Chapitre 3 : Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Notations et remarques :

- Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit S un segment de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux (noté parfois c.p.m.)
Alors f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans S (évident).
Pour a, b de I, on note :

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f \text{ si } a < b \\ 0 \text{ si } a = b \\ -\int_{[a,b]} f \text{ si } a > b \end{cases}$$

I Premières propriétés

Ici, a et b désignent deux réels quelconques

A) Positivité

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, avec $a \leq b$.

Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Démonstration :
La fonction nulle appartient à $\varepsilon^-(f)$.
Or, par définition, $\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi,\ \varphi \in \varepsilon^-(f)\right\}$. Donc $\int_a^b f \geq \int_a^b 0 = 0$.

B) Linéarité

Soient f_1, f_2 continues par morceaux sur un segment $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

- $\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ (1)
- $\int_a^b \lambda f_1 = \lambda \int_a^b f_1$ (2)

Autrement dit, l'application $f \mapsto \int_a^b f$, définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, est linéaire (rappel : cet ensemble est un sev de $\mathfrak{F}(\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}, \mathbb{R})$).

Démonstration : dans le cas $a > b$

(1) : soit $\varepsilon > 0$

Il existe $\varphi_1 \in \varepsilon^-(f_1)$ et $\psi_1 \in \varepsilon^+(f_1)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f_1 \leq \int_a^b \psi_1 \leq \left(\int_a^b f_1\right) + \varepsilon \quad (1)$$

En effet : $\int_a^b f_1 = \sup\left\{\int_a^b \varphi,\ \varphi \in \varepsilon^-(f_1)\right\}$

Donc $\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\sup\left\{\int_a^b \varphi,\ \varphi \in \varepsilon^-(f_1)\right\}$. Il existe donc $\varphi_1 \in \varepsilon^-(f_1)$ tel que $\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_1$

Et comme $\int_a^b f_1$ est un majorant de cet ensemble, on a $\int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f_1$

Mais, par ailleurs, $\int_a^b f_1 = \inf\left\{\int_a^b \psi,\ \psi \in \varepsilon^+(f_1)\right\}$. Donc en raisonnant de la même façon, on trouve les deux dernières inégalités de (1)

De même, il existe $\varphi_2 \in \varepsilon^-(f_2)$ et $\psi_2 \in \varepsilon^+(f_2)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f_2\right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_2 \leq \int_a^b f_2 \leq \int_a^b \psi_2 \leq \left(\int_a^b f_2\right) + \varepsilon \quad (2)$$

En sommant (1) et (2), on obtient alors :

$$\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 - 2\varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \leq \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + 2\varepsilon \quad (3)$$

Par ailleurs :

$\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escalier, et $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f_1 + f_2$

Donc $\varphi_1 + \varphi_2 \in \varepsilon^-(f_1 + f_2)$.

De même, $\psi_1 + \psi_2 \in \varepsilon^+(f_1 + f_2)$

Donc $\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \int_a^b (f_1 + f_2) \leq \int_a^b (\psi_1 + \psi_2) \quad (4)$

En effet, $\int_a^b (f_1 + f_2)$ est la borne supérieure de l'ensemble des $\int_a^b \varphi$ pour $\varphi \in \varepsilon^-(f_1 + f_2)$ et la borne inférieure de l'ensemble des $\int_a^b \psi$ pour $\psi \in \varepsilon^+(f_1 + f_2)$.

Or, comme $\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escaliers, $\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2$.

Il résulte alors de (3) et (4) que $\left|\int_a^b (f_1 + f_2) - \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2\right| \leq 4\varepsilon$

Enfin, comme c'est valable pour tout ε, on obtient, en le faisant tendre vers 0 :

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$$

Remarque : seule l'intégrabilité a ici été utilisée.

