Chapitre 16 : ℝ-ev euclidien orienté de dimension 2

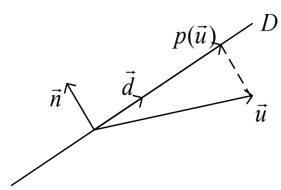
Dans tout ce chapitre, E désigne un ℝ-ev euclidien orienté de dimension 2.
Exemples :
$\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.
ℂ, en tant que ℝ-ev de dimension 2, on peut le munir de sa structure euclidienne orientée naturelle, c'est-à-dire celle pour laquelle la base naturelle $(1,i)$ est une base orthonormée directe.
Alors, pour $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, on a $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|x\|$, $z \cdot z' = xx' + yy' = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$

I Rappels : droites du plan *E*.

Ce sont les hyperplans de E :
Si $\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E, une droite a pour équation $D : ax + by = 0$ dans $\mathfrak{B}$.

Le vecteur $\vec{d}$ de composantes $(-b, a)$ dans $\mathfrak{B}$ dirige D ($D = \mathrm{Vect}(\vec{d})$), et $\vec{n}$ de composantes (a,b) dans $\mathfrak{B}$ est normal à D. ($D^{\perp} = \mathrm{Vect}(\vec{n})$)

Pour $\vec{u} \in E$, on note $p(\vec{u})$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur D.



Alors $p(\vec{u}) = \vec{u} - \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$, $d(\vec{u}, D) = \|\vec{u} - p(\vec{u})\| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Donc si la droite a pour équation $D : ax + by = 0$ dans une base orthonormée directe $\mathfrak{B}$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}$, alors $d(\vec{u}, D) = \dfrac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

II Angle orienté de deux vecteurs non nuls du plan

Proposition, définition :
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E.
Alors il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que :
$\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta . \vec{u}'$, où $\vec{u}'$ désigne le vecteur de E tel que $\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe de E.
On dit alors que θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. On note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \theta[2\pi]$.

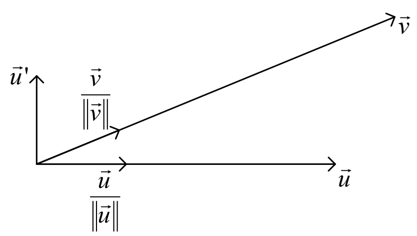
Remarque :

L'angle orienté $(\vec{u},\hat{\ }\vec{v}) \underset{\text{déf}}{=}$ l'ensemble de ses mesures $=\left\{\theta\in\mathbb{R},\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\cos\theta\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'\right\}$

Cette définition est rarement utilisée : on devrait écrire $\theta\in(\vec{u},\hat{\ }\vec{v})$.

Démonstration de la proposition :

$\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est de norme 1. Il existe donc un unique $\vec{u}'$ tel que $\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe.



$\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est de norme 1 ; soit $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ la colonne de ses composantes dans $\mathfrak{B}=\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$.

Alors $\alpha^2+\beta^2=1$

Et, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\cos\theta\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\alpha\\ \sin\theta=\beta\end{cases}$

Propriétés :

$(\vec{u},\hat{\ }\vec{u})\equiv 0\ [2\pi]$; $(\vec{u},\hat{\ }-\vec{u})\equiv\pi\ [2\pi]$; $(\vec{v},\hat{\ }\vec{u})\equiv-(\vec{u},\hat{\ }\vec{v})\ [2\pi]$

$\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)\equiv+\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ (car $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\cos\theta\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\cdot\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'\cdot\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$)

$\sin\theta=\dfrac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

En effet :

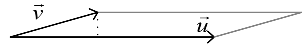
On prend $\mathfrak{B}=\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$, base orthonormée directe. Alors :

$$\det{}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)=\det{}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'\right)$$

Soit : $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\underbrace{\det{}_{\mathfrak{B}}(\vec{u},\vec{v})}_{=\det(\vec{u},\vec{v})}=\underbrace{\cos\theta\det{}_{\mathfrak{B}}\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)}_{=0}+\underbrace{\sin\theta\det{}_{\mathfrak{B}}\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)}_{=\sin\theta\det_{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}=\sin\theta}$

Ainsi, cette formule montre que :

$|\det(\vec{u},\vec{v})|=\|\vec{u}\|\underbrace{\|\vec{v}\|\sin\theta|}_{\text{hauteur}}=$ aire du parallélogramme correspondant aux deux vecteurs.



