Chapitre 12 : Déterminants

Ici, $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et n un entier naturel ≥ 2

I Applications n-linéaires

A) Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Une application n-linéaire de E^n dans F est une application :

$$\phi : E\times E ... E \to F$$
$$(u_1, u_2 ... u_n) \mapsto \phi(u_1, u_2 ... u_n)$$

Telle que :

Pour tout $U = (u_1, u_2 ... u_n)$, les n applications partielles :

$\begin{array}{rl} \phi_{U,i} : & E \to F \\ & v \mapsto \phi(u_1, u_2 ... u_{i-1}, v, ... u_n) \end{array}$, obtenues pour $i \in [\![1, n]\!]$, sont linéaires.

Exemple : 2-linéaire = bilinéaire

$\phi : E\times E \to F$ est bilinéaire lorsque :

$$\forall v \in E, \forall (u,u') \in E\times E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \phi(u+\lambda u', v) = \phi(u,v) + \lambda\phi(u',v)$$
$$\text{et}\phi(v, u+\lambda u') = \phi(v,u) + \lambda\phi(v,u')$$

Exemple :

$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x\times y \end{array}$ est bilinéaire

Proposition : si $\varphi : E^n \to F$ est n-linéaire et, pour $(u_1, u_2 ... u_n) \in E^n$, si l'un des u_i est nul, alors $\varphi(u_1, u_2 ... u_n) = 0$

En effet, l'application $v \mapsto \varphi(u_1, u_2 ... u_{i-1}, v, ... u_n)$ est linéaire donc nulle en 0.

B) Application n-linéaire antisymétrique

Soit $\phi : E^n \to F$ n-linéaire.

Alors ϕ est antisymétrique $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(i \neq j \Rightarrow \phi(u_1 ... \underbrace{u_i}_{i} ... \underbrace{u_j}_{j} ... u_n) = -\phi(u_1 ... \underbrace{u_j}_{i} ... \underbrace{u_i}_{j} ... u_n) \right)$

Proposition :

Soit $\phi : E^n \to F$ antisymétrique. Alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et tout $(u_1, u_2 ... u_n) \in E^n$, $\phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)} ... u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \times \phi(u_1, u_2 ... u_n)$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Démonstration : montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, « pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décomposant en produit de k transpositions, et tout $(u_1, u_2 ... u_n) \in E^n$, $\phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)} ... u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \times \phi(u_1, u_2 ... u_n)$ » ($P(k)$)

* $P(0)$ ok (la seule transposition qui se décompose en produit de 0 transpositions est l'identité, de signature 1)

* $P(1)$: définition de antisymétrique

* Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $P(k)$. Soit alors $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrivant $\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}$, où les τ_i sont des transpositions. Soit $\sigma' = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_k$ et $\tau = \tau_{k+1}$.

Soit $(u_1, u_2 ... u_n) \in E^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)} ... u_{\sigma(n)}) &= \phi(u_{\sigma'(\tau(1))}, u_{\sigma'(\tau(2))} ... u_{\sigma'(\tau(n))}) \\
&= \phi(u'_{\tau(1)}, u'_{\tau(2)} ... u'_{\tau(n)}) \\
&\quad \text{où on a noté } u'_i = u_{\sigma'(i)} \\
&= -\phi(u'_1, u'_2 ... u'_n) \\
&= -\phi(u_{\sigma'(1)}, u_{\sigma'(2)} ... u_{\sigma'(n)}) \\
&= -\varepsilon(\sigma')\phi(u_1, u_2 ... u_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\phi(u_1, u_2 ... u_n)
\end{aligned}$$

Exemple : le produit vectoriel :

$\begin{array}{l} E \times E \to E \\ (u,v) \mapsto u \wedge v \end{array}$, où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, est une application bilinéaire antisymétrique.

C) Applications n-linéaires alternées

Définition : soit $\phi : E^n \to F$ n-linéaire.

