



Chapitre 13 : Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$.

I Généralités

A) Définition

On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

B) Premières conséquences

1. $\mathbb{K}(X)$ est muni de deux lois $+$ et $\times$, contient $\mathbb{K}[X]$, les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$ prolongent celles de $\mathbb{K}[X]$.

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif, les neutres pour $+$ et $\times$ sont :

$$\begin{cases} 0_{\mathbb{K}(X)} = 0_{\mathbb{K}[X]} (= 0_{\mathbb{K}}), & \text{noté } 0 \\ 1_{\mathbb{K}(X)} = 1_{\mathbb{K}[X]} (= 1_{\mathbb{K}}), & \text{noté } 1 \end{cases} \quad (13.1)$$

2. Tout F de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit sous la forme $P \times Q^{-1}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$, et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ (Q^{-1} désigne l'inverse dans le corps $\mathbb{K}(X)$ de l'élément Q non nul de ce corps).

$P \times Q^{-1}$ est noté $\frac{P}{Q}$ (c'est aussi $Q^{-1} \times P$ car le corps est commutatif)

Il en résulte diverses « règles de calcul » :

Pour tous $P, Q, R, A, D \in \mathbb{K}[X]$:

- $\frac{P}{1} = P$ (car $1^{-1} = 1$)
- Si $P, Q \neq 0$, alors $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = \frac{Q}{P}$ (en effet : $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = (PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} = \frac{Q}{P}$)
- Si $Q_1, Q_2 \neq 0$, alors $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = P_1 Q_1^{-1} P_2 Q_2^{-1} = (P_1 P_2)(Q_2 Q_1)^{-1} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$
- Si $Q, D \neq 0$, alors $\frac{DP}{DQ} = \frac{P}{Q}$ ($(DP)(DQ)^{-1} = DPQ^{-1}D^{-1} = D^{-1}DPQ^{-1} = \frac{P}{Q}$)
- Si $Q_1, Q_2 \neq 0$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \iff P_1 Q_2 = P_2 Q_1$
- Si $Q \neq 0$, $\frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 + P_2}{Q}$
- Si $Q_1, Q_2 \neq 0$, $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2}{Q_1 Q_2} + \frac{P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$

C) Produit externe

Pour $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $\lambda.F$ (ou λF) le produit $\lambda \times F$

Il en résulte que $(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

II Diverses notions

A) Représentant – représentant irréductible

Définition :

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

- Un représentant de F est, par définition, un couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \frac{P}{Q}$
- Un représentant irréductible de F est, par définition, un couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \frac{A}{B}$ et $\text{pgcd}(A, B) = 1$

Proposition :

1. Toute fraction rationnelle F admet un représentant irréductible.
2. Si (A, B) est un représentant irréductible de F , alors les autres représentants de F sont les $(DA, DB), D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ (parmi lesquels les irréductibles sont les $(\lambda A, \lambda B), \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)

Démonstration :

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, (P, Q) un représentant de F . On pose $G = \text{pgcd}(P, Q)$. Alors $P = GP_1, Q = GQ_1$, avec $\text{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$. Ainsi, $F = \frac{P}{Q} = \frac{GP_1}{GQ_1} = \frac{P_1}{Q_1}$.
2. Supposons $F = \frac{A}{B}$, avec $\text{pgcd}(A, B) = 1$, soit (P, Q) un autre représentant. Alors $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$, soit $PB = QA$. Donc B divise QA , donc Q car $\text{pgcd}(A, B) = 1$. Donc $Q = Q_1 B$. Donc $\frac{P}{Q_1 B} = \frac{A}{B}$, soit $\frac{P}{Q_1} = A$ (car $B \neq 0$). Donc $P = Q_1 A$. Donc $(P, Q) = (Q_1 A, Q_1 B)$. Inversement, les $(DA, DB), D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ sont des représentants de F .

B) Degré

Définition :

Soit $F = \frac{P}{Q}$. La valeur de $\deg P - \deg Q$ est indépendante du choix du représentant (P, Q) de F (immédiat), on l'appelle le degré de F . Alors $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Exemple :

$F = \frac{2X+1}{3X+2}$ est de degré 0.

$F = \frac{2X+1}{5X^2+4}$ est de degré -1.

Proposition :

On a :

$$\deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2) \quad (13.2)$$

$$\deg(\lambda F) = \deg(F) \text{ si } \lambda \neq 0 \quad (13.3)$$

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2)) \quad (13.4)$$

(Démonstration immédiate en raisonnant sur les degrés des représentants)

C) Zéros, pôles**Définition :**

Soit $F = \frac{A}{B}$, irréductible.

