G_1$.

Ainsi, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G_1)$.

Or, $\dim(G) = \dim(G_1) + \dim(H)$ (car $G = H \oplus G_1$).

Donc $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(H)$.

**Conséquence :**

Soient $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors :

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E &\iff \begin{cases} F + G = E & (1) \\ F \cap G = \{0_E\} & (2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = n & (3) \\ F \cap G = \{0_E\} & (2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = n & (3) \\ F + G = E & (1) \end{cases} \end{aligned} \tag{10.15}$$

**Démonstration :**

- (1) et (2) $\implies$ (3) : évident selon la formule.
- (2) et (3) $\implies$ (1) : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$. Ainsi, $\dim(F + G) = n$, donc $F + G = E$.
- (3) et (1) $\implies$ (2) : $\dim(F + G) = \dim E = n$ et $\dim F + \dim G = n$, donc $\dim(F \cap G) = 0$ donc $F \cap G = \{0_E\}$.

# IV Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe,

$E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$.

$F$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.

## A) Détermination d'une application linéaire par la donnée des images des vecteurs d'une base

**Théorème :**
Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de $E$.
Soit $(v_1, v_2, \dots v_p)$ un $p$-uplet de vecteurs quelconques de $F$.
Alors il existe une unique application linéaire $\varphi$ de $E$ dans $F$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!], \varphi(e_i) = v_i$.

**Démonstration :**

- Unicité : si $\varphi$ convient, alors, étant donné $u \in E$, $u = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Donc $\varphi(u) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j v_j$.
- Existence : Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans $F$ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \substack{u \text{ de composantes} \\ (x_1, \dots x_p) \text{ dans } \mathscr{B}_E} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j u_j \end{array}. \tag{10.16}$$

(La définition a un sens car la décomposition dans une base est unique).
Alors $\varphi$ est linéaire : Soient $u, u' \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots x_p)$, $(x'_1, x'_2, \dots x'_p)$ dans $\mathscr{B}_E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors $u + \lambda u'$ a pour composantes $(x_1 + \lambda x'_1, x_2 + \lambda x'_2, \dots x_p + \lambda x'_p)$ dans $\mathscr{B}_E$.
Donc

$$\varphi(u + \lambda u') = \sum_{j=1}^{p} (x_j + \lambda x'_j) v_j = \sum_{j=1}^{p} x_j v_j + \lambda \sum_{j=1}^{p} x'_j v_j = \varphi(u) + \lambda \varphi(u'). \tag{10.17}$$

Enfin, on a bien $\forall i \in [\![1, p]\!], \varphi(e_i) = v_i$ :
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $e_i$ a pour composantes $(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots 0)$ dans $\mathscr{B}_E$, donc $\varphi(e_i) = x_i v_i = v_i$

**Conséquence :**
Si $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ est une base de $E$, et $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$ est une base de $F$.
Alors la donnée d'une application linéaire de $E$ dans $F$ revient à la donnée de $n \times p$ scalaires, à savoir les $a_{i,j}$, pour $i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, p]\!]$ tels que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \varphi(e_j) = (\text{vecteur de composantes les } a_{i,j} \text{ dans } \mathscr{B}_F) \tag{10.18}$$

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \quad (= v_j) \tag{10.19}$$

On range ces scalaires dans un tableau à $n$ lignes, $p$ colonnes, de sorte que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j}$ est placé sur la $i$-ème ligne de la $j$-ème colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \tag{10.20}$$

Ce tableau s'appelle la matrice de $\varphi$ dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ (attention : le « et » n'est pas commutatif)
La $j$-ème colonne de cette matrice est la colonne des composantes de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

## B) Applications linéaires et images des vecteurs d'une base

**Proposition :**
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de $E$. Alors :

1. $\mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p)) = \mathrm{Im}\,\varphi$.
2. $\varphi$ est surjective si et seulement si $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est génératrice de $F$.
3. $\varphi$ est injective si et seulement si $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre.
4. $\varphi$ est bijective si et seulement si $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est une base de $F$.