Alors ϕ est alternée $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ Pour tout $(u_1, u_2 ... u_n) \in E^n$, si il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts tels que $u_i = u_j$, alors $\phi(u_1, u_2 ... u_n) = 0$

Proposition : Alternée $\Leftrightarrow$ antisymétrique

Démonstration :

(1) Supposons ϕ alternée.

Soit $(u_1, u_2 ... u_n) \in E^n$, soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts. On a :

$$\phi(u_1, u_2 ... \underbrace{(u_i + u_j)}_{i} ... \underbrace{(u_i + u_j)}_{j} ... u_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(u_1, u_2 ... (u_i + u_j) ... u_i ... u_n) + \phi(u_1, u_2 ... (u_i + u_j) ... u_j ... u_n) \\
&= \underbrace{\phi(u_1, u_2 ... u_i ... u_i ... u_n)}_{=0} + \phi(u_1, u_2 ... u_j ... u_i ... u_n) \\
&\quad + \phi(u_1, u_2 ... u_i ... u_j ... u_n) + \underbrace{\phi(u_1, u_2 ... u_j ... u_j ... u_n)}_{=0}
\end{aligned}$$

Donc $\phi(u_1, u_2 ... u_j ... u_i ... u_n) = -\phi(u_1, u_2 ... u_i ... u_j ... u_n)$

(2) Supposons ϕ antisymétrique. Soit $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$, supposons qu'il existe $i,j\in[\![1,n]\!]$ distincts tels que $u_i=u_j$.

Alors $\phi(u_1,u_2...u_i...u_i...u_n)=-\phi(u_1,u_2...u_i...u_i...u_n)$.

Donc $\phi(u_1,u_2...u_i...u_i...u_n)=0$ (car $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ donc $2\neq 0$)

Remarque : l'implication antisymétrique $\Rightarrow$ alternée est fausse lorsque $\mathbb{K}$ est par exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire un corps de caractéristique 2 (d'où l'intérêt d'avoir deux définitions)

D) Formes *n*-linéaires alternées en dimension *n*.

On s'intéresse à $\phi:E^n\to\mathbb{K}$, n-linéaire alternée lorsque E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On dit alors que ϕ est une forme n-linéaire alternée sur E (pas ^{n})

Etude :

Soit $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ une base de E.

Soit $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$, et $A=\mathrm{mat}((u_1,u_2...u_n),\mathfrak{B})$

Ainsi, $\forall j\in[\![1,n]\!], u_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. On a :

$$\begin{aligned}\phi(u_1,u_2...u_n)&=\phi(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,u_2...u_n)=\sum_{i=1}^n a_{i1}\phi(e_i,u_2...u_n)\\&=\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}\left(\sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}\phi(e_{i_1},e_{i_2}...u_n)\right)\\&=\sum_{i_1=1}^n\left(\sum_{i_2=1}^n a_{i_1 1}a_{i_2 2}\phi(e_{i_1},e_{i_2}...u_n)\right)\\&=\sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\sum_{i_3=1}^n a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}\phi(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3}...u_n)\\&=\sum_{(i_1,i_2,...i_n)\in[\![1,n]\!]^n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}...a_{i_n n}\phi(e_{i_1},e_{i_2}...e_{i_n})\end{aligned}$$

(On a utilisé uniquement le fait que ϕ est n-linéaire)

Ainsi :

$$\begin{aligned}\phi(u_1,u_2...u_n)&=\sum_{f\in\mathfrak{F}([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])} a_{f(1),1}a_{f(2),2}...a_{f(n),n}\underbrace{\phi(e_{f(1)},e_{f(2)}...e_{f(n)})}_{\substack{=0\text{ pour } f \text{ non injective}\\ \text{car } \phi \text{ est alternée}}}\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)}...e_{\sigma(n)})\\&=\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\right)\phi(e_1,e_2...e_n)\end{aligned}$$

