Chapitre 2 : Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.
a et b désignent deux réels, avec $a < b$

I Intégrale des fonctions en escalier

A) Subdivisions

On appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie $(a_0,a_1,...a_n)$ telle que $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$.

Si $\sigma = (a_0,a_1,...a_n)$ et $\sigma' = (a'_0,a'_1,...a'_m)$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, on dit que σ' est plus fine que σ lorsque $\{a_0,a_1,...a_n\} \subset \{a'_0,a'_1,...a'_m\}$

Si $\sigma = (a_0,a_1,...a_n)$ et $\sigma' = (a'_0,a'_1,...a'_m)$ sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$, il est clair qu'on peut toujours fabriquer une subdivision plus fine que σ' et que σ en réordonnant les points de l'ensemble $\{a_0,a_1,...a_n\} \cup \{a'_0,a'_1,...a'_m\}$.

B) Fonctions en escalier

On dit qu'une fonction *f* définie sur $[a,b]$ est en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0,a_1,...a_n)$ de $[a,b]$ telle que *f* soit constante sur chaque intervalle ouvert $]a_{i-1},a_i[$, *i* allant de 1 à *n*.

La subdivision σ est alors dite subordonnée à la fonction en escalier *f*.

On voit que si *f* est une fonction en escalier, et si σ est une subdivision subordonnée à *f*, alors toute subdivision plus fine que σ est subordonnée à la fonction *f*.

Comme une fonction en escalier sur $[a,b]$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle y est bornée.

Etant données deux fonctions *f* et *g* en escalier sur $[a,b]$, de subdivisions subordonnées respectives σ et σ', toute subdivision σ'' plus fine que σ et σ' est subordonnée à la fois à *f* et à *g*. Il est alors clair que toute combinaison linéaire de *f* et *g*, ainsi que le produit fg, sont en escalier sur $[a,b]$, de subdivision subordonnée σ''.

De là, il résulte que l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ (qui contient les fonctions constantes sur $[a,b]$, donc en particulier la constante 1) est une sous algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions définies sur $[a,b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

C) Intégrale des fonctions en escalier

Soit *f* en escalier sur $[a,b]$, et soit $\sigma=(a_0,a_1,...a_n)$ une subdivision subordonnée à *f*. Notons, pour tout *i* de $[\![1,n]\!]$, y_i la valeur constante prise par *f* sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1},a_i[$. Alors la valeur prise par le nombre $I(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})y_i$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ subordonnée à *f*.

Idée de démonstration :

On peut d'abord montrer aisément que si σ' se déduit de σ en ajoutant un point, alors $I(f,\sigma')=I(f,\sigma)$.

De là, on montre par récurrence sur le nombre de points ajoutés que si σ' est plus fine que σ, alors $I(f,\sigma')=I(f,\sigma)$.

Enfin, dans le cas général, on introduit une subdivision σ'' plus fine que σ' et σ, et on a alors $I(f,\sigma')=I(f,\sigma'')=I(f,\sigma)$.

On peut donc définir l'intégrale de *f* sur $[a,b]$ comme étant la valeur de $I(f,\sigma)$, indépendante du choix de la subdivision σ subordonnée à *f*. Cette intégrale est notée $\int_{[a,b]}f$. Ainsi, avec les notations précédentes : $\int_{[a,b]}f=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})y_i$.

Cette définition correspond à une vision « géométrique » de l'intégrale : somme des aires algébriques des rectangles délimités par la courbe de *f* et l'axe *Ox*.

On peut remarquer au passage que l'intégrale d'une fonction constante sur $[a,b]$ est $k(b-a)$ où *k* est la valeur de cette constante.

Propriétés :

On montre aisément que cette intégrale des fonctions en escaliers a les propriétés suivantes : (*f* et *g* désignent deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, et λ et μ deux réels)

- Positivité : si $f\geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]}f\geq 0$
- Linéarité : $\int_{[a,b]}\lambda f+\mu g=\lambda\int_{[a,b]}f+\mu\int_{[a,b]}g$
- Additivité : Si $a<c<b$, alors $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f$ (on vérifie aisément que *f* est bien en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$).
- Si $f\leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]}f\leq\int_{[a,b]}g$ (propriété de croissance déduite de la linéarité et de la positivité)

II Fonctions intégrables

Soit *f* une fonction définie sur $[a,b]$, que l'on suppose bornée. On peut donc introduire $\sup f$ et $\inf f$.