**Démonstration :**

1. - Si $v \in \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$, alors $v = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j\right) \in \mathrm{Im}\,\varphi$.
   - Si $v \in \mathrm{Im}\,\varphi$, alors $v = \varphi(u)$, où $u \in E$. Or, $u = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ (décomposition de $u$ dans $\mathscr{B}_E$). Donc $v = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varphi(e_j) \in \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$.
2. Conséquence évidente du premier.
3. - Si $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre : soit $u \in \ker\varphi$, $u = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Alors $0 = \varphi(u) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j)$. $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre, donc $\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = 0$. Donc $\ker\varphi = \{0_E\}$. Donc $\varphi$ est injective.
   - Si $\varphi$ est injective : soient $x_1, x_2, \dots x_p \in \mathbb{K}$. Supposons que $\sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j) = 0_F$. Alors $\varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = 0_F$. Donc $\sum_{j=1}^{p} x_j e_j = 0_E$ (car $\ker\varphi = \{0_E\}$). Donc $\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = 0$ (car $(e_1, e_2, \dots e_p)$ est libre). Donc $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre.
4. Conséquence directe des deux points précédents.

**Conséquence :**
Si $\dim E = p$, $\dim F = n$, alors :
$\varphi$ surjective $\implies n \leqslant p$.
$\varphi$ injective $\implies p \leqslant n$.

## C) Isomorphismes

**Proposition :**
Soit $E$ de dimension $p$, $F$ de dimension $n$.
Alors $E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

**Démonstration :**

- Si $E$ et $F$ sont isomorphes, alors il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective. On a alors $\dim E = \dim F$ (car alors $\dim E \leqslant \dim F$ et $\dim F \leqslant \dim E$).
- Si $\dim E = \dim F = p$. Soient alors $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de $E$ et $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_p)$ une base de $F$. Il existe alors une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!], \varphi(e_i) = f_i$. Cette application est donc un isomorphisme (car la famille $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$ est libre et génératrice).

**Proposition :**
Soient $E$ et $F$ de même dimension finie.
Alors, pour tout $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ est bijective} &\iff \varphi \text{ est injective} \\ &\iff \varphi \text{ est surjective} \end{aligned} \tag{10.21}$$

**Démonstration :**
Supposons que $\dim E = \dim F = n$. Soit alors $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de $E$.
Alors :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ est injective} &\iff (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)) \text{ est libre} \\ &\iff (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)) \text{ est une base de } F (\text{car } \dim F = n) \\ &\iff \varphi \text{ est bijective.} \end{aligned} \tag{10.22}$$

On fait la même chose pour l'autre équivalence.

**Proposition :**
Les isomorphismes conservent le rang, c'est-à-dire que si $\varphi$ est un isomorphisme de $E$ dans $E'$, alors, pour toute famille $(u_1, u_2, \dots u_q)$ de vecteurs de $E$, $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots u_q) = \mathrm{rg}(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_q))$.

**Démonstration :**
Si on note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_q)$, alors $\varphi(F) = \mathrm{Vect}(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_q))$, et $\varphi$ réalise alors un isomorphisme de $F$ dans $\varphi(F)$. Donc $\dim F = \dim \varphi(F)$.

**Exemple :**
Soit $E$ de dimension $n$, $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de $E$.
Alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array} \tag{10.23}$$

est un isomorphisme.

## D) Le théorème « noyau–image »

**Théorème (Noyau–image) :**
Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-ev, où $E$ est de dimension finie.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\mathrm{Im}\,\varphi$ est de dimension finie, et $\dim E = \dim(\ker \varphi) + \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$.

