

Chapitre 17 : \mathbb{R} -ev euclidien orienté de dimension 3

I Préliminaires

E est un \mathbb{R} -ev euclidien orienté de dimension 3.

A) Brefs rappels

- Les formes linéaires sur E sont exactement les $\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$
- Les plans sont les hyperplans de E , admettent une équation du type $ax + by + cz = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, dans toute base.

Si \mathfrak{B} est une base orthonormale, et si $P : ax + by + cz = 0$ dans \mathfrak{B} , alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

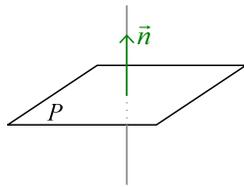
(signifie : \vec{n} de colonne de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans \mathfrak{B}) est normal à P .

Si \vec{u} est un vecteur de E , de composantes (x_0, y_0, z_0) dans \mathfrak{B} , et p le projecteur orthogonal sur P :

$$\vec{u} = p(\vec{u}) + \lambda \vec{n}, \text{ et } \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}; \quad d(\vec{u}, P) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

B) Orientation induite

Soit P un plan de E , \vec{n} un vecteur normal à P (non nul) :



Lemme :

Soient $\mathfrak{B}_p = (\vec{u}, \vec{v})$, $\mathfrak{B}'_p = (\vec{u}', \vec{v}')$ deux bases de P .

Alors $\det_{\mathfrak{B}_p} \mathfrak{B}'_p = \det_{(\vec{u}, \vec{v})} (\vec{u}', \vec{v}') = \det_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})} (\vec{u}', \vec{v}', \vec{n})$.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ et $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{n})$ sont bien des bases de E

En effet, si la matrice de (\vec{u}', \vec{v}') dans (\vec{u}, \vec{v}) est $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, alors la matrice de

$$(\vec{u}', \vec{v}', \vec{n}) \text{ dans } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) \text{ est } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte qu'on peut définir une orientation sur P de sorte que, étant donnée une base (\vec{u}, \vec{v}) de P :

(\vec{u}, \vec{v}) est une base directe de $P \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base directe de E .

Cette orientation s'appelle l'orientation induite sur P par \vec{n} .

C) Angle non orienté

L'angle non orienté de deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} non nuls, c'est l'unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$ (définition valable en toute dimension)

Remarque :

Si P est un plan orienté contenant \vec{u}, \vec{v} , et si θ est l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) dans le plan, alors $\theta \equiv \pm \alpha [2\pi]$, puisque $\cos \alpha = \cos \theta$

II Produit vectoriel

A) Proposition, définition

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

Alors il existe un et un seul vecteur $\vec{w} \in E$ tel que $\forall \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x}$.

Ce vecteur \vec{w} est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, et s'appelle le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} .

Ainsi, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est caractérisé par $\forall \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x}$

En effet :

$\vec{x} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$ est une forme linéaire (car \det est une application 3-linéaire)

Il existe donc un unique $\vec{w} \in E$ tel que cette forme linéaire soit $\vec{x} \mapsto \vec{w} \cdot \vec{x}$.

B) Composantes en base orthonormée directe

Soit $\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Recherche des composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

Soit $\vec{x} \in E, \vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = \det_{\mathfrak{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = x \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \vec{w} \cdot \vec{x}$,

Où $\vec{w} \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$

Ainsi : $\forall \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x}$

Donc $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\text{Ainsi, } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$$

C) Propriétés diverses

- Si $\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale de E , alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.