Soit $\varepsilon^-(f)$ l'ensemble des fonctions φ en escalier sur $[a,b]$ plus petites que *f* (c'est-à-dire telles que $\varphi\leq f$)

Soit $\varepsilon^+(f)$ l'ensemble des fonctions ψ en escalier sur $[a,b]$ plus grandes que *f* (c'est-à-dire telles que $f \le \psi$)

Les ensembles $\varepsilon^-(f)$ et $\varepsilon^+(f)$ sont non vides : $\varepsilon^-(f)$ contient la fonction constante égale à $\inf f$, et $\varepsilon^+(f)$ la fonction constante égale à $\sup f$.

Soit $A^-(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier de $\varepsilon^-(f)$.

Soit $A^+(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier de $\varepsilon^+(f)$.

Les ensembles $A^-(f)$ et $A^+(f)$ sont donc des ensembles non vides de réels, et de plus tout élément de $A^-(f)$ est inférieur à tout élément de $A^+(f)$: en effet, si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \le f \le \psi$, alors $\varphi \le \psi$ et par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier, on a $\int_{[a,b]} \varphi \le \int_{[a,b]} \psi$.

Donc $A^-(f)$ admet une borne supérieure, notée $I^-(f)$, et $A^+(f)$ une borne inférieure, notée $I^+(f)$. Ainsi, $I^-(f) \le I^+(f)$.

Si il y a égalité entre ces deux bornes, on dit que *f* est intégrable sur $[a,b]$, et on appelle l'intégrale de *f* sur $[a,b]$ la valeur commune de ces bornes.

Dans le cas contraire, ou si *f* n'est pas bornée sur $[a,b]$, on dira que *f* n'est pas intégrable sur $[a,b]$.

Cette définition de l'intégrabilité est l'intégrabilité au sens de Riemann.

On peut noter que, selon cette définition, les fonctions en escalier sont bien intégrables sur $[a,b]$, et que leur intégrale au sens de cette définition coïncide avec leur intégrale au sens de la définition du paragraphe précédent (en effet, il suffit de voir que, lorsque f est en escalier, *f* appartient à $\varepsilon^-(f)$ et à $\varepsilon^+(f)$ …)

Enfin, si *f* est intégrable sur $[a,b]$, son intégrale sur $[a,b]$ est notée $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)dt$ (dans la dernière notation, t est une variable muette, elle peut prendre n'importe quel autre nom).

On voit que la définition correspond encore bien à une vision « géométrique » de l'intégrale : aire algébrique de la surface délimitée par la courbe de *f* et l'axe *Ox*.

III Fonctions continues par morceaux

A) Définition et généralités

Soit *f* une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que *f* est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ de $[a,b]$ telle que :

Pour chaque i de 1 à n, *f* est continue sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$, admet une limite finie à droite en a_{i-1} et une limite finie à gauche en a_i.

La subdivision σ est alors dite subordonnée à la fonction continue par morceaux *f*.

On voit que si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, et si la subdivision σ est subordonnée à *f*, alors toute subdivision plus fine que σ est subordonnée à la fonction *f*.

Il est clair que *f* est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si *f* ne présente qu'un nombre fini de points de discontinuité (voire aucun…), en lesquels f admets néanmoins des limites finies à droite et à gauche (à droite seulement pour a et à gauche seulement pour b).

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, et soit $(a_0, a_1, \ldots a_n)$ une subdivision subordonnée à f. Alors, pour chaque i de $[\![1,n]\!]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable par continuité en une fonction f_i continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$.

Il en résulte qu'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ y est bornée : en effet, avec les notations précédentes, pour chaque i de $[\![1,n]\!]$, la fonction f_i est continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$, donc bornée sur ce segment. Comme les points a_i sont en nombre fini, f est bornée sur $[a,b]$, un majorant de $|f|$ étant :

$$\max\left(|f(a_0)|, |f(a_1)|, \ldots |f(a_n)|, \sup_{[a_0,a_1]}|f_1|, \sup_{[a_1,a_2]}|f_2|, \ldots \sup_{[a_{n-1},a_n]}|f_n|\right)$$

On montre, comme pour les fonctions en escalier que toute combinaison linéaire ou produit de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est encore continue par morceaux sur $[a,b]$. De là, on tire que les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ forment une sous algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions définies sur $[a,b]$.