II Déterminant dans une base d'une famille de n vecteurs

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Théorème :
Soit $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ une base de E.
Alors :
(1) Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathfrak{B}$. Elle s'appelle $\det_{\mathfrak{B}}$ (déterminant dans la base $\mathfrak{B}$)
(2) Pour toute forme n-linéaire alternée ϕ sur E, on a, pour tout $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$: $\phi(u_1,u_2...u_n)=\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n).\phi(e_1,e_2...e_n)$

Démonstration :
(1) Unicité : si Δ est une forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathfrak{B}$, alors, nécessairement : $\forall(u_1,u_2...u_n)\in E^n, \Delta(u_1,u_2...u_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}$ (d'après l'étude), où $A=(a_{ij})=\mathrm{mat}((u_1,u_2...u_n),\mathfrak{B})$. D'où l'unicité.

Vérifions que Δ défini par cette formule est n-linéaire alternée

- Δ est n-linéaire : ok. C'est une forme n-linéaire : ok

Par exemple : linéaire par rapport à la première variable :
Soient $u_1,u_2...u_n$ de composantes données par la matrice A, u'_1 de composantes les $a'_{i,1}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\Delta(u_1+\lambda u'_1,u_2...u_n)&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\left(a_{\sigma(1),1}+\lambda a'_{\sigma(1),1}\right)a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}+\lambda\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\\&=\Delta(u_1,u_2...u_n)+\lambda\Delta(u'_1,u_2...u_n)\end{aligned}$$

- Δ est alternée :

Soit $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$, supposons $u_i=u_j$ avec $i<j$. Soit $\tau=(i,j)$

$$\begin{aligned}\Delta(u_1,u_2...u_n)&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\\&=\sum_{\sigma\in A_n}a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}-\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus A_n}a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\end{aligned}$$

Or, l'application $\sigma\mapsto\sigma\circ\tau$ constitue une bijection de A_n vers $\mathfrak{S}_n\setminus A_n$. On a donc :

$$\Delta(u_1,u_2...u_n)=\sum_{\sigma\in A_n}a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}-\sum_{\sigma\in A_n}a_{\sigma\circ\tau(1),1}a_{\sigma\circ\tau(2),2}...a_{\sigma\circ\tau(n),n}$$

Mais, pour tout $\sigma\in A_n$:

$$\begin{aligned}a_{\sigma\circ\tau(1),1}a_{\sigma\circ\tau(2),2}...a_{\sigma\circ\tau(i),i}...a_{\sigma\circ\tau(j),j}...a_{\sigma\circ\tau(n),n}&=a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(j),i}...a_{\sigma(i),j}...a_{\sigma(n),n}\\&=a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(j),j}...a_{\sigma(i),i}...a_{\sigma(n),n}\\&\quad(\text{car } u_i=u_j \text{ donc } \forall k\in[\![1,n]\!], a_{ki}=a_{kj})\\&=a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(i),i}...a_{\sigma(j),j}...a_{\sigma(n),n}\end{aligned}$$

- $\Delta(e_1,e_2,...e_n)=1$:

Si $A=I_n(=\mathrm{mat}(\mathfrak{B},\mathfrak{B}))$, les produits $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(i),i}...a_{\sigma(j),j}...a_{\sigma(n),n}$ sont tous nuls sauf pour $\sigma=\mathrm{Id}$, où il vaut 1.

(2) Résultat de l'étude

Exemples :

- Soit E de dimension 2, $\mathfrak{B}=(e_1,e_2)$ une base de E. Soient u_1,u_2 deux vecteurs de E, de composantes $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Alors $A=\mathrm{mat}((u_1,u_2),\mathfrak{B})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ ($\mathfrak{S}_2=\{\mathrm{Id},\tau_{12}\}$)

- Soit E de dimension 3, $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Soient $u_1,u_2,u_3\in E$.
$A=\mathrm{mat}((u_1,u_2,u_3),\mathfrak{B})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\mathfrak{S}_3=\{\underbrace{\mathrm{Id},(1,2,3),(3,2,1)}_{\text{paires}},(1,2),(2,3),(3,1)\}$
Donc $\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2,u_3)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$
$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$