En effet :

$$\text{Il suffit de reprendre la formule précédente avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Si \vec{u}, \vec{v} sont orthogonaux et de norme 1, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit orthonormée directe.
- L'application : $E \times E \rightarrow E$ est 2-linéaire alternée :

- linéarité par rapport à la première variable :

Soit $\vec{x} \in E$. On a :

$$\det(\vec{u} + \lambda\vec{u}', \vec{v}, \vec{x}) = \underbrace{((\vec{u} + \lambda\vec{u}') \wedge \vec{v})}_{\vec{w}} \cdot \vec{x}, \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \det(\vec{u} + \lambda\vec{u}', \vec{v}, \vec{x}) &= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) + \lambda \det(\vec{u}', \vec{v}, \vec{x}) \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x} + \lambda (\vec{u}' \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x} \\ &= \underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v} + \lambda\vec{u}' \wedge \vec{v})}_{\vec{w}} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

- Linéarité par rapport à la deuxième variable : idem

- Alternée :

$$\text{Pour tout } \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{u}, \vec{x}) = 0 = \vec{0} \cdot \vec{x}.$$

Donc $\vec{0} = \vec{u} \wedge \vec{u}$.

- Plus précisément, on a l'équivalence :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ est libre} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

En effet :

Si (\vec{u}, \vec{v}) est liée, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ car alors $\forall \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = 0 = \vec{0} \cdot \vec{x}$.

Si (\vec{u}, \vec{v}) est libre, on peut la compléter en une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E .

$$\text{Alors } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0, \text{ donc } \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

En effet :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0$$

- Si \vec{u}, \vec{v} sont indépendants, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ forme une base directe de E (non nécessairement orthonormée)

En effet :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) > 0, \text{ car } \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

D) Produit vectoriel, angles

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E \setminus \{0\}$. Soit P un plan contenant \vec{u}, \vec{v} ($\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ lorsque les deux vecteurs sont indépendants). Soit \vec{w} un vecteur unitaire sur P^\perp .

On oriente P avec l'orientation induite par \vec{w} .

Soit θ l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) dans P .

Ainsi, $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \vec{u}'$, où \vec{u}' est tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$ soit une base

orthonormée directe de P , c'est-à-dire que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}', \vec{w}\right)$ est une base orthonormée directe

de E . (Remarque : $\vec{u}' = \vec{w} \wedge \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$)

En faisant le produit vectoriel par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, on obtient :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \sin \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \vec{u}' = \sin \theta \vec{w}$$

Donc, par linéarité du produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \vec{w}$$

Ainsi :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha, \text{ où } \alpha \text{ est l'angle non orienté entre } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$

Donc, si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha \underbrace{\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}}_{\vec{w}'}$ (\vec{w}' est le vecteur unitaire sur P^\perp)

tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}')$ est une base directe).

III Etude de $O(E)$ et O_3 .

A) Deux lemmes

Lemme 1 :

Soit $f \in O(E)$.

Alors l'application $x \mapsto \det(f - x\text{Id}_E)$ est polynomiale de degré 3 :

Si $A = \text{mat}(f, \mathfrak{B}) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ où \mathfrak{B} est une base quelconque :

$$\det(f - x\text{Id}_E) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - x & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - x & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - x \end{vmatrix}$$

(Rappel : c'est le polynôme caractéristique de f).

Ce polynôme possède donc au moins une racine réelle λ (puisque la fonction tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers $-\infty$ en $+\infty$, et elle est continue)

Alors $\det(f - \lambda\text{Id}_E) = 0$. Donc $f - \lambda\text{Id}_E$ n'est pas injective.

Donc $\ker(f - \lambda\text{Id}_E) \neq \{0\}$.

Il existe donc $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Mais $f \in O(E)$. Donc $\forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$.

Donc $\lambda = \pm 1$

Conclusion :

L'un au moins des deux espaces $\ker(f - \text{Id}_E)$ ou $\ker(f + \text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. ($\ker(f - \text{Id}_E)$ est appelé l'espace des vecteurs invariants, $\ker(f + \text{Id}_E)$ celui des vecteurs retournés)

Lemme 2 :

Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors F^\perp est aussi stable par f .

Démonstration :

Soit F stable par f , c'est-à-dire $\forall u \in F, f(u) \in F$ (ou $f(F) \subset F$)

Comme f est un automorphisme, on a en fait $f(F) = F$, car $f(F)$ est de même dimension (finie) que F .