- Un zéro de F est, par définition, une racine de A . Son ordre de multiplicité est celui qu'il a en tant que racine de A .
- Un pôle de F est, par définition, une racine de B . Son ordre de multiplicité est celui qu'il a en tant que racine de B .

Exemple :

$F = \frac{X^3-1}{X^2-3X+2} = \frac{(X-j)(X-j^2)}{X-2}$. Donc j et j^2 sont des zéros d'ordre 1, et 2 est un pôle d'ordre 1.

Remarque :

Si $F = \frac{P}{Q}$, non nécessairement irréductible :

- Si λ est racine de P d'ordre α , alors λ est racine de F d'ordre $\leq \alpha$ (voire 0)
- Si λ est racine de Q d'ordre α , alors λ est pôle de F d'ordre $\leq \alpha$ (voire 0)

D) Fonction rationnelle associée**Notation :**

Soit $F = \frac{A}{B}$, irréductible.

On note $D_F = \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles de } F\}$: domaine de définition de la fonction rationnelle associée à F
(Remarque : l'ensemble des pôles de F est fini car $B \neq 0$)

$$\begin{aligned} \text{On note alors } \tilde{F}: D_F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \frac{A(x)}{B(x)} \end{aligned}$$

Proposition :

- Si $F = \frac{P}{Q}$ non irréductible, et si x n'est pas une racine de Q , alors $x \in D_F$, et $\tilde{F}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- Si $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
 - ◊ $D_{F_1} \cap D_{F_2} \subset D_{F_1+F_2}$ et $\forall x \in D_{F_1} \cap D_{F_2}, \widetilde{F_1+F_2}(x) = \tilde{F}_1(x) + \tilde{F}_2(x)$
 - ◊ $D_{F_1} \cap D_{F_2} \subset D_{F_1 F_2}$ et $\forall x \in D_{F_1} \cap D_{F_2}, \widetilde{F_1 \times F_2}(x) = \tilde{F}_1(x) \times \tilde{F}_2(x)$
 - ◊ $D_{F_1} \subset D_{\lambda F_1}$ et $\forall x \in D_{F_1}, \widetilde{\lambda F_1} = \lambda \tilde{F}_1$

Proposition :

Soient $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$. S'il existe un ensemble infini E inclus dans $D_{F_1} \cap D_{F_2}$ tel que $\forall x \in E, \tilde{F}_1(x) = \tilde{F}_2(x)$, alors $F_1 = F_2$.

Démonstration :

$F_1 = \frac{A_1}{B_1}, F_2 = \frac{A_2}{B_2}$ irréductibles.

Donc $\forall x \in E, A_1(x)B_2(x) = A_2(x)B_1(x)$. Donc A_1B_2 et A_2B_1 coïncident sur une infinité de valeurs.

Donc $A_1B_2 = A_2B_1$. Donc $F_1 = F_2$.

Conséquence (des propriétés) :

De même que pour les fonctions polynomiales, on peut enlever les $\sim$ sur les fonctions rationnelles.

E) Dérivation formelle

Définition :

Soit $F = \frac{P}{Q}$. La valeur de $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$ ne dépend que de F (immédiat). On l'appelle F' .

Toutes les règles de calcul valables pour les dérivées formelles de polynômes sont aussi valables ici.

F) Substitution

Exemple :

$F = \frac{X^3 - 2X + 4}{X^2 + X + 1}$. Alors $F(-X) = \frac{-X^3 + 2X + 4}{X^2 - X + 1}$, $F(X^2) = \frac{X^6 - 2X^2 + 4}{X^4 + X^2 + 1}$.

Attention : étant donnée $F \in \mathbb{K}(X)$, on ne parlera de $F(Q)$ que lorsque Q est un polynôme ou une fraction rationnelle autre que constant et égal à un pôle de F .

G) Remarques, définitions complémentaires

On a les équivalences :

$$\bullet \quad F \text{ est paire} \iff \tilde{F} \text{ est paire} \quad (13.5)$$

$$\iff F(-X) = F(X) \quad (13.6)$$

$$\bullet \quad F \text{ est impaire} \iff \tilde{F} \text{ est impaire} \quad (13.7)$$

$$\iff F(-X) = -F(X) \quad (13.8)$$

• Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On a l'équivalence : F n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}(X) \iff F \in \mathbb{C}[X]$.

• Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, $a \in \mathbb{C}$. Alors :

1. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \setminus \{a\}$ ne contienne aucun pôle de F . On peut donc considérer la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi:]-r, r[\setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto F(a+t) \end{aligned} \quad (13.9)$$

2. a est pôle de F si et seulement si φ admet une limite infinie à droite et à gauche en 0 (et dans ce cas la multiplicité du pôle a de F est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $t \mapsto t^k F(a+t)$ ait une limite finie en 0)
3. a est zéro de F si et seulement si φ tend vers 0 en 0.
4. a n'est ni zéro ni pôle de F si et seulement si φ admet une limite finie non nulle en 0.

III Partie entière

A) Proposition et définition

Proposition, définition :

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un et un seul polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F = E + F_1$ avec $F_1 \in \mathbb{K}(X)$ et $\deg F_1 < 0$. E s'appelle la partie entière de F .

Démonstration :

unicité Si $F = E_1 + F_1$ et $F = E_2 + F_2$ avec $\deg F_1, F_2 < 0$

$$\text{Alors } \underbrace{E_1 - E_2}_{\deg \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = \underbrace{F_1 - F_2}_{\deg \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2)) < 0}.$$

Donc $E_1 - E_2 = F_1 - F_2 = 0$. Donc $E_1 = E_2$ et $F_1 = F_2$.

existence $F = \frac{P}{Q}$. Division euclidienne de P par Q : $P = P_1Q + R_1$, avec $R_1 \in \mathbb{K}[X]$, de $\deg R_1 < \deg Q$, et $P_1 \in \mathbb{K}[X]$.

$$\text{Donc } F = \frac{P_1Q + R_1}{Q} = P_1 + \frac{R_1}{Q} \text{ avec } \deg R_1 < \deg Q$$

B) Exemples

- Partie entière de $\frac{X+2}{X-1}$: 1. Partie entière de $\frac{X^3+2X}{X^3+X^2-1}$: 1
- Plus généralement, partie entière de $\frac{aX^n+\dots}{bX^n+\dots}$: $\frac{a}{b}$.
- Partie entière de $F = \frac{2X^2+X}{X-3}$:

$$2X^2 + X = 2X(X-3) + 7X = 2X(X-3) + 7(X-3) + 21 = (2X+7)(X-3) + 21 \quad (13.10)$$

$$\text{Donc } F = \underbrace{2X+7}_{\text{partie entière}} + \frac{21}{X-3}$$

- Partie entière de $F = \frac{(X-1)^7}{(X+2)(X+1)^5}$: de la forme $X + b$

$$(X-1)^7 = X^7 - 7X^6 + 21X^5 + \dots \quad (13.11)$$

$$(X+2)(X+1)^5 = (X+2)(X^5 + 5X^4 + \dots) = X^6 + 7X^5 + \dots \quad (13.12)$$

$$\begin{array}{r|l} X^7 - & 7X^6 + 21X^5 + \dots \\ 14X^6 + & \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^6 + 7X^5 \\ X - 14 \end{array} \right. \quad (13.13)$$

$$\text{Donc } F = X - 14 + R_1$$

IV Décomposition en éléments simples

A) Première décomposition

Lemme :

Soit $F = \frac{P}{Q_1Q_2}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $\text{pgcd}(Q_1, Q_2) = 1$.

Alors il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$

Démonstration :

Selon le théorème de Bézout, il existe $U_1, U_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$

$$\text{Donc } PU_1Q_1 + PU_2Q_2 = P$$

$$\text{Donc } \frac{PU_1Q_1 + PU_2Q_2}{Q_1Q_2} = \frac{P}{Q_1Q_2}.$$

$$\text{Donc } \frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{PU_1}{Q_2} + \frac{PU_2}{Q_1}$$

Théorème :

Soit $F = \frac{A}{Q_1Q_2\dots Q_n}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$ et les Q_i sont des polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux.

Alors F se décompose de manière unique sous la forme :

$$F = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n}, \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg A_i < \deg Q_i \quad (13.14)$$

Démonstration :

existence par récurrence sur n .

Pour $n = 2$: le lemme donne $F = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$, avec $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$

La division euclidienne de P_1 par Q_1 et de P_2 par Q_2 donne :

$$P_1 = E_1 Q_1 + A_1 \text{ et } P_2 = E_2 Q_2 + A_2 \quad (13.15)$$

Donc $F = E_1 + E_2 + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2}$ avec $\deg A_1 < \deg Q_1$ et $\deg A_2 < \deg Q_2$.