Théorème (Chasles)
Soient $\mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ deux bases de E. Alors, pour tout $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$:
$\det_{\mathfrak{B}'}(u_1,u_2...u_n)=\det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})\times\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n)$

Démonstration : On applique le 2ème résultat du théorème avec $\phi=\det_{\mathfrak{B}'}$:
$\underbrace{\phi(u_1,u_2...u_n)}_{\det_{\mathfrak{B}'}(u_1,u_2...u_n)}=\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n).\underbrace{\phi(e_1,e_2...e_n)}_{\det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})}$

Théorème :
Soit $\mathfrak{B}$ une base de E. Soit $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$.
Alors $(u_1,u_2...u_n)$ est liée $\Leftrightarrow \det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n)=0$

Démonstration :

- Si $(u_1,u_2...u_n)$ est liée, alors l'un des u_i, disons u_j est combinaison linéaire des autres : $u_j=\sum_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}\alpha_i u_i$.

Alors $\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n)=\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...\sum_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}\alpha_i u_i...u_n)=\sum_{i\neq j}\alpha_i\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...\underbrace{u_i}_{j}...u_n)=0$

- Si $(u_1,u_2...u_n)$ est libre, elle forme une base $\mathfrak{B}$' et alors :

$\underbrace{\det_{\mathfrak{B}'}(u_1,u_2...u_n)}_{=1\neq 0}=\det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})\times\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n)$

Donc $\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2...u_n)\neq 0$

III Déterminant d'un endomorphisme

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Théorème et définition :

Soit $\varphi \in L(E)$, soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ une base de E.

Alors la valeur de $\det_{\mathfrak{B}}(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \ldots \varphi(e_n))$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{B}$. On l'appelle $\det(\varphi)$

Démonstration :

Soit $\mathfrak{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots e'_n)$ une autre base de E. Alors :

$$\det_{\mathfrak{B}'}(\varphi(e'_1), \varphi(e'_2) \ldots \varphi(e'_n)) = \det_{\mathfrak{B}}(e'_1, e'_2 \ldots e'_n) \times \det_{\mathfrak{B}'}(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \ldots \varphi(e_n))$$

(selon la $2^{\text{ème}}$ partie du 1^{er} théorème du II avec $\phi : (u_1, \ldots u_n) \mapsto \det_{\mathfrak{B}'}(\varphi(u_1), \ldots \varphi(u_n))$, appliqué en $(e'_1, e'_2 \ldots e'_n)$)

$$= \det_{\mathfrak{B}}(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \ldots \varphi(e_n)) \text{ (Chasles)}$$

Ainsi, si $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B})$, alors $\det(\varphi) = \det_{\mathfrak{B}}(\varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$

Théorème :

Soient $\varphi, \psi \in L(E)$. Alors :

(1) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$

(2) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$

(3) $\varphi \in GL(E) \Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$, et dans ce cas $\det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\varphi)}$

Démonstration : Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ une base de E.

(1) $\det(\varphi \circ \psi) = \det_{\mathfrak{B}}(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \ldots \varphi \circ \psi(e_n))$

- Si la famille $(\psi(e_1), \psi(e_2) \ldots \psi(e_n))$ est liée, alors $\det(\psi) = 0$. D'autre part, la famille $(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \ldots \varphi \circ \psi(e_n))$ est aussi liée. Donc $\det(\varphi \circ \psi) = 0$ aussi. Donc $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$ $(= 0)$
- Si la famille des $(\psi(e_1), \psi(e_2) \ldots \psi(e_n))$ est libre, elle constitue une base $\mathfrak{B}'$ de E, et :
$$\underbrace{\det_{\mathfrak{B}}(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \ldots \varphi \circ \psi(e_n))}_{\det(\varphi \circ \psi)} = \underbrace{\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}')}_{\det(\psi)} \times \underbrace{\det_{\mathfrak{B}'}(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \ldots \varphi \circ \psi(e_n))}_{\det(\varphi)}$$

(2) Immédiat

(3) Si $\varphi \in GL(E)$, on peut introduire φ^{-1}.