Soit $v \in F^\perp$. Soit $w \in F$. Alors $w = f(u)$, où $u \in F$.

Donc $f(v) \cdot w = f(v) \cdot f(u) = v \cdot u = 0$ (car $v \in F^\perp$ et $u \in F$ donc $u \perp v$)

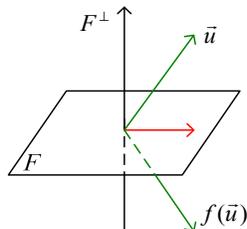
Ainsi, $\forall w \in F, f(v) \cdot w = 0$. Donc $f(v) \in F^\perp$. D'où la stabilité.

B) Classification des éléments de $O(E)$ selon la dimension de l'espace des invariants

Soit $f \in O(E)$, $F = \ker(f - \text{Id}_E)$.

1^{er} cas : $\dim F = 3$. Alors $f = \text{Id}_E$. (inversement, $\text{Id}_E \in O(E)$)

2^{ème} cas : $\dim F = 2$. Alors la droite $D = F^\perp$ est stable par f . $f|_D$ constitue donc une isométrie de D , et sans vecteur invariant autre que $\vec{0}$ (puisque l'ensemble des vecteurs invariants est F , et $F \cap F^\perp = F \cap D = \{\vec{0}\}$). Donc $f|_D = \pm \text{Id}_D$ (les seules isométries d'un espace de dimension 1 sont Id_D et $-\text{Id}_D$). Comme seul $\vec{0}$ est invariant, $f|_D = -\text{Id}_D$. Inversement, les réflexions sont bien dans $O(E)$ (et même $O(E) \setminus SO(E)$).

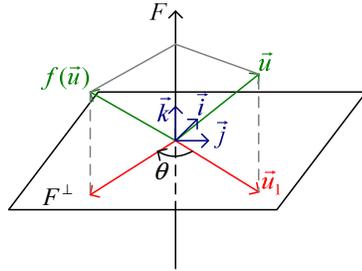


3^{ème} cas : $\dim F = 1$.

Soit $P = F^\perp$; P est stable par f , et $f|_P$ constitue une isométrie vectorielle de P , sans vecteur invariant autre que $\vec{0}$ (même raison que précédemment). $f|_P$ est donc une rotation d'angle non nul)

Si on se donne un vecteur unitaire \vec{k} sur F , et \vec{i}, \vec{j} (dans P) tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E , si on note θ l'angle de la rotation $f|_P$ du plan P orienté par (\vec{i}, \vec{j}) (c'est-à-dire par \vec{k}), la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Inversement : un endomorphisme admettant une telle matrice dans une base orthonormée directe est dans $SO(E)$ (car la matrice est dans SO_2)

4^{ème} cas : $\dim F = 0$

Selon le lemme 1, l'espace $\ker(f + \text{Id}_E)$ n'est alors pas réduit à $\{0\}$. On introduit $\vec{w} \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(\vec{w}) = -\vec{w}$.

Soit alors $D = \text{Vect}(\vec{w})$: alors D est stable par f (car $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda\vec{w}) = -\lambda\vec{w} \in D$)

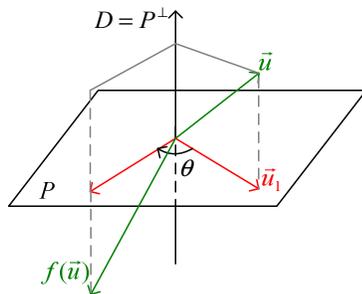
Donc $P = D^\perp$ est aussi stable par f .

Donc $f|_P$ constitue une isométrie de P , sans vecteur invariant autre que $\vec{0}$.

$f|_P$ est donc une rotation d'angle non nul. Il existe donc une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, qu'on définit de la même façon que dans le troisième cas, telle que :

$$\text{mat}(f, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Inversement, un endomorphisme admettant une telle matrice dans une base orthonormée directe est bien élément de $O(E) \setminus SO(E)$, car la matrice est dans $O_3 \setminus SO_3$



C) Etude de $SO(E)$

1) Proposition, définition

Soit $f \in SO(E)$.