Supposons que c'est vrai pour un entier naturel $n \geq 2$. $F = \frac{A}{Q_1 Q_2 \dots Q_n Q_{n+1}}$, où les Q_i sont premiers entre eux deux à deux. On applique le lemme (Q_{n+1} est premier avec chaque Q_i , $i \leq n$, donc avec $Q_1 Q_2 \dots Q_n$) :

Donc $F = \frac{P}{Q_1 Q_2 \dots Q_n} + \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence, et on fait la division euclidienne de P_{n+1} par Q_{n+1} .

unicité supposons que $F = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n}$

Déjà, E est la partie entière de F :

$$E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{Q_i} \right) \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \deg \left(\frac{A_i}{Q_i} \right) < 0 \quad (13.16)$$

Si on a une deuxième décomposition :

$$F = E + \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + \dots + \frac{B_n}{Q_n} \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_i \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg B_i < \deg Q_i \quad (13.17)$$

Donc

$$\frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n} = \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + \dots + \frac{B_n}{Q_n} \quad (13.18)$$

On obtient alors :

$$Q_1 Q_2 \dots Q_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{Q_i} \right) = Q_1 Q_2 \dots Q_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{Q_i} \right) \quad (13.19)$$

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \dots Q_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{Q_i} \right)}_{\text{divisible par } Q_n} + Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} C_n = 0 \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = A_i - B_i \quad (13.20)$$

Donc Q_n divise $Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} C_n$. Donc Q_n divise C_n .

Donc $C_n = 0$ car $\deg C_n \leq \max(\deg A_n, \deg B_n) < \deg Q_n$

Et, de proche en proche, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = 0$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i = B_i$

B) Deuxième décomposition

Théorème :

Soit $F = \frac{A}{Q^n}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \dots + \frac{P_n}{Q^n}, \text{ où } E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_i \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg P_i < \deg Q \quad (13.21)$$

Démonstration :

Existence on a :

$$F = \frac{A}{Q^n} = \frac{D_1 Q + P_n}{Q^n} \quad (\text{Division euclidienne de } A \text{ par } Q) \quad (13.22)$$

Donc $F = \frac{D_1}{Q^{n-1}} + \frac{P_n}{Q^n}$ avec $\deg P_n < \deg Q$.

La division euclidienne de D_1 par Q donne ensuite, de la même manière :

$$F = \frac{D_2}{Q^{n-2}} + \frac{P_{n-1}}{Q^{n-1}} + \frac{P_n}{Q^n} \quad (13.23)$$

Et ainsi de suite :

$$F = \frac{D_{n-1}}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \cdots + \frac{P_n}{Q^n}. \quad (13.24)$$

Enfin, la division euclidienne de D_{n-1} par Q donne :

$$F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \cdots + \frac{P_n}{Q^n} \quad (13.25)$$

Unicité Si $F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \cdots + \frac{P_n}{Q^n}$, où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg P_i < \deg Q$, on a alors :

$$EQ^n + P_1 Q^{n-1} + P_2 Q^{n-2} + \cdots + P_n = A \quad (13.26)$$

Donc P_n est le reste dans la division euclidienne de A par Q , d'où l'unicité de P_n . On note ensuite A_1 le quotient de cette division euclidienne...

C) Décomposition en éléments simples

Définition :

Un élément simple de $\mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle du type $\frac{P}{Q^n}$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible, $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, de degré $< \deg Q$.

Exemple :

- $\frac{\lambda}{(X-a)^n}$ où $a \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est un élément simple de $\mathbb{K}(X)$.
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elles sont les seuls éléments simples de $\mathbb{C}(X)$
- Les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ sont les :

1^{ère} espèce $\frac{\lambda}{(X-a)^n}$, où $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2^{ème} espèce $\frac{\lambda X + \mu}{(X^2 - sX + p)^n}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $s, p \in \mathbb{R}$, $s^2 - 4p < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème :

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, où $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$ (ainsi, $F \notin \mathbb{K}[X]$)

B s'écrit sous la forme $Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\alpha_2} \cdots Q_n^{\alpha_n}$ où les Q_i sont irréductibles, non associés deux à deux et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = \underbrace{E}_{\in \mathbb{K}[X]} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}}_{\substack{\text{élément simple} \\ \text{partie polaire de } F \text{ relative} \\ \text{au facteur irréductible } Q_i}}, \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket, \deg A_{ij} < \deg Q_i \quad (13.27)$$

Démonstration :

Existence Selon l'étape 1, on a :

$$F = E + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}, \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg A_i < \deg Q_i^{\alpha_i} \quad (13.28)$$

Et, selon l'étape 2, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}} = \underbrace{E_i}_{=0 \text{ car } \deg A_i < \deg Q_i^{\alpha_i}} + \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}, \text{ où } \forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket, \deg A_{ij} < \deg Q_i \quad (13.29)$$

Unicité On décompose F sous la forme $F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$ s'écrit sous la forme $\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}$, où $A_i \in \mathbb{K}[X]$. Ces A_i sont déterminés de manière unique d'après la première décomposition. Ensuite, chacun de ces A_i , $\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ se décompose de manière unique sous la forme $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$. D'où l'unicité.