B) Encadrement par des fonctions en escalier

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, pour tout réel strictement positif ε, il existe une fonction en escalier φ sur $[a,b]$ telle que $|f-\varphi| \leq \varepsilon$.

Démonstration :

- Commençons par le cas où f est continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$

Comme f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$ (théorème de Heine), il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \forall x' \in [a,b], \left(|x-x'| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon\right)$$

On considère un entier naturel non nul n tel que $\dfrac{b-a}{n} < \alpha$, et la subdivision régulière $\sigma = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ de $[a,b]$ définie par :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], x_k = a + kh, \text{ avec } h = \frac{b-a}{n} \text{ (pas de la subdivision régulière } \sigma\text{)}$$

On considère alors la fonction φ en escalier définie par :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \forall t \in [x_{k-1}, x_k[, \varphi(t) = f(x_{k-1}) \text{ et } \varphi(b) = f(b).$$

Alors $|f-\varphi| \leq \varepsilon$:

Soit $t \in [a,b]$

- Si $t = b$, alors $|f(b)-\varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$
- Sinon, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $t \in [x_{k-1}, x_k[$.

Alors $|f(t)-\varphi(t)|=|f(t)-f(x_{k-1})|<\varepsilon$, la dernière inégalité venant du fait que, pour $t\in[x_{k-1},x_k[$, on a $|t-x_{k-1}|\leq \underbrace{x_k-x_{k-1}}_{h}<\alpha$

- Si maintenant *f* n'est que continue par morceaux :

On introduit une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...a_m)$ subordonnée à *f*, et, pour chaque *i* de $[\![1,m]\!]$, on considère la fonction f_i comme introduite dans le A), qui est continue sur le segment $[a_{i-1},a_i]$ et qui coïncide avec *f* sur $]a_{i-1},a_i[$. Etant donné $\varepsilon>0$, on applique alors le résultat précédent à chaque fonction f_i pour construire, sur chaque segment $[a_{i-1},a_i]$ une fonction en escalier φ_i telle que $\forall t\in[a_{i-1},a_i], |f_i(t)-\varphi_i(t)|\leq\varepsilon$. On peut ensuite construire une fonction φ définie sur $[a,b]$ par :

$\forall i\in[\![0,m]\!], \varphi(a_i)=f(a_i)$, et $\forall i\in[\![1,m]\!], \forall t\in\,]a_{i-1},a_i[, \varphi(t)=\varphi_i(t)$.

Alors φ est évidemment en escalier sur $[a,b]$, et $|f-\varphi|\leq\varepsilon$.

Autre énoncé du théorème, plus commode pour la suite :

Théorème 1 : (variante)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, pour tout réel strictement positif ε, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

$\varphi\leq f\leq\psi$ et $\psi-\varphi\leq\varepsilon$

Les deux énoncés reviennent au même, car si φ est une fonction en escalier telle que $|f-\varphi|\leq\varepsilon$, alors les fonctions $\varphi'=\varphi-\varepsilon$ et $\psi'=\varphi+\varepsilon$ sont en escalier et on a $\varphi'\leq f\leq\psi'$ et $\psi-\varphi\leq 2\varepsilon$, et inversement, si $\varphi\leq f\leq\psi$ et $\psi-\varphi\leq\varepsilon$, alors évidemment $|f-\varphi|\leq\varepsilon$.

C) Conséquence : intégrabilité

Théorème 2 :

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration :

Soit *f* une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$. Selon le théorème précédent, on peut introduire deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que $\varphi\leq f\leq\psi$ et $\psi-\varphi\leq\varepsilon$.

Alors, en reprenant les notations de la définition du **I**, $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$ et $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$, on a donc $\int_{[a,b]}\varphi\leq I^-(f)\leq I^+(f)\leq\int_{[a,b]}\psi$.