On peut alors introduire :

- Une droite D , un vecteur unitaire \vec{k} sur D (c'est-à-dire un axe (D, \vec{k}))
- Un réel θ

Tels que la matrice de f dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est \vec{k} soit :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On dit que f est la rotation d'axe (D, \vec{k}) et d'angle θ .

Démonstration :

Résulte de l'étude et du chapitre précédent avec les rotations planes.

2) Détermination du couple axe – angle

- Si $f = \text{Id}_E$: on prend un axe quelconque, et comme angle $\theta \equiv 0[2\pi]$.
- Si $f \neq \text{Id}_E$, on a deux couples axe – angle possibles :
 $((D, \vec{k}), \theta)$ ou $((D, -\vec{k}), -\theta)$, où $D = \ker(f - \text{Id}_E)$

Détermination pratique :

(1) $D = \ker(f - \text{Id}_E) \dots$

(2) \vec{k} unitaire sur D (deux choix).

(3) choix de \vec{i}, \vec{j} tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée directe (pas nécessairement explicites)

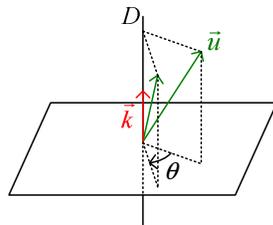
Ainsi, la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(\vec{i}) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

Donc $\vec{i} \cdot f(\vec{i}) = \cos \theta$. Et $\vec{j} \cdot f(\vec{j}) = \sin \theta$, ou alors $\det(\vec{i}, f(\vec{i})) = \sin \theta$ ou encore $\vec{i} \wedge f(\vec{i}) = \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{j} = \sin \theta \vec{k}$ (ces deux dernières possibilités permettent de n'avoir à calculer que \vec{i} si \vec{i} et \vec{j} ne sont pas explicites)

Figure :

Rotation d'axe (D, \vec{k}) et d'angle θ .



Formules pour obtenir $f(\vec{u})$, image de \vec{u} par f , rotation d'axe (D, \vec{k}) et d'angle θ .

On note $P = D^\perp$

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, où $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in D$.

Comme $\vec{u}_2 \in D$, on a $\vec{u}_2 = \lambda \vec{k}$.

Et $\vec{u} \cdot \vec{k} = \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{k}}_{=0} + \lambda \|\vec{k}\|^2$. Donc $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\|^2}$.

On a $f(\vec{u}) = f(\vec{u}_1) + \underbrace{f(\vec{u}_2)}_{=\vec{u}_2}$.

Détermination de $f(\vec{u})$:

Supposons $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ (sinon, $f(\vec{u}) = f(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 = \vec{u}$).

On introduit alors \vec{a} tel que $\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{a} \right)$ soit une base orthonormée de P

orienté par \vec{k} , c'est-à-dire tel que $\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{a}, \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \right)$ soit une base orthonormée directe

de E . (on a alors $\vec{a} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$)

Ainsi :

$$f\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}\right) = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \cos \theta + \sin \theta \vec{a}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

(La rotation plane $f|_P$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ dans $\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{a} \right)$)

Ainsi, comme $\vec{u}_1 = \vec{u} - \vec{u}_2 = \vec{u} - \lambda \vec{k}$:

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \cos \theta + \|\vec{u}_1\| \sin \theta \cdot \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \vec{u}_1 \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \vec{u}_1$$

Donc :

$$f(u) = f(\vec{u}_1) + \underbrace{f(\vec{u}_2)}_{=\vec{u}_2}$$

$$= \left(\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\|^2} \vec{k} \right) \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge (\vec{u} - \lambda \vec{k}) + \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\|^2} \vec{k}$$

$$= \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \cdot \frac{\vec{k} \wedge \vec{u}}{\|\vec{k}\|} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\|^2} (1 - \cos \theta) \vec{k}$$