Remarque :

Ceci est valable même si (A, B) n'est pas un représentant irréductible de F , mais si (A, B) est irréductible, les A_{i, α_i} sont tous non nuls (en effet, si $A_{i, \alpha_i} = 0$, alors, en remettant au même dénominateur la décomposition, on obtient $F = \frac{A_1}{B_1}$, où $B_1 = Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\alpha_2} \dots Q_i^{\alpha_i-1} \dots Q_n^{\alpha_n}$ donc (A, B) n'était pas irréductible)

Exemple :

On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^{10} + 1}{(X^3 - 1)^2(X + 2)} \leftarrow \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (13.30)$$

On a

$$B = (X^3 - 1)^2(X + 2) = (X - 1)^2(X - j)^2(X - j^2)^2(X + 2) \quad (13.31)$$

$A(-2)$, $A(1)$, $A(j)$, $A(j^2)$ sont non nuls. Donc $\text{pgcd}(A, B) = 1$

$$\begin{aligned} F = X^3 + bX^2 + cX + d + & \underbrace{\frac{\lambda}{X+2}}_{\text{partie polaire réelle au pôle } -2} + \underbrace{\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2}}_{\text{partie polaire relative au pôle } 1} \\ & + \underbrace{\frac{\alpha'}{X-j} + \frac{\beta'}{(X-j)^2}}_{\text{partie polaire relative au pôle } j} + \frac{\alpha''}{X-j^2} + \frac{\beta''}{(X-j^2)^2} \end{aligned} \quad (13.32)$$

Attention : on ne peut utiliser le terme de partie polaire relative à un nombre (comme dans l'exemple donné) que lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}(X)$.

V Pratique de la décomposition

Exemple :

On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{X}{(X^4 - 1)(X^2 - 1)} \leftarrow \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (13.33)$$

à décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

1. Factorisation du dénominateur :

$$B = (X^4 - 1)(X^2 - 1) = (X - i)(X + i)(X - 1)^2(X + 1)^2 \quad (13.34)$$

On a donc les racines $i, -i, 1, -1$.

Donc (A, B) est irréductible. Les pôles de F sont donc $i, -i, 1, -1$ avec les multiplicités 1, 1, 2, 2.

2. Partie entière : obtenue en faisant la division euclidienne de A par B . Ici 0.

3. Forme de la décomposition :

$$F = 0 + \frac{\alpha}{X - i} + \frac{\alpha'}{X + i} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma}{(X - 1)^2} + \frac{\beta'}{X + 1} + \frac{\gamma'}{(X + 1)^2}, \text{ où } \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{C} \quad (13.35)$$

(Remarque : $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma' \neq 0$)

4. Considération de symétries Ici, $F = \frac{X}{(X^4 - 1)(X^2 - 1)}$. Donc $F(-X) = -F(X)$ (impaire).

On a :

$$\underbrace{F(-X)}_{-F(X)} = \frac{-\alpha}{X + i} + \frac{-\alpha'}{X - i} + \frac{-\beta}{X + 1} + \frac{\gamma}{(X + 1)^2} + \frac{-\beta'}{X - 1} + \frac{\gamma'}{(X - 1)^2} \quad (13.36)$$

D'où, par unicité de la décomposition, on obtient :

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = -\gamma \quad (13.37)$$

Et

$$F = \frac{\alpha}{X - i} + \frac{\alpha}{X + i} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma}{(X - 1)^2} + \frac{\beta}{X + 1} - \frac{\gamma}{(X + 1)^2} \quad (13.38)$$

5. Détermination des parties polaires

- D'abord celles relatives à des pôles simples (c'est plus simple $\bigwedge$)

En effet : Pour $F = \frac{A}{B}$, si a est un pôle simple de F , c'est-à-dire si $\begin{cases} (X - a)Q = B \text{ avec } Q(a) \neq 0 \\ A(a) \neq 0 \end{cases}$,

alors $F = \frac{\lambda}{(X - a)} + G$ où G est une fraction rationnelle dont a n'est pas pôle.

