Chapitre 14 : Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev

Ici, E désigne un $\mathbb{R}$-ev.

I Définition

Définition :
Un produit scalaire sur E, c'est une forme bilinéaire symétrique définie–positive sur E,
C'est-à-dire une application $\varphi : \begin{array}{l} E\times E \to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto\varphi(x,y)\end{array}$ telle que :

- Pour tous $x,x',y\in E,\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(x+\lambda x',y)=\varphi(x,y)+\lambda\varphi(x',y)$

Et pour tous $x,y,y'\in E,\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(x,y+\lambda y')=\varphi(x,y)+\lambda\varphi(x,y')$
(Bilinéarité)

- Pour tous $x,y\in E$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ (symétrie)
- Pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)\geq 0$ (« positive » seulement)

Et $\varphi(x,x)=0\Rightarrow x=0$ (« définie–positive »)

Exemple : le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (\underbrace{(x_1,\dots x_n)}_{x},\underbrace{(y_1,\dots y_n)}_{y})\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\end{array}$. Alors φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :
La bilinéarité et la symétrie sont immédiates.

$$\varphi(x,x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq 0$$

II Propriétés essentielles

A) Théorème de Cauchy–Schwarz

Théorème : (inégalité de Cauchy–Schwarz)
Soit φ un produit scalaire sur E.
Alors, pour tous $x,y\in E$, $(\varphi(x,y))^2\leq\varphi(x,x)\times\varphi(y,y)$

Démonstration :
Soient $x,y\in E$

- Si $x=0$, alors $\varphi(x,y)$ et $\varphi(x,x)$ sont nuls (car φ est une forme bilinéaire)
- Si $x\neq 0$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\underbrace{\varphi(\lambda x+y,\lambda x+y)}_{\geq 0 \text{ car } \varphi \text{ est positive}}=\lambda^2\varphi(x,x)+\varphi(y,y)+\lambda\varphi(x,y)+\lambda\varphi(y,x)$$

$$=\lambda^2\varphi(x,x)+\varphi(y,y)+2\lambda\varphi(x,y)$$

Or, $x \neq 0$ et φ est définie–positive. Donc $\varphi(x,x) \neq 0$. On a donc à droite un polynôme du second degré en λ qui reste toujours positif. Son discriminant est donc négatif (ou nul).

Donc $\Delta = 4\varphi(x,y)^2 - 4\varphi(y,y)\varphi(x,x) \leq 0$

D'où l'inégalité voulue.

B) Norme associée à un produit scalaire

Définition générale d'une norme sur un $\mathbb{R}$-ev :

Une norme sur *E*, c'est une application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
- $\forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$
- $\forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Proposition :

Soit φ un produit scalaire sur *E*. Alors l'application $N : x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur *E* (ainsi, pour tout $x \in E, N(x)^2 = \varphi(x,x)$, appelé le carré scalaire de *x*)

Démonstration :

Déjà, pour $x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$. Donc $\sqrt{\varphi(x,x)}$ a un sens et est positive, ne peut être nulle que si $\varphi(x,x) = 0$, ce qui n'est le cas que lorsque $x = 0$.

Pour $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 \varphi(x,x)} = |\lambda| \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Soient $x, y \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
N(x+y) \leq N(x) + N(y) &\Leftrightarrow \sqrt{\varphi(x+y, x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \\
&\Leftrightarrow \varphi(x+y, x+y) \leq \varphi(x,x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} + \varphi(y,y) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \leq \varphi(x,x) \\
&\qquad\qquad + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} + \varphi(y,y) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x,y) \leq \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}
\end{aligned}$$

Ce qui est vrai car $\varphi(x,y) \leq |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ (Cauchy–Schwartz)

On appelle cette norme la norme associée au produit scalaire φ

C) Distance associée à un produit scalaire

Définition générale de distance sur un <u>ensemble</u> *E* :

Une distance sur *E*, c'est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x, y \in E, d(x,y) \geq 0$
- $\forall x, y \in E, (d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y)$
- $\forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in E, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Proposition :

Si N est une norme sur le $\mathbb{R}$-ev E, alors l'application $(x,y)\mapsto N(x-y)$ est une distance sur E, appelée la distance associée à la norme N.

Démonstration :

On note $d(x,y)=N(y-x)$

• • $d(x,y)=N(y-x)\geq 0$, n'est nul que si $y-x=0$ soit $y=x$.

• $d(y,x)=N(x-y)=N(-(y-x))=|-1|N(y-x)=d(x,y)$

• $d(x,z)=N(z-x)=N(z-y+y-x)\leq N(z-y)+N(y-x)\leq d(x,y)+d(y,z)$

Cas particulier : Si N est la norme associée à un produit scalaire φ, alors la distance associée à cette norme s'appelle la distance associée au produit scalaire φ.

D) Orthogonalité

On suppose E muni d'un produit scalaire φ.

Définition :

Soient $x,y\in E$. On dit que x et y sont orthogonaux (pour le produit scalaire φ) lorsque $\varphi(x,y)=0$. On note alors $x\perp y$ ($\perp$ est donc un symbole – courant – pour la relation « être orthogonal à »).

Remarque :

$\forall x\in E, x\perp 0_E$ car $\forall x\in E, \varphi(x,0_E)=0$.

Théorème (de Pythagore) :

Soit N la norme associée au produit scalaire φ. Alors, pour tous $x,y\in E$, on a l'équivalence : $x\perp y \Leftrightarrow N(x+y)^2=N(x)^2+N(y)^2$

Démonstration :

Soient $x,y\in E$. On a :

$$\begin{aligned}N(x+y)^2&=\varphi(x+y,x+y)=\varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)\\&=N(x)^2+2\varphi(x,y)+N(y)^2\end{aligned}$$

Ainsi, $N(x+y)^2=N(x)^2+N(y)^2 \Leftrightarrow \varphi(x,y)=0\Leftrightarrow x\perp y$.