Par linéarité et croissance des intégrales des fonctions en escalier, on a alors :

$\int_{[a,b]}\varphi-\int_{[a,b]}\psi=\int_{[a,b]}\varphi-\psi\leq\int_{[a,b]}\varepsilon=(b-a)\varepsilon$

Donc $0\leq I^+(f)-I^-(f)\leq(b-a)\varepsilon$

Comme cet encadrement est valable quel que soit le réel $\varepsilon>0$, il en résulte, par passage à la limite, que $I^+(f)-I^-(f)=0$

Ainsi, par définition, *f* est intégrable sur $[a,b]$.

IV Compléments hors programme

On dit qu'une fonction *f* définie sur $[a,b]$ est réglée lorsque, pour tout réel strictement positif ε, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

$\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Comme les fonctions en escalier sont bornées, il en résulte que toute fonction réglée est bornée. En regardant les résultat précédents, on remarque que le théorème 1 s'énonce alors ainsi : « toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ », et, en regardant la démonstration du théorème 2, on voit qu'on peut énoncer le théorème : « toute fonction réglée sur $[a,b]$ est intégrable ».

On a donc les implications :

Continue par morceaux $\Rightarrow$ réglée $\Rightarrow$ intégrable $\Rightarrow$ bornée.

Mais toutes les réciproques sont fausses :

- Exemple de fonction bornée non intégrable.

Soit *f* la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ sur $[0,1]$ (c'est-à-dire $f(x)=1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon)

Si φ est en escalier sur $[0,1]$ et $\varphi \leq f$, alors sur tout intervalle $]a_{i-1},a_i[$ d'une subdivision subordonnée à φ, la valeur constante prise par φ sera nécessairement inférieure ou égale à 0 puisque *f* prend la valeur 0 sur $]a_{i-1},a_i[$ (qui contient des irrationnels). Donc $I^-(f)=0$. De même, $I^+(f)=1$, d'où la non intégrabilité de *f* (au sens de Riemann).

- Exemple de fonction non continue par morceaux, même non réglée, mais intégrable :

Soit *f* définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 sinon. Déjà, *f* n'est pas continue par morceaux puisqu'elle n'a pas de limite en 0. De plus, on ne peut pas trouver deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[0,1]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq 1$. En effet, comme *f* prend les valeurs -1 et 1 sur tout intervalle $[0,\alpha]$ avec $0<\alpha\leq 1$, si deux fonctions en escalier φ et ψ encadrent *f* alors sur le premier intervalle $[0,a_1]$ d'une subdivision subordonnée à φ et ψ, les valeurs constantes prises par ces fonctions sont distantes d'au moins 2.

Cependant, soit ε tel que $0<\varepsilon<1$. Alors f restreinte à $[\varepsilon,1]$ est continue, donc encadrable, sur cet intervalle, par deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[\varepsilon,1]$, distantes d'au plus ε. Si on prolonge φ et ψ sur $[0,1]$ en prenant $\varphi(t)=-1$ et $\psi(t)=1$ pour $t\in[0,\varepsilon[$, alors il est clair que φ et ψ sont en escalier sur $[0,1]$, que $\varphi \leq f \leq \psi$, et que :

$$\int_{[0,1]}\psi - \int_{[0,1]}\varphi = \int_{[0,\varepsilon]}\psi-\varphi + \int_{[\varepsilon,1]}\psi-\varphi \leq 2\varepsilon + (1-\varepsilon)\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

D'où, comme dans la fin de la démonstration du théorème 2 : $I^+(f)-I^-(f)=0$.

- Exemple de fonction non continue par morceaux, qui est pourtant réglée.

Soit *f* définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$ si $x\neq 0$, 0 sinon.

Alors *f* n'est pas continue par morceaux, car elle a une infinité de points de discontinuité (les $\frac{1}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$). Cependant, on peut facilement l'encadrer à n'importe quel ε près par des fonctions en escalier (voir sur un graphique : pour *n* assez grand (tel que $\frac{1}{n}<\varepsilon$), on encadre *f* sur $[0,\frac{1}{n}]$ par les constantes 0 et $\frac{1}{n}$, et on conserve *f* sur $]\frac{1}{n},1]$)

Ainsi, *f* est réglée, et aussi intégrable. (d'intégrale $I=\dfrac{\pi^2}{6}-1$).