**Démonstration :**
On peut introduire un supplémentaire $G$ de $\ker \varphi$ dans $E$. Ainsi, $E = \ker \varphi \oplus G$.
On définit alors

$$\begin{array}{rccc} \hat{\varphi} : & G & \longrightarrow & \mathrm{Im}\,\varphi \\ & u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array} . \tag{10.24}$$

Alors $\hat{\varphi}$ est linéaire (C'est en quelque sorte « $\varphi_{|G}$ »)

Alors :

- $\hat{\varphi}$ est injective : $\ker \hat{\varphi} = \{u \in G, \hat{\varphi}(u) = 0\} = \{u \in G, \varphi(u) = 0\} = G \cap \ker \varphi = \{0_E\}$.
- $\hat{\varphi}$ est surjective : Soit $v \in \operatorname{Im} \varphi$. $v$ s'écrit $\varphi(u)$, où $u \in E$. Alors $u = \underbrace{w'}_{\in \ker \varphi} + \underbrace{w}_{\in G}$. Donc $\varphi(u) = \varphi(w') + \varphi(w) = \varphi(w) = v$.

Donc $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Donc $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = \dim G$.

Or, $\dim G = \dim E - \dim(\ker \varphi)$.

Donc $\dim E = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi)$.

**Conséquence :**

On retrouve le fait que :

- $\dim(\operatorname{Im} \varphi) \leqslant \dim E$
- $\varphi$ injective $\implies \dim E \leqslant \dim F$
- $\varphi$ surjective $\implies \dim E \geqslant \dim F$
- Si $\dim E = \dim F$, $\varphi$ bijective $\iff$ $\varphi$ surjective $\iff$ $\varphi$ injective

### E) Rang d'une application linéaire

**Définition :**

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, où $E$ est de dimension finie.

Le rang de $\varphi$ est $\operatorname{rg} \varphi = \dim(\operatorname{Im} \varphi)$

**Proposition :**

- Si $(e_1, e_2, \dots e_p)$ est une base de $E$, alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \varphi = \dim(\operatorname{Im} \varphi) &= \dim(\operatorname{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))) \\ &= \operatorname{rg}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p)) \end{aligned} \tag{10.25}$$

- Si on note $\dim E = p$, $\dim F = n$, $\operatorname{rg}(\varphi) = r$, alors :

$$r \leqslant n, \qquad r \leqslant p, \tag{10.26}$$

et

$$r = p \iff \varphi \text{ injective}, \qquad r = n \iff \varphi \text{ surjective}, \qquad r = n = p \iff \varphi \text{ bijective} \tag{10.27}$$

(découle directement du théorème noyau–image)

## V Formes linéaires et hyperplan

Dans ce paragraphe, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$.

## A) Formes linéaires de $E$

**Rappel :**

Une forme linéaire de $E$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires de $E$ est $\mathscr{L}(E, K)$, noté aussi $E^*$ (dual de $E$).

($E^*$ est un $\mathbb{K}$-ev).

**Proposition :**

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de $E$.

Les formes linéaires de $E$ sont exactement les applications du type :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \substack{u \text{ de composantes} \\ (x_1, x_2, \dots x_n) \text{ dans } \mathscr{B}} & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \end{array}, \tag{10.28}$$

où $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$.

**Démonstration :**

L'application :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_ie_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_ia_i \end{array} \tag{10.29}$$

est l'unique application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi(e_i) = a_i$. La matrice de cette application linéaire $\varphi$ dans les bases $\mathscr{B}$ et (1) est la matrice ligne $(a_1, a_2, \dots a_n)$ (1 ligne, $n$ colonnes)

**Cas particulier :**

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $p_i$ la forme linéaire :

$$p_i : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \substack{u \text{ de composantes} \\ (x_1, x_2, \dots x_n) \text{ dans } \mathscr{B}} & \longmapsto & x_i \end{array} \tag{10.30}$$

(de matrice $(0, \dots \underset{i}{1}, \dots 0)$) ; on les appelle les projections relatives à $\mathscr{B}$.