Donc $\underbrace{(X - a)F}_{= \frac{A}{Q}, \text{ fraction rationnelle dont } a \text{ n'est pas pôle}} = \lambda + \underbrace{(X - a)G}_{\text{fraction rationnelle dont } a \text{ est un zéro}}$. Donc $\frac{A(a)}{Q(a)} = \lambda$

Ici,

$$\underbrace{F \times (X - i)}_{\frac{X}{(X + i)(X^2 - 1)^2}} = \alpha + (X - i) \times G, \text{ où } G = \frac{\alpha}{X + i} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma}{(X - 1)^2} + \frac{\beta}{X + 1} - \frac{\gamma}{(X + 1)^2}. \quad (13.39)$$

Donc $\alpha = \frac{i}{(i + i)(i^2 - 1)^2} = \frac{1}{8}$

Remarque :

dans certains cas, calculer $Q(a)$ n'est pas aisé.

On a : $B = (X - a)Q$. Donc $B' = (X - a)Q' + Q$. Donc $B'(a) = Q(a)$

Ainsi, $\lambda = \frac{A(a)}{Q(a)} = \frac{A(a)}{B'(a)}$

- Les pôles multiples : d'abord les pôles doubles

Pour $F = \frac{A}{B}$, si a est pôle double de F : $\begin{cases} (X - a)^2 Q = B \text{ avec } Q(a) \neq 0 \\ A(a) \neq 0 \end{cases}$. Alors

$$F = \frac{\lambda_1}{(X - a)} + \frac{\lambda_2}{(X - a)^2} + G \quad (13.40)$$

où a n'est pas pôle de G .

Calcul de λ_2 : en multipliant l'égalité par $(X - a)^2$, on obtient :

$$\underbrace{F \times (X - a)^2}_{=\frac{A}{Q}} = \lambda_1(X - a) + \lambda_2 + (X - a)^2 G \quad (13.41)$$

En remplaçant X par a , on a alors $\lambda_2 = \frac{A(a)}{Q(a)}$.

Pour calculer λ_1 , on a deux méthodes :

1^{ère} méthode on dérive la deuxième égalité : $\left(\frac{A}{Q}\right)' = \lambda_1 + 2(X - a)G + (X - a)^2 G'$.

Ainsi, $\lambda_1 = \left(\frac{A}{Q}\right)'(a)$

2^{ème} méthode on connaît déjà λ_2 . D'après la première égalité, $F - \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + G$.

D'après le membre de droite, celui de gauche n'a a pour pôle que d'ordre au maximum 1.

Le calcul donne $F_1 = F - \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} = \frac{A_1}{(X-a)Q_1}$.

On est ensuite ramené au problème du pôle simple.

Application sur l'exemple :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2} + G \\ &= \frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)^2} \end{aligned} \quad (13.42)$$

Donc $\frac{X}{(X^2+1)(X+1)^2} = \beta(X-1) + \gamma + (X-1)^2 G$. Donc $\gamma = \frac{1}{2 \times 2^2} = \frac{1}{8}$

Méthode 1

$$\frac{(X+1)^2(X^2+1) - X(2(X+1)(X^2+1) + (X+1)^2 2X)}{(X+1)^4(X^2+1)^2} = \beta + G'(X-1)^2 + 2G(X-1) \quad (13.43)$$

$$\frac{(X+1)(X^2+1) - 2X(X^2+1) - (X+1) \times 2X^2}{(X+1)^3(X^2+1)^2} = \beta + G'(X-1)^2 + 2G(X-1) \quad (13.44)$$

Donc $\beta = \frac{-1}{8}$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} F - \frac{\gamma}{(X-1)^2} &= \frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)^2} - \frac{1}{8(X-1)^2} \\ &= \frac{8X - (X+1)^2(X^2+1)}{8(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)} \end{aligned} \quad (13.45)$$

on vérifie que le numérateur est nul en 1 puisque 1 est au mieux pôle simple

$$\begin{aligned} 8X - (X+1)^2(X^2+1) &= 8(X-1+1) - (X-1+2)(X+1)(X^2+1) \\ &= (X-1)[8 - (X+1)(X^2+1)] + 8 - 2(X+1)(X^2+1) \end{aligned} \quad (13.46)$$

$$\begin{aligned} 8 - 2(X+1)(X^2+1) &= 8 - 2(X-1+2)(X^2+1) \\ &= (X-1)[-2(X^2+1)] + 8 - 4(X^2+1) \\ &= (X-1)[-2(X^2+1)] - 4(X^2-1) \end{aligned} \quad (13.47)$$

Donc

$$F - \frac{\gamma}{(X-1)^2} = \frac{8 - (X+1)(X^2+1) - 2(X^2+1) - 4(X+1)}{8(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{\beta}{(X-1)} + G \quad (13.48)$$

$$\text{Ainsi, } \beta = \frac{8-2 \times 2 - 2 \times 2 - 4 \times 2}{8 \times 2^2 \times 2} = \frac{-1}{8}$$

6. Conclusion :

$$F = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} \right) \quad (13.49)$$

Intérêt de la décomposition en éléments simples : pour l'intégration.