D) Tableau résumant la classification

| Dimension de l'espace des invariants | | Nature | Matrice dans une base adaptée |
|--------------------------------------|---|---|--|
| $SO(E)$ | 3 | Id_E | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base |
| | 1 | Rotation d'angle θ non nul d'axe (D, \vec{k}) | $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est $\frac{\vec{k}}{\ \vec{k}\ }$ |
| $O(E) \setminus SO(E)$ | 2 | Réflexion de plan P | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale dont les deux premiers vecteurs sont dans P . |
| | 0 | Composée d'une rotation d'angle θ non nul d'axe (D, \vec{k}) et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de rotation | $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est $\frac{\vec{k}}{\ \vec{k}\ }$ |

E) Composée de réflexions

Proposition :

La composée de deux réflexions est une rotation.

Plus précisément :

Si s_1 et s_2 sont deux réflexions de plans P_1 et P_2 , alors :

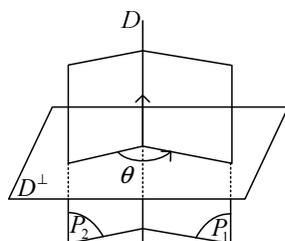
- Si $s_1 = s_2$, alors $s_1 \circ s_2 = \text{Id}_E$.
- Sinon, $s_1 \circ s_2$ est une rotation d'axe porté par $P_1 \cap P_2$.

Démonstration :

- $s_1 \circ s_2 \in SO(E)$: évident ; c'est la composée de deux isométries indirectes.

- Si $s_1 \neq s_2$, $s_1 \circ s_2$ est une rotation autre que Id_E . De plus, les éléments de $P_1 \cap P_2$ sont invariants par $s_1 \circ s_2$ (car $\forall u \in P_1 \cap P_2, s_1 \circ s_2(u) = s_1(s_2(u)) = s_1(u) = u$)

Remarque :



$s_1 \circ s_2$ est la rotation d'axe (D, \vec{k}) et d'angle 2θ .

Proposition :

Toute rotation f est composée de deux réflexions par rapport à des plans contenant l'axe de rotation, l'une des deux réflexions pouvant être prise quelconque (mais contenant l'axe tout de même)

Démonstration :

Soit P_1 un plan contenant l'axe D de f , s_1 la réflexion de plan P_1 .

Alors $s_1 \circ f \in O(E) \setminus SO(E)$, et $s_1 \circ f$ laisse les éléments de D invariants. Donc $\dim(\ker(f - \text{Id}_E)) \neq 0$. Donc $s_1 \circ f$ est une réflexion s_2 , de plan contenant D .

Donc $s_1 \circ f = s_2$. Donc $f = s_1 \circ s_2$. On procède de même avec $f \circ s_1 \dots$

Conséquence :

Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, tout élément de $O(E)$ peut s'écrire comme produit de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

IV Divers angles non orientés en dimension 3

- De vecteurs \vec{u}, \vec{v} :

L'angle non orienté (\vec{u}, \vec{v}) est le réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

- De droites D_1, D_2 :

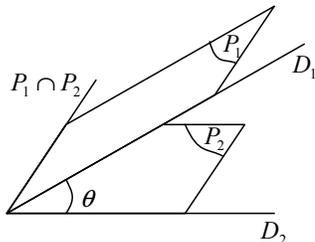
L'angle non orienté (D_1, D_2) est le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$,

Où $D_1 = \text{Vect}(\vec{u})$, et $D_2 = \text{Vect}(\vec{v})$

- De plans P_1, P_2 :

C'est l'angle non orienté des normales N_1, N_2 aux deux plans.

C'est aussi celui de D_1, D_2 , où $P = (P_1 \cap P_2)^\perp$, $D_1 = P_1 \cap P$, $D_2 = P_2 \cap P$.



- D'un plan P avec une droite D .

C'est l'angle entre D et sa projection orthogonale sur P .

(définition non valable si $D = P^\perp$)

C'est aussi $\frac{\pi}{2} - (D, N)$, où $N = P^\perp$