Alors $1 = \det(\mathrm{Id}_E) = \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \det(\varphi) \times \det(\varphi^{-1})$

Donc $\det(\varphi) \neq 0$ et $\det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\varphi)}$

Si $\varphi \notin GL(E)$, alors $(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \ldots \varphi(e_n))$ est liée, donc $\det(\varphi) = 0$

IV Déterminant d'une matrice carrée

A) Définition et propriété

Définition : soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$

Alors $\det(A) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ une base de E.

Soit $(u_1,u_2...u_n)\in E^n$ tel que $\mathrm{mat}((u_1,u_2...u_n),\mathfrak{B})=A$.

Soit $\varphi\in L(E)$ tel que $\mathrm{mat}(\varphi,\mathfrak{B})=A$

Alors : $\boxed{\det(A)=\det(\varphi)=\det_{\mathfrak{B}}(u_1,u_2,...u_n)}$

Propriétés : soient $A,B\in M_n(\mathbb{K})$

Alors :

$\det(AB)=\det(A)\times\det(B)$; $\det(I_n)=1$

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$, et dans ce cas $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

$\det({}^tA)=\det(A)$

Démonstration : les trois premiers sont immédiats en passant par les endomorphismes.

On note ${}^tA=(b_{ij})$, où $\forall(i,j)\in [\![1,n]\!]^2, b_{ij}=a_{ji}$

On a donc :

$$\det({}^tA)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1),1}b_{\sigma(2),2}...b_{\sigma(n),n}$$

$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}...a_{n,\sigma(n)}$$

Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Pour tout $\rho\in\mathfrak{S}_n$, on a :

$$a_{\rho(1),\sigma(\rho(1))}a_{\rho(2),\sigma(\rho(2))}...a_{\rho(n),\sigma(\rho(n))}=a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}...a_{n,\sigma(n)}$$

(simple permutation de l'ordre des termes du produit)

Donc $\det({}^tA)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma^{-1}(1),1}a_{\sigma^{-1}(2),2}...a_{\sigma^{-1}(n),n}$

De plus, $1=\varepsilon(\sigma^{-1}\circ\sigma)=\varepsilon(\sigma^{-1})\times\varepsilon(\sigma)$

Donc $\varepsilon(\sigma^{-1})=\dfrac{1}{\varepsilon(\sigma)}=\varepsilon(\sigma)$

Donc $\det({}^tA)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(1),1}a_{\sigma^{-1}(2),2}...a_{\sigma^{-1}(n),n}$

$$=\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma')a_{\sigma'(1),1}a_{\sigma'(2),2}...a_{\sigma'(n),n}$$

$$=\det(A)$$

B) Propriétés portant sur les colonnes et les lignes

1) Sur les colonnes

Notation :
$C_1, C_2 \dots C_n$ étant les colonnes de $A \in M_n(\mathbb{K})$, on notera $A = [C_1, C_2 \dots C_n]$.

Résultat essentiel :
$\det(A) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1, C_2 \dots C_n)$, où $\mathfrak{B}$ est la base naturelle de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

Donc les déterminants d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes. Ainsi, le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne :

$$\det[C_1, C_2 \dots C_j + \lambda C'_j \dots C_n] = \det[C_1, C_2 \dots C_j \dots C_n] + \lambda \det[C_1, C_2 \dots C'_j \dots C_n]$$

Et c'est une forme linéaire alternée :

$$\det[C_1, C_2 \dots C_i \dots C_i \dots C_n] = 0$$

et $\det[C_1, C_2 \dots C_i \dots C_j \dots C_n] = -\det[C_1, C_2 \dots C_j \dots C_i \dots C_n]$

et $\det[C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)} \dots C_{\sigma(n)}] = \varepsilon(\sigma) \det[C_1, C_2 \dots C_n]$

et aussi $\det[C_1, C_2 \dots \underbrace{\sum_{i \neq j} \alpha_i C_i}_{j} \dots C_n] = 0$

Du coup, pour les transformations :