Exemple (Autres) :

- $$F = \frac{1}{X^2 - a^2} \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \quad (13.50)$$

Partie entière nulle (deg $F = -2$)

Forme de la décomposition :

$$F = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{X+a} \quad (13.51)$$

On multiplie par $X-a$, on prend la valeur en a : $\alpha = \frac{1}{2a}$

De même, $\beta = \frac{-1}{2a}$

Donc

$$\frac{1}{X^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{X-a} - \frac{1}{X+a} \right) \quad (13.52)$$

- $$F = \frac{1}{X^n - 1} \quad (13.53)$$

Forme de la décomposition :

$$F = \frac{\alpha_0}{X - \omega_0} + \frac{\alpha_1}{X - \omega_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{X - \omega_{n-1}}, \text{ où } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (13.54)$$

Pour chaque k : on multiplie par $X - \omega_k$. On obtient $\frac{1}{Q} = \alpha_k + (X - \omega_k)G$, où Q est tel que $X^n - 1 = (X - \omega_k)Q$.

Donc $\alpha_k = \frac{1}{Q(\omega_k)}$

On a : $X^n - 1 = (X - \omega_k)Q$. Donc, en dérivant :

$$nX^{n-1} = Q + (X - \omega_k)Q' \quad (13.55)$$

Donc $\alpha_k = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$ Donc

$$F = \frac{1}{n} \left(\frac{\omega_0}{X - \omega_0} + \frac{\omega_1}{X - \omega_1} + \dots + \frac{\omega_{n-1}}{X - \omega_{n-1}} \right) \quad (13.56)$$

Autre méthode :

On multiplie par $X-1$. D'où $\alpha_0 = \frac{1}{Q(1)}$ où $Q = 1 + X + \dots + X^{n-1}$

Donc $\alpha_0 = \frac{1}{n}$

On remarque que :

$$F(\omega_1 X) = \frac{1}{(\omega_1 X)^n - 1} = \frac{1}{X^n - 1} = F(X) \quad (13.57)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\alpha_0}{\omega_1 X - \omega_0} + \frac{\alpha_1}{\omega_1 X - \omega_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1 X - \omega_{n-1}} \\ &= \frac{\alpha_0}{\omega_1} \frac{1}{X - \underbrace{\omega_0/\omega_1}_{\omega_{n-1}}} + \frac{\alpha_1}{\omega_1} \frac{1}{X-1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1} \frac{1}{X - \omega_{n-2}} \end{aligned} \quad (13.58)$$

Donc $\alpha_{n-1} = \frac{\alpha_0}{\omega_1}$, $\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} \dots \alpha_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1}$. Comme α_0 est connu, on peut trouver les autres.

$$\bullet \quad F = \frac{1}{(X^n - 1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k}{X - \omega_k} + \frac{\beta_k}{(X - \omega_k)^2} \right) \quad (13.59)$$

Symétries :

$$F(\omega_1 X) = F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k}{\omega_1 X - \omega_k} + \frac{\beta_k}{(\omega_1 X - \omega_k)^2} \right) \quad (13.60)$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\frac{\beta_k}{(\omega_1 X - \omega_k)^2} = \frac{\beta_k}{\omega_1^2 (X - \omega_{k-1})^2}, \quad \frac{\alpha_k}{\omega_1 X - \omega_k} = \frac{\alpha_k}{\omega_1} \frac{1}{X - \omega_{k-1}} \quad (\text{avec } \omega_{-1} = \omega_{n-1}) \quad (13.61)$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{\alpha_k}{\omega_1} = \alpha_{k-1} \text{ et } \frac{\beta_k}{\omega_1^2} = \beta_{k-1} \quad (13.62)$$

D'où,

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} \alpha_k &= \omega_1^k \alpha_0 = \omega_k \alpha_0 \\ \beta_k &= \omega_1^{2k} \beta_0 = \omega_{2k} \beta_0 \end{cases} \quad (13.63)$$

Obtention de α_0 et β_0 :

$$F = \frac{1}{(X^n - 1)^2} = \frac{\alpha_0}{X - 1} + \frac{\beta_0}{(X - 1)^2} + G \quad (13.64)$$

Donc, en multipliant par $(X - 1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on trouve $\beta_0 = \frac{1}{n^2}$.

$$F = \frac{1}{\underbrace{(1 + X + \dots + X^{n-1})^2}_Q} = \alpha_0(X - 1) + \beta_0 + G(X - 1)^2 \quad (13.65)$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{-2Q'}{Q^3} = \alpha_0 + (X - 1)^2 G' + 2(X - 1)G \quad (13.66)$$