La famille des $p_i$ est évidemment génératrice de $E^*$ (lire « $E$ dual »), et elle est libre :

$$\sum_{i=1}^{n} a_ip_i = 0_{E*} \implies \forall j \in [\![1, n]\!], \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_ip_i\right)(e_j)}_{=a_j} = 0_E. \tag{10.31}$$

Donc $(p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $E^*$. Donc $E^*$ est de même dimension que $E$. La base $(p_1, p_2, \dots p_n)$ est appelée la base duale de $(e_1, e_2, \dots e_n)$.

## B) Hyperplan

**Définition :**

Un hyperplan de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $n - 1$.

**Exemple :**

En dimension 2, les hyperplans sont des droites.

En dimension 3, les hyperplans sont des plans.

**Théorème :**

Les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles de $E$.

Plus précisément :

1. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) \backslash \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}\}$, alors $\ker \varphi$ est un hyperplan de $E$.
2. Si $H$ est un hyperplan de $E$, alors il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) \backslash \{0\}$ tel que $H = \ker \varphi$.
3. Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ sont tels que $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$, alors $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tel que $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$.

**Démonstration :**

1. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) \backslash \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}\}$, alors $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, qui est de dimension 1. Donc $\operatorname{Im} \varphi$ est de dimension 0 ou 1. Si $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 0$, alors $\operatorname{Im} \varphi = \{0\}$ et $\varphi = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$. Donc $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 1$ (et $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{K}$).
   Donc $\dim(\ker \varphi) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} \varphi) = n - 1$.
2. Soit $H$ un hyperplan de $E$. Soit $(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$ une base de $H$.
   On la complète en une base de $E$ : $(u_1, u_2, \dots u_n)$.
   Soit $\varphi$ la forme linéaire qui envoie les $u_i, i \in [\![1, n-1]\!]$ sur 0 et $u_n$ sur 1.
   Alors $\ker \varphi = H$ (car pour $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $\varphi(v) = 0 \iff x_n = 0 \iff v \in H$).
3. Si $\varphi_1 = 0$, $\ker \varphi_1 = E$ ; donc $\ker \varphi_2 = E$, donc $\varphi_2 = 0 = 1.\varphi_1$.
   Si $\varphi_1 \neq 0$, le noyau de $\varphi_1$ est un hyperplan $H$ de base $(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$, que l'on complète en une base $(u_1, u_2, \dots u_n)$ de $E$. Alors :
   $$\begin{cases} \varphi_1(u_1) & = \varphi_2(u_1) = 0 \\ \vdots & \\ \varphi_1(u_{n-1}) & = \varphi_2(u_{n-1}) = 0 \\ \varphi_1(u_n) & = a \in \mathbb{K} \backslash \{0\} \qquad \varphi_2(u_n) = b \in \mathbb{K} \backslash \{0\} \end{cases} \tag{10.32}$$
   Donc $\varphi_2 = \frac{b}{a} \varphi_1$ (puisque $\forall j \in [\![1, n]\!], \varphi_2(u_j) = \frac{b}{a} \varphi_1(u_j)$ et la donnée des images des vecteurs d'une base détermine l'application linéaire)

**Conséquence :**

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de $E$. Alors les hyperplans de $E$ sont exactement les parties de $E$ qui admettent dans la base $\mathscr{B}$, une équation du type

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \tag{10.33}$$

où les $a_i$ sont des scalaires non tous nuls. De plus, si un hyperplan admet deux équations, alors elles sont proportionnelles.

**Rappel :**

Étant donnée $F \in \mathscr{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, la partie $E$ d'équation $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ dans la base $\mathscr{B}$ est, par définition, l'ensemble des composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathscr{B}$ vérifiant $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$.

On verra que si $F$ est un sev de $E$ de dimension $p$, alors $F$ est l'intersection d'hyperplans (et peut donc être défini par un système d'équations), le nombre minimum d'équations nécessaires étant $n - p$.