* $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifie pas le déterminant :

$$\det[C_1, C_2 \dots C_i + \lambda C_j \dots C_n] = \det[C_1, C_2 \dots C_i \dots C_n] + \underbrace{\lambda \det[C_1, C_2 \dots \underbrace{C_j}_{i} \dots C_n]}_{=0}$$

* $C_i \leftarrow \alpha C_i$ « multiplie le déterminant par α »
* $C_i \leftrightarrow C_j$ « multiplie le déterminant par -1 »

2) Sur les lignes

Mêmes résultats obtenus par transposition

C) Déterminant d'une matrice triangulaire

Cas d'une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ (si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, alors $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = 0$)

Cas d'une matrice triangulaire : $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & - & - & - \\ 0 & a_{2,2} & - & - \\ \vdots & \ddots & \ddots & - \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

Supposons que $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n} \neq 0$

Alors :

$\sigma(1)=1$ (sinon $\sigma(1)>1$ et $\sigma(1)=0$)

$\sigma(2)\leq 2$ et $\sigma(2)\neq 1$ donc $\sigma(2)=2$

$\vdots$

Donc $\sigma = \mathrm{Id}$

Donc $\det(A)=a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$. On retrouve le fait que A est inversible si et seulement si ses coefficients de la diagonale sont tout non nuls.

Notation :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Conséquence : méthode pratique : le pivot de Gauss pour calculer le déterminant.

Exemple :

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 1ère méthode exclue : formule développée…

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_4 \\ L_2\leftarrow L_2-L_4 \\ L_1\leftarrow L_1-2L_4}}{\overset{=}{\uparrow}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_3 \\ L_1\leftarrow L_1+L_3}}{\overset{=}{\uparrow}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3\leftarrow C_3+C_4}{\overset{=}{\uparrow}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_4\leftrightarrow L_1 \\ L_3\leftrightarrow L_4 \\ L_2\leftrightarrow L_4}}{\overset{=}{\uparrow}} (-1)^3\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

V Développement selon une rangée

A) Petit lemme

Soit $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\\ \sigma(n)=n}}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n-1),n-1}\times 1 \\ &= \det(B)\end{aligned}$$

Où B est la matrice extraite de A en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne.

B) Développement selon une colonne

Soient $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$, $k\in[\![1,n]\!]$

La colonne C_k s'écrit :

$$C_k = a_{1,k}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{=E_1}+a_{2,k}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{=E_2}+\dots+a_{n,k}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{=E_n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}E_i$$

Donc $\det A=\det[C_1,C_2\dots C_n]=\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}\underbrace{\det[C_1,C_2\dots\underbrace{E_i}_{k}\dots C_n]}_{\mu_{i,k}}$

Ainsi, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\boxed{\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}\mu_{i,k}}$

$$\mu_{i,k} = \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \_\_\_ & 0 & \_\_ \\ \_\_\_ & \vdots & \_\_ \\ \_\_\_ & 1 & \_\_ \\ \_\_\_ & 0 & \_\_ \end{vmatrix} \underset{\substack{C_k, C_{k+1}\dots C_n \\ \text{permutés} \\ \text{circulairement}}}{\overset{\uparrow}{=}} (-1)^{n-k} \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \_\_\_ & 0 \\ \_\_\_ & \vdots \\ \_\_\_ & 1 \\ \_\_\_ & 0 \end{vmatrix}$$

(colonne k)

$$= (-1)^{n-k} \times (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} \_\_\_ & 0 \\ \_\_\_ & \vdots \\ \_\_\_ & \vdots \\ \_\_\_ & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} \det(A_{i,k})$$

où $A_{i,k}$ est extraite de A en « barrant » la i-ème ligne et la k-ième colonne.