Valeur en 1 : $\alpha_0 = \frac{-2Q'(1)}{n^3}$; $Q'(1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

Donc $\alpha_0 = \frac{-(n-1)}{n^2}$

$$\bullet \quad F = \frac{1}{(X^2 - X + 1)^2(X - 1)} \text{ dans } \mathbb{C}(X) \quad (13.67)$$

Pôles : $-j, -j^2, 1$

$$F = \frac{\alpha}{X + j} + \frac{\beta}{(X + j)^2} + \frac{\alpha'}{X + j^2} + \frac{\beta'}{(X + j^2)^2} + \frac{\gamma}{X - 1} \quad (13.68)$$

Symétries :

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F(x) \in \mathbb{R}$ (car $F \in \mathbb{R}(X)$)

Donc $\overline{F(x)} = F(x)$

Or,

$$F(x) = \frac{\alpha}{x + j} + \frac{\beta}{(x + j)^2} + \frac{\alpha'}{x + j^2} + \frac{\beta'}{(x + j^2)^2} + \frac{\gamma}{x - 1} \quad (13.69)$$

et

$$\overline{F(x)} = \frac{\bar{\alpha}}{x + j^2} + \frac{\bar{\beta}}{(x + j^2)^2} + \frac{\bar{\alpha}'}{x + j} + \frac{\bar{\beta}'}{(x + j)^2} + \frac{\bar{\gamma}}{x - 1} \quad (\text{rappel : } j^2 = \bar{j}) \quad (13.70)$$

Donc

$$F = \frac{\bar{\alpha}}{X + j^2} + \frac{\bar{\beta}}{(X + j^2)^2} + \frac{\bar{\alpha}'}{X + j} + \frac{\bar{\beta}'}{(X + j)^2} + \frac{\bar{\gamma}}{X - 1} \quad (13.71)$$

(car les deux fractions rationnelles coïncident sur une infinité de valeurs, à savoir $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Donc, par unicité de la décomposition en éléments simples :

$$\alpha' = \bar{\alpha}, \quad \beta' = \bar{\beta}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (13.72)$$

En multipliant par $X - 1$ et en prenant la valeur en 1, on obtient $\gamma = \frac{1}{1^2} = 1$

En multipliant par $(X + j)^2$ on obtient la valeur de β , puis α en dérivant...

Remarque (à propos de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$) :

1^{ère} idée mauvaise quand les pôles non réels sont d'ordre plus grand (ou égal) à 2 :

Pour $F = \frac{A}{B}$ irréductible :

Si B a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, on procède comme dans $\mathbb{C}(X)$

Si B a une racine a non réelle, alors $\bar{a}$ est aussi racine de B avec la même multiplicité :

- Si cette multiplicité vaut 1 :

$$B = \underbrace{(X - a)(X - \bar{a})}_{X^2 - sX + p} Q, \text{ où } Q(a) \neq 0$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ donne :

$$F = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{\bar{\lambda}}{X - \bar{a}} \leftarrow \text{voir exemple précédent} + G = \frac{(\lambda + \bar{\lambda})X - (a\bar{\lambda} + \bar{a}\lambda)}{X^2 - sX + p} + G \quad (13.73)$$

- Si cette multiplicité est ≥ 2 (ici, 2) La décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ donne :

$$F = \underbrace{\frac{\lambda}{X - a} + \frac{\bar{\lambda}}{X - \bar{a}}}_{\frac{(\lambda + \bar{\lambda})X - (a\bar{\lambda} + \bar{a}\lambda)}{X^2 - sX + p}} + \underbrace{\frac{\mu}{(X - a)^2} + \frac{\bar{\mu}}{(X - \bar{a})^2}}_{\frac{\mu(X - \bar{a})^2 + \bar{\mu}(X - a)^2}{(X^2 - sX + p)^2} \leftarrow \text{non simple}} + G \quad (13.74)$$

(Remarque : on peut quand même s'en sortir avec la décomposition de la forme $\frac{A}{Q^n} = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n}$)

Autre idée (pour un pôle a non réel d'ordre 2)

Écrire la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 - sX + p} + \frac{\lambda' X + \mu'}{(X^2 - sX + p)^2} + G \quad (13.75)$$

En multipliant par $(X^2 - sX + p)^2$ et en prenant la valeur en a , on obtient la valeur de $\lambda'a + \mu'$ d'où λ' et μ' car $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ ($(1, a)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$)

Ensuite, par dérivation, on peut obtenir λ et μ .