(2) 1^er^ cas : $\lambda \geq 0$

Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f_1 \leq \int_a^b \psi_1 \leq \left(\int_a^b f_1\right) + \varepsilon$$

D'où $\lambda\int_a^b f_1 - \lambda\varepsilon \leq \lambda\int_a^b \varphi_1 \leq \lambda\int_a^b f_1 \leq \lambda\int_a^b \psi_1 \leq \lambda\int_a^b f_1 + \lambda\varepsilon$

Par ailleurs, $\lambda\varphi_1$ et $\lambda\psi_1$ sont en escalier et $\lambda\varphi_1 \leq \lambda f_1 \leq \lambda\psi_1$.

Donc $\lambda\varphi_1 \in \varepsilon^-(\lambda f_1)$ et $\lambda\psi_1 \in \varepsilon^+(\lambda f_1)$

Donc $\int_a^b \lambda\varphi_1 \leq \int_a^b \lambda f_1 \leq \int_a^b \lambda\psi_1$

Il en résulte que :

$\left|\int_a^b \lambda f_1 - \lambda\int_a^b f_1\right| \leq 2\varepsilon$ d'où le résultat cherché en faisant tendre ε vers 0.

2ème cas : $\lambda < 0$, la démonstration est analogue en « retournant » les inégalités.

Le cas où $a = b$ est immédiat.

Le cas où $a > b$ peut être traité en écrivant les résultats montrés pour le cas où $a < b$ et en multipliant les inégalités par -1.

C) Additivité par rapport aux intervalles, théorème de Chasles

Théorème :

Soit S un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur S.

Alors, pour tous a, b, c de S, on a :

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration :

1er cas : si $a < c < b$

Soit $\varepsilon > 0$.

On note $\varepsilon^-(f)$ et $\varepsilon^+(f)$ les ensembles des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$

On introduit alors $\varphi \in \varepsilon^-(f)$ et $\psi \in \varepsilon^+(f)$ telles que :

$\left(\int_a^b f\right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi \leq \left(\int_a^b f\right) + \varepsilon$

On a alors : $\int_a^c \varphi \leq \int_a^c f \leq \int_a^c \psi$.

En effet, $\varphi_{/[a,c]}$ est en escalier sur $[a,c]$

Et $\varphi_{/[a,c]} \leq f_{/[a,c]}$

D'où, d'après la définition de $\int_a^c f$, $\int_a^c \varphi \leq \int_a^c f$, et, de même, on montre la deuxième inégalité.

De même, on a aussi : $\int_c^b \varphi \leq \int_c^b f \leq \int_c^b \psi$

Ainsi, en sommant (et en prenant en compte les propriétés des fonctions en escalier) : $\int_a^b \varphi \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b \psi$

On montre ensuite le résultat de la même manière que dans les autres théorèmes.

Pour les autres cas, on montre aisément le résultat grâce à celui-ci, par exemple :

- Si $a = b < c$, immédiat…
- Si $b < a < c$, alors $\int_b^c f = \int_b^a f + \int_a^c f$

D'où $\int_b^a f = \int_b^c f - \int_a^c f$, soit $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

D) Croissance

Si *f*, *g* sont continues par morceaux sur $[a,b]$ avec $a<b$, et si $f<g$, alors : $\int_a^b f < \int_a^b g$.

La démonstration est immédiate en utilisant la linéarité et la positivité.

II Majorations, minorations d'intégrales

Théorème :
Soit *f* continue par morceaux sur un segment $[a,b]$, avec $a \leq b$.
(Alors *f* est bornée sur $[a,b]$).
On a :

(1) $(b-a)\inf f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\sup f$

(2) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Démonstration : (cas où $a=b$ évident)
(1) $\inf f \leq f \leq \sup f$, donc, par croissance (puisque $a<b$) :
$\int_a^b \inf f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sup f$, d'où l'inégalité (puisque $\inf f$ et $\sup f$ sont constantes)
(2) On a : $-|f| \leq f \leq |f|$
Donc $\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, soit $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, d'où le résultat (on utilise le fait que si $-A \leq X \leq A$, alors $|X| \leq A$)

Conséquences :
Si *f* et *g* sont continues par morceaux sur $[a,b]$ avec $a \leq b$:

- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
- $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| \int_a^b |f(x)|dx$

Pour la dernière inégalité : on a en effet : $\forall x \in [a,b], |f(x)g(x)| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} |g(t)| \times |f(x)|$, et la croissance de l'intégrale.