Vocabulaire : $\mu_{i,k}$ est le cofacteur du terme d'indice i,k

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

$$\det A = a \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

(Pour les signes : forme de damier avec un + en haut à gauche : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$)

ou $\det A = -a' \times \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + b' \times \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - c' \times \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}$

C) Développement selon une ligne

Avec les mêmes notations : $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \mu_{k,j}$

Démonstration :

$\det(A) = \det({}^tA)$ avec ${}^tA = (a'_{i,j})$

$$= \sum_{i=1}^{n} a'_{i,k}\, \mu'_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} a'_{i,k} (-1)^{i+k} \det(A'_{i,k})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} (-1)^{k+i} \det({}^tA_{k,i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} (-1)^{k+i} \det(A_{k,i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} \mu_{k,i}$$

VI Application à l'inverse d'une matrice carrée (si inversible)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Proposition :

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\mu_{j,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \det(A) \text{ si } i = j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\mu_{k,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \det(A) \text{ si } i = j \end{cases}$$

Démonstration :

(1) : Si $i = j$, on reconnaît le développement selon la *i*-ème ligne du déterminant de A.

Si $i \neq j$, on reconnaît le déterminant, développé selon la *j*-ème ligne, de :

$$A' = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \cdots & \_ \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \_ & \_ & \cdots & \_ \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \_ & \_ & \cdots & \_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

Obtenue à partir de A en faisant la transformation $L_i \leftarrow L_j$ (non élémentaire !)

(En effet, les cofacteurs des termes de la *j*-ème ligne de A' sont les mêmes que les cofacteurs des termes de la *j*-ième ligne de A)

(2) : On le démontre de la même manière avec la matrice A'déduite de A en faisant la transformation $C_i \leftarrow C_j$

Conséquence :

Notons $M = (\mu_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ (M s'appelle la comatrice de A, notée $\text{com}(A)$)

Les formules précédentes disent : $A \times {}^tM = \det(A).I_n$ et ${}^tM \times A = \det(A).I_n$

Ainsi, si $A \notin GL_n(\mathbb{K}), {}^tM \times A = A \times {}^tM = 0_{M_n(\mathbb{K})}$

Et, si A est inversible : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^tM = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\text{com}(A))}$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible, si oui quel est son inverse ?

$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & & \\ -5 & & \\ 3 & & \end{pmatrix}$. Déjà, $\det(A) = 1 \times 4 + (-1) \times 5 + 1 \times 3 = 12 \neq 0$. Donc A est inversible. On continue :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4 & -5 & 3\\ 4 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

Cas particulier à connaître :

$A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$; $\det(A)=a.d-b.c$; $\mathrm{com}A=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Si $\det(A)\neq 0$, $A^{-1}=\frac{1}{a.d-b.c}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$ (correspond en fait à un échange entre a et d, et une multiplication de b et c par -1)

VII Formules de Cramer

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$, inversible.

On s'intéresse au système :

$$(S): A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}, \text{ de solution } \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Or, $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{com}(A))$

Ainsi, $\forall p\in[\![1,n]\!], x_p=\frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mu_{k,p}}_{\text{!transposée}}b_k=\frac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix}\text{la matrice obtenue à partir de A}\\ \text{en remplaçant sa } p\text{-ième colonne}\\ \text{(càd celle des coefficients de } x_p\text{)}\\ \text{par la colonne du 2}^{\text{nd}}\text{ membre}\end{pmatrix}$

Exemple :

$$(S):\begin{cases}6x+3y+4z=1\\ 5x-7y+5z=2\\ 5x+3y+3z=0\end{cases}$$

Matrice du système : $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 4\\ 5 & -7 & 5\\ 5 & 3 & 3\end{pmatrix}$. $\det(A)=14$

Donc (S) est de Cramer, et :

$$x=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -7 & 5\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{14}(-7\times 3-5\times 3-2(9-12))=-\frac{30}{14}=-\frac{15}{7}$$

$$y=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}6 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 5\\ 5 & 0 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{14}(-(5\times 3-5\times 5)+2(6\times 3-5\times 4))=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

$$z=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}6 & 3 & 1\\ 5 & -7 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{14}(15+35-2(18-15))=\frac{22}{7}$$

VIII Complément : polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$. On note $I=I_n$

Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on pose $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

Alors :

La fonction $\lambda\mapsto P(\lambda)$ est polynomiale en λ, de degré n :

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(a_{1,1}-\lambda)(a_{2,2}-\lambda)...(a_{n,n}-\lambda)+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\{\mathrm{Id}\}}\varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1),1}\,a'_{\sigma(2),2}...a'_{\sigma(n),n}$$

où $a'_{i,j}=a_{i,j}$ si $i\neq j$ et $a'_{i,j}=a_{i,j}-\lambda$ sinon.