E) Divers

On suppose E muni d'un produit scalaire φ, la norme associée N.

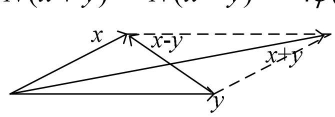
Diverses égalités :

$N(x+y)^2=N(x)^2+2\varphi(x,y)+N(y)^2$ (Egalité de Al Kashi)

$N(x-y)^2=N(x)^2-2\varphi(x,y)+N(y)^2$

$N(x+y)^2+N(x-y)^2=2N(x)^2+2N(y)^2$ (égalité du parallélogramme)

$N(x+y)^2-N(x-y)^2=4\varphi(x,y)$



F) Familles orthogonales, orthonormales

On suppose E muni d'un produit scalaire φ.

Définition :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- La famille est orthogonale $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall i,j\in I,(i\neq j\Rightarrow u_i\perp u_j)$
- La famille est orthonormale $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\forall i,j\in I,(i\neq j\Rightarrow u_i\perp u_j)\\ \text{et } \forall i\in I, u_i \text{ est de norme } 1\end{cases}$

  $\Leftrightarrow \forall i,j\in I,\varphi(u_i,u_j)=\delta_{i,j}$

(Où $\delta_{i,j}=1$ si $i=j$, 0 sinon)

Note :

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ pour tout $J\subset I$ fini, la famille $(u_i)_{i\in J}$ est libre.

$\Leftrightarrow$ pour tout $J\subset I$ fini, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in J}$ de scalaires : $\sum_{i\in J}\lambda_i u_i=0_E\Rightarrow\forall i\in J,\lambda_i=0$

Proposition :

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls (et en particulier si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale), alors $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration :

Soit $(u_i)_{i\in I}$, famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Soit $J\subset I$, fini. Soit $(\lambda_i)_{i\in J}$ une famille de réels. Supposons que $\sum_{i\in J}\lambda_i u_i=0_E$.

Soit $j\in J$. Alors $\varphi(u_j,\sum_{i\in J}\lambda_i u_i)=\begin{cases}\varphi(u_j,0)=0\\ \sum_{i\in J}\lambda_i\underbrace{\varphi(u_j,u_i)}_{=0\text{ si } i\neq j}=\lambda_j\underbrace{\varphi(u_j,u_j)}_{\neq 0}\end{cases}$. Donc $\lambda_j=0$.

Donc $\forall j\in J,\lambda_j=0$. Donc $(u_i)_{i\in J}$ est libre. Donc $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

Exemples de famille orthogonale :

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est évidemment orthonormale pour le produit scalaire naturel sur $\mathbb{R}^n$.
- $E=C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g)\mapsto\int_0^{2\pi}fg$.

Alors les fonctions $x\mapsto\cos kx, k\in\mathbb{N}$ forment une famille orthogonale. En effet :

Pour $p,q\in\mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{2\pi}\cos(px)\cos(qx)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((p+q)x)+\cos((p-q)x)dx$$

$$\text{si } p\neq q:\quad =\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)x)+\frac{1}{p-q}\sin((p-q)x)\right]_0^{2\pi}=0$$

$$\text{si } p=q\neq 0:\quad =\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)x)+x\right]_0^{2\pi}=\pi\neq 0$$

$$\text{si } p=q=0:\quad =\frac{1}{2}[2x]_0^{2\pi}=2\pi\neq 0$$

(Ainsi, les famille des $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, k \in \mathbb{N}^*$ est orthonormale)

G) Sous-espaces orthogonaux

On suppose E muni d'un produit scalaire φ.

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, x \perp y\}$ (ensemble des éléments de E orthogonaux à tout les éléments de F).

Proposition :

$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé l'orthogonal de F.

Démonstration :

- $0_E \in F^\perp$ car $\forall y \in F, \varphi(0_E, y) = 0$
- Soient $x, x' \in F^\perp, \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $x + \lambda x' \in F^\perp$ car $\forall y \in F, \varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x', y) = 0 + \lambda 0 = 0$.

(Remarque : on n'utilise pas le fait que F est un espace vectoriel pour montrer que $F^\perp$ en est un, donc F peut très bien être un ensemble quelconque…)

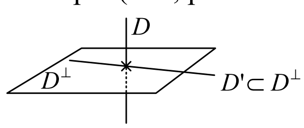
Définition – proposition :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

F et G sont orthogonaux $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y \Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$

On note alors $F \perp G$.

Exemple ($\mathbb{R}^3$, produit scalaire naturel) :



Remarque :

- $\{0_E\}^\perp = E$ car $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = 0$
- $E^\perp = \{0_E\}$. En effet :

Soit $x \in E^\perp$. Alors $\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0$. En particulier, $\varphi(x, x) = 0$. Donc $x = 0$.

D'où $E^\perp \subset \{0_E\}$, et l'autre inclusion est évidente…

- $(F^\perp)^\perp \supset F$

« Les éléments de F sont orthogonaux à tous les éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F ».

Ou encore :

Soit $x \in F$, montrons que $x \in (F^\perp)^\perp$, c'est-à-dire que $\forall y \in F^\perp, x \perp y$, ce qui est vrai car $x \in E$, donc pour tout $y \in F^\perp, x \perp y$ (par définition de $F^\perp$)

L'autre inclusion est fausse en général (en fait, elle est vraie uniquement en dimension finie, comme on le verra dans le chapitre suivant)