Remarque à propos de la croissance :

- La théorie, c'est $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- En pratique, on utilise : $(\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

On dit « intégrer une inégalité »
Dans les cas où $a>b$, en pratique, on « retourne » : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
Il peut cependant être utile de savoir que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$ (même quand $a \geq b$)

III Considérations à propos de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Proposition :

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ qui ne diffèrent que sur un nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Démonstration :

$f-g$ est une fonction en escalier dont l'intégrale est évidemment nulle. (car sa valeur constante sur chaque intervalle ouvert d'une subdivision subordonnée est nulle).

Etude :

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$ (et non continue)

Soit $\sigma = (\underset{a}{x_0}, x_1, \dots \underset{b}{x_n})$ une subdivision subordonnée à f.

On sait que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on peut introduire f_i, prolongement par continuité de $f_{/]x_{i-1},x_i[}$ à $[x_{i-1}, x_i]$.

Alors $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i$

Donc $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i$.

Ce qui ramène l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à une somme d'intégrales de fonctions continues sur des segments.

IV Positivité stricte

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ avec $a<b$.

Si f est positive et non identiquement nulle, alors $\int_a^b f > 0$

Remarque : c'est faux pour une fonction continue par morceaux et non continue.

Démonstration :

On se place dans les hypothèses du théorème : il existe alors $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$.

Comme f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \underbrace{[a,b] \cap [c-\alpha, c+\alpha]}_{\substack{\text{segment du type } [c',c''] \\ \text{avec } a \le c' < c'' \le b}}, f(x) \ge \frac{f(c)}{2}$$

$$\text{Alors } \int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c'} f}_{\ge 0} + \underbrace{\int_{c'}^{c''} f}_{\ge (c''-c')\frac{f(c)}{2} > 0} + \underbrace{\int_{c''}^b f}_{\ge 0} > 0$$

V Inégalité de Cauchy–Schwartz pour les intégrales

Dans ce paragraphe, a et b sont deux réels tels que $a<b$

A) Un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$

(Rappel : $C^0([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev)

Proposition :

L'application $\begin{array}{l} C^0([a,b],\mathbb{R})\times C^0([a,b],\mathbb{R})\to R \\ (f,g)\mapsto\int_a^b f\times g \end{array}$ est un produit scalaire.

Démonstration :

- Pour tous $f,f',g,g'\in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b f(g+\lambda g')=\int_a^b fg+\lambda fg'=\int_a^b fg+\lambda\int_a^b fg'$$

et $\int_a^b (f+\lambda f')g=\int_a^b fg+\lambda f'g=\int_a^b fg+\lambda\int_a^b f'g$

D'où la bilinéarité.

- Pour tous $f,g\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\int_a^b fg=\int_a^b gf$$

D'où la symétrie

- Pour tout $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$\int_a^b f^2\geq 0$ car $\forall x[a,b], f(x)^2\geq 0$ (d'où la positivité)

Si $\int_a^b f^2=0$, alors $f^2=0$ (positivité stricte puisque f^2 est positive et continue)

D'où $f=0$

L'application est donc bien définie–positive.

B) Conséquence : inégalité de Cauchy–Schwartz

Pour tous $f,g\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\leq\int_a^b f^2\times\int_a^b g^2$$

Variante :

$$\left|\int_a^b fg\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2}\times\sqrt{\int_a^b g^2}\ .$$

VI Sommes de Riemann

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux réels, avec $a<b$.

A) Le théorème

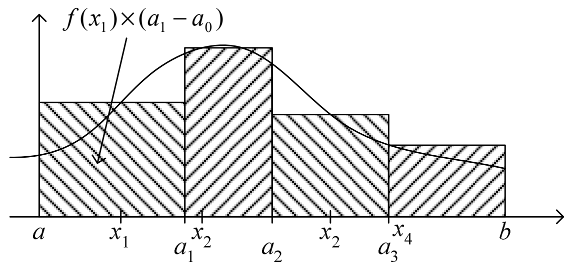
Définition :

Soit *f* continue sur $[a,b]$, et $\sigma = (\underset{a}{a_0},\dots \underset{b}{a_n})$ une subdivision de $[a,b]$.