Coefficient de X^n : $(-1)^n$

Coefficient de X^0 : $P(0)=\det(A)$

Coefficient de X^{n-1} :

$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\{\mathrm{Id}\}}\varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1),1}\,a'_{\sigma(2),2}...a'_{\sigma(n),n}$ est polynomial en λ, mais de degré $\leq n-2$: si une permutation σ fixe $n-1$, alors elle fixe le n-ième aussi, donc $\sigma=\mathrm{Id}$

Donc le coefficient de X^{n-1} vaut : $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}=(-1)^{n-1}\times\mathrm{Tr}(A)$

Soit $f\in L(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $\mathfrak{B}$ une base de E, $A=\mathrm{mat}(f,\mathfrak{B})$.

Alors le polynôme P caractéristique de A ne dépend pas du choix de $\mathfrak{B}$ (on l'appelle le polynôme caractéristique de f). En effet, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det(f-\lambda\mathrm{Id})$.

On a les équivalences :

λ est racine de $P\Leftrightarrow\det(f-\lambda\mathrm{Id})=0$

$\Leftrightarrow f-\lambda\mathrm{Id}$ est non bijective

$\Leftrightarrow f-\lambda\mathrm{Id}$ est non injective

$\Leftrightarrow\ker(f-\lambda\mathrm{Id})\neq\{0\}$

$\Leftrightarrow\exists u\in E\setminus\{0\}, f(u)=\lambda u$

$(\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}\lambda$ est valeur propre de $f)$

Si P admet n racines distinctes deux à deux, alors il existe une base $\mathfrak{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale :

Notons $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ ces racines.

On peut introduire $u_1, u_2, \ldots u_n \in E \setminus \{0\}$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(u_k) = \lambda_k u_k$

Montrons que $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ est libre.

Pour cela, montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1, n]\!], (u_1, u_2, \ldots u_k)$ est libre.

- pour $k = 1$, ok car $u_1 \neq 0$
- soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons que $(u_1, u_2, \ldots u_k)$ est libre.

Soit $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{k+1}) \in \mathbb{K}^n$, supposons que $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_{k+1} u_{k+1} = 0$ (1)

Alors, en appliquant *f*, on a : $\mu_1 \lambda_1 u_1 + \mu_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \mu_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0$ (2)

Puis en faisant $\lambda_{k+1}(1) - (2)$:

$\mu_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) u_1 + \mu_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2) u_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) u_k = 0$

Donc $\forall i \in [\![1, k]\!], \mu_i = 0$, car les λ_i sont distincts deux à deux, et $(u_1, u_2, \ldots u_k)$ est libre.

Enfin, $\mu_{k+1} = 0$ car $u_{k+1} \neq 0$

Donc $(u_1, u_2, \ldots u_{k+1})$ est libre, ce qui achève la récurrence

Donc $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ est libre, de cardinal *n*. c'est donc une base de *E*.

De plus, par construction, la matrice de *f* dans cette base est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exemple où *P* a *n* racines non distinctes et *f* n'est pas diagonalisable :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Alors $P(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n) = (1 - \lambda)^n$. (matrice triangulaire supérieure)

On doit donc trouver $\mathfrak{B}' = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ tel que :

$$\mathrm{mat}(f, \mathfrak{B}') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Mais alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $f(e_k) = \lambda_k e_k$.

Comme $e_k \neq 0$, λ_k est racine de P, donc $\lambda_k = 1$.

Donc $\mathrm{mat}(f, \mathfrak{B}') = I_n$, ce qui est impossible.