III Etude de $O(E)$ et O_2.

A) Etude

Soit $A\in O_2$: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} ac+bd=0 & \text{(orthogonaux)} \\ a^2+b^2=c^2+d^2=1 & \text{(de norme 1)} \end{cases}$

$ac+bd=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (puisque $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Donc $\begin{cases} d=-\lambda c \\ c=\lambda b \end{cases}$, et $d^2+c^2=\lambda^2(a^2+b^2)=\lambda^2$. Donc $\lambda=\pm 1$

Donc $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et une matrice de ce type est bien dans SO_2 ($\det A=1$)

Ou $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, et une matrice de ce type est bien dans $O_2\setminus SO_2$ ($\det A=-1$)

(Avec dans les deux cas $a^2+b^2=1$)

Conclusion :

Les éléments de SO_2 sont les $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a^2+b^2=1$.

Les éléments de $O_2\setminus SO_2$ sont les $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a^2+b^2=1$.

B) Etude de $SO(E)$ et SO_2.

Les éléments de SO_2 sont exactement les matrices du type $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta\in\mathbb{R}$ (résulte de l'étude précédente).

On a, pour tout $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

SO_2 est l'ensemble des $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $(SO_2,\times)$ est un groupe commutatif.

Théorème et définition :

Soit $f\in SO(E)$. Alors il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que la matrice de f dans toute base orthonormée directe soit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On dit alors que f est la rotation (vectorielle) d'angle θ.

Démonstration :

Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormée directe, soit $A=\text{mat}(f,\mathfrak{B})$.

Comme $f\in SO(E)$, on sait qu'alors $A\in SO_2$. Il existe donc $\theta\in\mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Soit $\mathfrak{B}'$ une autre base orthonormée directe. Soit alors P la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$. Alors, comme $P\in SO_2$ (et SO_2 est commutatif) : $\text{mat}(f,\mathfrak{B}')=P^{-1}AP=P^{-1}PA=A$.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, notons ρ_θ la rotation d'angle θ.

Proposition :

L'application $\begin{matrix}\mathbb{R}\to SO(E)\\ \theta\mapsto\rho_\theta\end{matrix}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R},+)$ vers $(SO(E),\circ)$, et dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

En effet :

- $\rho_0=\text{Id}_E$
- $\forall\theta,\theta'\in\mathbb{R},\rho_{\theta+\theta'}=\rho_\theta\circ\rho_{\theta'}$ (résulte du calcul matriciel précédent).
- Surjectivité : résulte du théorème précédent
- Noyau : $\rho_\theta=\text{Id}_E\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$

Autres résultats :

- $(\rho_\theta)^{-1}=\rho_{-\theta}$; $\rho_\pi=-\text{Id}_E$
- Etant donnés deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ non nuls et $\theta\in\mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\rho_\theta(\vec{u})=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|\\ (\widehat{\vec{u},\vec{v}})\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$$

En effet :

- Si $\rho_\theta(\vec{u})=\vec{v}$, alors $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ car ρ_θ est un automorphisme orthogonal.

Notons $\vec{u}'$ le vecteur tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe.

Alors la matrice de ρ_θ dans cette base est $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\rho_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)=\cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'$.

Donc $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\rho_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)=\cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'$. Donc $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\equiv\theta[2\pi]$

- Inversement, si $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\equiv\theta[2\pi]$, alors :

$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}+\sin\theta.\vec{u}'$, où $\vec{u}'$ est tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe. Donc $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\rho_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ (1ère colonne de la matrice de ρ_θ dans $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$, orthonormée)

Donc $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\rho_\theta(\vec{u})$, soit $\rho_\theta(\vec{u})=\vec{v}$.

C) Etude de $O(E) \setminus SO(E)$ et $O_2 \setminus SO_2$.

- Soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$, $A = \mathrm{mat}(f, \mathfrak{B})$, où $\mathfrak{B}$ est une base orthonormale de *E*.

Alors $A \in O_2 \setminus SO_2$.

Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$.

On remarque déjà que ${}^tA = A$.

Or, $A \in O_2$, donc ${}^tAA = I_2$. Donc $A^2 = I_2$, donc $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, f est une symétrie vectorielle.

Mais $f \in O(E)$, donc *f* est une symétrie orthogonale (car $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$), et cette symétrie est par rapport à une droite :

La symétrie par rapport à *E* est l'identité, et celle par rapport à $\{0\}$ est $-\mathrm{Id}_E$, et ces deux éléments sont dans $SO(E)$ (en dimension 2).

Ainsi, *f* est une réflexion.

- Inversement, les réflexions sont bien des éléments de $O(E) \setminus SO(E)$.

Conclusion : $O(E) \setminus SO(E)$ est l'ensemble des réflexions.

Attention : la matrice d'une réflexion dans une base orthonormée directe dépend de cette base.

La matrice d'une réflexion de droite *D* est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale dont le premier vecteur dirige *D*.

D) Résumé, tableau : classification des éléments de $O(E)$ lorsque dim $E = 2$

Dimension de l'espace des invariants	Nature	Matrice
0	Rotation d'angle θ non nul (modulo 2π)	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe
2	Id_E (rotation d'angle nul)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base
1	Réflexion de droite *D*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans <u>une</u> base orthonormée directe. Du type $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe.

Remarque :

La matrice de ρ_θ dans une base orthonormée indirecte est $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

(les bases orthonormées indirectes d'une orientation sont les bases orthonormées directes de l'autre orientation)

E) Composées de réflexions

Théorème :

Tout élément de $SO(E)$ est composé de deux réflexions, l'une pouvant être choisie quelconque.

Démonstration :

Soit $\rho \in SO(E)$, $s \in O(E) \setminus SO(E)$

Alors $\rho \circ s \in O(E)$, et $\det(\rho \circ s) = \det(\rho) \times \det(s) = -1$.

Donc $\rho \circ s \in O(E) \setminus SO(E)$. Donc $\rho \circ s$ est une réflexion s'.

Donc $\rho = \rho \circ (s \circ s) = (\rho \circ s) \circ s = s' \circ s$

De même, $s \circ \rho = s''$, où $s'' \in O(E) \setminus SO(E)$. Donc $\rho = s \circ s''$

Conclusion : Les réflexions engendrent $O(E)$

IV Compléments à propos d'angles orientés

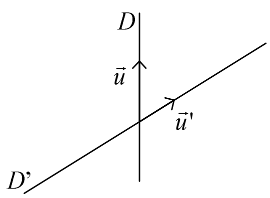
- Relation de Chasles : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \setminus \{0\}$

$(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) \equiv (\vec{u} \hat{,} \vec{w}) + (\vec{w} \hat{,} \vec{v})\ [2\pi]$

Démonstration :

Conséquence du fait que $\rho_{\theta+\theta'} = \rho_\theta \circ \rho_{\theta'}$.

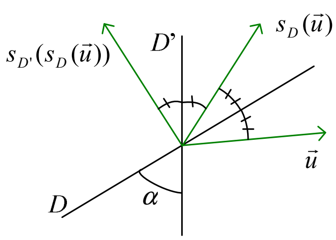
- Angle orienté de deux droites du plan.



Soient D, D' deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{u}'$. Alors $(\vec{u} \hat{,} \vec{u}')$, modulo π, ne dépend pas du choix de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. On le note alors $(D \hat{,} D')$

(Si $\lambda > 0, (\vec{u} \hat{,} \lambda\vec{u}') \equiv (\vec{u} \hat{,} \vec{u}')\ [2\pi]$ et $(\vec{u} \hat{,} -\vec{u}') \equiv \pi + (\vec{u} \hat{,} \vec{u}')\ [2\pi]$)

- $\alpha =$ angle orienté $(D \hat{,} D')$:



Alors, en notant s_D, $s_{D'}$ les réflexions de droites D, D', on a $s_{D'} \circ s_D = \rho_{2\alpha}$.