Une somme de Riemann attachée à *f* et σ, c'est une somme du type :

$S_{f,\sigma,x} = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})f(x_k)$, où $x = (x_1,\dots x_n)$ est une famille de points de $[a,b]$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k \in [a_{k-1}, a_k]$.

Visualisation :



Théorème :

Soit *f* continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision σ de pas inférieur à α et toute somme de Riemann *S* attachée à *f* et σ, $\left|S - \int_a^b f\right| < \varepsilon$

(Le pas d'une subdivision $\sigma = (a_0,\dots a_n)$ est la valeur de $\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}(a_i - a_{i-1})$)

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.

On introduit alors $\alpha > 0$ tel que $\forall x, x' \in [a,b], (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$ (ce qui est possible car *f* est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y est uniformément continue)

Soit $\sigma = (\underset{a}{a_0},\dots \underset{b}{a_n})$ une subdivision de pas inférieur à α.

Pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, on prend $x_k \in [a_{i-1}, a_i]$

Soit alors $S = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})f(x_k)$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k)\right| &= \left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x_k)dx\right| \\ &= \left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - f(x_k))dx\right| \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(x_k)|dx\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a_{k-1}, a_k]$, on a $|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$ puisque $|x - x_k| \leq a_k - a_{k-1} < \alpha$

Donc $\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k)\right| \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} \varepsilon.dx = (a_k - a_{k-1})\varepsilon$

De plus, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})f(x_k)\right|$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k)\right)\right|$$

D'où :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

B) Cas particulier : les sommes S_n, s_n, M_n.

Soit f continue sur $[a,b]$

On note :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

C'est-à-dire :

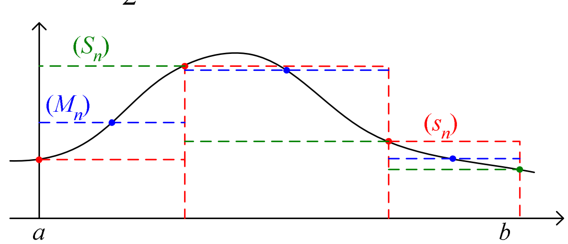
On prend pour σ la subdivision régulière de $[a,b]$ en n segments, et, en notant $\sigma = (a_0,...a_n)$, on prend les $x_k = a_k$

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

(Même subdivision, mais $x_k = a_{k-1}$)

$$\boxed{M_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a + (k-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)}$$

($x_k = \dfrac{a_k + a_{k-1}}{2}$)



Théorème :

Les suites $(S_n),(s_n),(M_n)$ convergent vers $\int_a^b f$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ comme dans le théorème précédent.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N} < \alpha$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, la subdivision régulière de $[a,b]$ en n parties est de pas $\dfrac{b-a}{n} < \alpha$, donc $\left|s_n - \int_a^b f\right| < \varepsilon$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \left| s_n - \int_a^b f \right| < \varepsilon$

(pour les autres suites remplacer simplement s_n)

Exemple :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (pour $k \geq 1$). Montrer que (u_n) converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x}\end{array}.$$

Les $\frac{k}{n}$ sont les points de la subdivision régulière de $[0,1]$ en n parties : on reconnaît alors une somme de Riemann :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

f étant continue sur $[0,1]$, u_n tend vers $\underbrace{\int_0^1 f}_{\ln 2}$ lorsque *n* tend vers $+\infty$.

C) Retour aux sommes de Riemann générales

Majoration de l'erreur quand *f* est lipschitzienne :

On suppose ici l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall x, x' \in [a,b], |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$

Soit S une somme de Riemann attachée à f et $\sigma = (a_0, \dots a_n)$ avec le choix $x = (x_1, \dots x_n)$ des points $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$. Majorons $\left| \int_a^b f - S \right|$

En reprenant la démonstration du A) :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \right| &\leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(x_k)| dx \\
&\leq M \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - x_k| dx \\
&\leq M \int_{a_{k-1}}^{a_k} (a_k - a_{k-1}) dx \\
&\leq M (a_k - a_{k-1})^2 \\
&\leq M\delta^2
\end{aligned}$$

Où on a noté δ le pas de la subdivision.

Ainsi, en continuant la démonstration comme au A) :

$$\left| \int_a^b f - S \right| \leq nM\delta^2$$

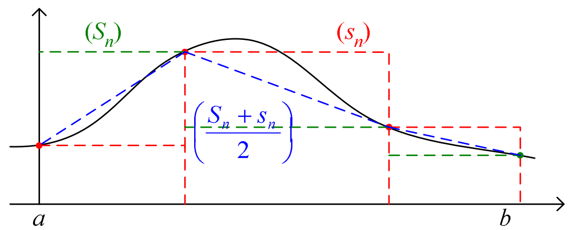
Ou, lorsque la subdivision est régulière :

$$\left| \int_a^b f - S \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{n}$$

D) Remarque sur la méthode des trapèzes

Prendre (S_n) ou (s_n) comme approximation de $\int_a^b f$, c'est appliquer la méthode des rectangles. (pour (M_n) aussi)

Prendre $\left(\dfrac{S_n + s_n}{2}\right)$ comme approximation de $\int_a^b f$ s'appelle appliquer la méthode des trapèzes :



E) Cas où f est monotone (et toujours continue)

Supposons f croissante ; alors, en notant toujours $(a_0,...a_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$ en n parties : $\forall x \in [a_{k-1}, a_k], f(a_{k-1}) \leq f(x) \leq f(a_k)$

Donc $\underbrace{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_{k-1})dx}_{(a_k - a_{k-1})f(a_{k-1})} \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \leq \underbrace{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_k)dx}_{(a_k - a_{k-1})f(a_k)}$

D'où, en sommant :

$s_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_n$

Il en est de même quand f est décroissante (en retournant les inégalités)

Application :

$\left|\int_a^b f - S_n\right| \leq |S_n - s_n|$

$\left|\int_a^b f - s_n\right| \leq |S_n - s_n|$

$$S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Exemple numérique :

Donner une approximation à 2.10^-1 près de $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$.

f est décroissante. Donc $S_n \leq I \leq s_n$

$$s_n - S_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) = \frac{1}{2n}$$

On encadre *I* par S_n et s_n avec *n* tel que $\frac{1}{2n} \leq 2.10^{-1}$; on prend ainsi $n = 3$.

$$s_3 = \frac{1}{3}\left(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) \right) = 0{,}94...$$

$$S_3 = s_3 - \frac{1}{6} = 0{,}77...$$

D'où $0{,}77 \leq I \leq 0{,}95$

Donc $I \approx 0{,}85$ à 10^{-1} près

ou $I \approx 0{,}8$ à 2.10^{-1} près.

F) Remarque

La théorie parle de $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ pour *f* continue sur $[a,b]$.

En pratique, on reconnaît le plus souvent $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n})$ où φ est continue sur $[0,1]$.

Et, en effet, $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = (b-a)\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n})$ avec :

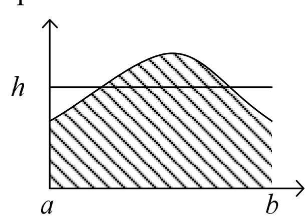
$$\varphi : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a + t(b-a)) \end{array}$$

VII Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue, avec $a < b$.

On définit la valeur moyenne de *f* sur $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Explication :



La valeur moyenne *h* de *f* sur $[a,b]$ est le réel *h* tel que l'aire hachurée soit l'aire correspondante pour la fonction constante égale à *h*.

Ou :

Soit $(a_0,...a_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$.

Moyenne arithmétique des $f(a_i), i \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\times \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)}_{\text{tend vers } \int_a^b f(t)dt}$$