Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ». https://www.immae.eu/cours/

# Chapitre 3 : Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

**Notations, Remarques :**

- Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $S$ un segment de $\mathbb{R}$.

  Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux (noté parfois c.p.m.)

  Alors $f$ est continue par morceaux sur tout segment contenu dans $S$ (évident).

  Pour $a$, $b$ de $I$, on note :

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[a,b]} f & \text{si } a > b \end{cases} \tag{3.1}$$

## I Premières propriétés

Ici, $a$ et $b$ désignent deux réels quelconques

### A) Positivité

**Proposition :**

Soit $f$ continue par morceaux sur $[a, b]$, avec $a \leqslant b$.

Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geqslant 0$.

**Démonstration :**

La fonction nulle appartient à $\mathscr{E}^-(f)$.

Or, par définition, $\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi, \varphi \in \mathscr{E}^-(f)\right\}$. Donc $\int_a^b f \geqslant \int_a^b 0 = 0$.

### B) Linéarité

**Proposition :**

Soient $f_1, f_2$ continues par morceaux sur un segment $[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \tag{3.2}$$

$$\int_a^b \lambda f_1 = \lambda \int_a^b f_1 \tag{3.3}$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$, définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, est linéaire (rappel : cet ensemble est un sev de $\mathscr{F}(\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}, \mathbb{R})$).

**Démonstration :**

- Dans le cas $a > b$
  - ◇ Preuve de (3.2). Soit $\varepsilon > 0$

    Il existe $\varphi_1 \in \mathscr{E}^-(f_1)$ et $\psi_1 \in \mathscr{E}^+(f_1)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon \leqslant \int_a^b \varphi_1 \leqslant \int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b \psi_1 \leqslant \left(\int_a^b f_1\right) + \varepsilon \tag{3.4}$$

    En effet :

$$\int_a^b f_1 = \sup\left\{\int_a^b \varphi, \varphi \in \mathscr{E}^-(f_1)\right\} \tag{3.5}$$

    Donc $\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\sup\left\{\int_a^b \varphi, \varphi \in \mathscr{E}^-(f_1)\right\}$. Il existe donc $\varphi_1 \in \mathscr{E}^-(f_1)$ tel que $\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_1$

    Et comme $\int_a^b f_1$ est un majorant de cet ensemble, on a $\int_a^b \varphi_1 \leqslant \int_a^b f_1$

    Mais, par ailleurs, $\int_a^b f_1 = \inf\left\{\int_a^b \psi, \psi \in \mathscr{E}^+(f_1)\right\}$. Donc en raisonnant de la même façon, on trouve les deux dernières inégalités de (3.4)

    De même, il existe $\varphi_2 \in \mathscr{E}^-(f_2)$ et $\psi_2 \in \mathscr{E}^+(f_2)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f_2\right) - \varepsilon \leqslant \int_a^b \varphi_2 \leqslant \int_a^b f_2 \leqslant \int_a^b \psi_2 \leqslant \left(\int_a^b f_2\right) + \varepsilon \tag{3.6}$$

    En sommant (3.4) et (3.6), on obtient alors :

$$\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 - 2\varepsilon \leqslant \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 \leqslant \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \leqslant \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 \leqslant \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + 2\varepsilon \tag{3.7}$$

    Par ailleurs :

    $\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escalier, et $\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f_1 + f_2$

    Donc $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathscr{E}^-(f_1 + f_2)$.

    De même, $\psi_1 + \psi_2 \in \mathscr{E}^+(f_1 + f_2)$

    Donc

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \int_a^b (f_1 + f_2) \leqslant \int_a^b (\psi_1 + \psi_2) \tag{3.8}$$

    En effet, $\int_a^b (f_1 + f_2)$ est la borne supérieure de l'ensemble des $\int_a^b \varphi$ pour $\varphi \in \mathscr{E}^-(f_1 + f_2)$ et la borne inférieure de l'ensemble des $\int_a^b \psi$ pour $\psi \in \mathscr{E}^+(f_1 + f_2)$.

    Or, comme $\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escaliers, $\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2$.

Il résulte alors de (3.7) et (3.8) que

$$\left|\int_a^b (f_1+f_2) - \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2\right| \leqslant 4\varepsilon \tag{3.9}$$

Enfin, comme c'est valable pour tout $\varepsilon$, on obtient, en le faisant tendre vers 0 :

$$\int_a^b (f_1+f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \tag{3.10}$$

**Remarque :**

Seule l'intégrabilité a ici été utilisée.

◇ Preuve de (3.3).

— Premier cas : $\lambda \geqslant 0$

Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\left(\int_a^b f_1\right) - \varepsilon \leqslant \int_a^b \varphi_1 \leqslant \int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b \psi_1 \leqslant \left(\int_a^b f_1\right) + \varepsilon \tag{3.11}$$

D'où $\lambda \int_a^b f_1 - \lambda\varepsilon \leqslant \lambda \int_a^b \varphi_1 \leqslant \lambda \int_a^b f_1 \leqslant \lambda \int_a^b \psi_1 \leqslant \lambda \int_a^b f_1 + \lambda\varepsilon$

Par ailleurs, $\lambda\varphi_1$ et $\lambda\psi_1$ sont en escalier et $\lambda\varphi_1 \leqslant \lambda f_1 \leqslant \lambda\psi_1$.

Donc $\lambda\varphi_1 \in \mathscr{E}^-(\lambda f_1)$ et $\lambda\psi_1 \in \mathscr{E}^+(\lambda f_1)$

Donc $\int_a^b \lambda\varphi_1 \leqslant \int_a^b \lambda f_1 \leqslant \int_a^b \lambda\psi_1$

Il en résulte que :

$\left|\int_a^b \lambda f_1 - \lambda \int_a^b f_1\right| \leqslant 2\varepsilon$ d'où le résultat cherché en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

— Deuxième cas : $\lambda < 0$, la démonstration est analogue en « retournant » les inégalités.

- Le cas où $a = b$ est immédiat.
- Le cas où $a > b$ peut être traité en écrivant les résultats montrés pour le cas où $a < b$ et en multipliant les inégalités par $-1$.

## C) Additivité par rapport aux intervalles, théorème de Chasles

**Théorème :**

Soit $S$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction définie sur $S$.

Alors, pour tous $a$, $b$, $c$ de $S$, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \tag{3.12}$$

**Démonstration :**

- Premier cas : si $a < c < b$

  Soit $\varepsilon > 0$.

  On note $\mathscr{E}^-(f)$ et $\mathscr{E}^+(f)$ les ensembles des fonctions $\varphi$ et $\psi$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$

  On introduit alors $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f\right) - \varepsilon \leqslant \int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \left(\int_a^b f\right) + \varepsilon \tag{3.13}$$

On a alors : $\int_a^c \varphi \leqslant \int_a^c f \leqslant \int_a^c \psi$.

En effet, $\varphi_{|[a,c]}$ est en escalier sur $[a, c]$

Et $\varphi_{|[a,c]} \leqslant f_{|[a,c]}$

D'où, d'après la définition de $\int_a^c f$, $\int_a^c \varphi \leqslant \int_a^c f$, et, de même, on montre la deuxième inégalité.

De même, on a aussi : $\int_c^b \varphi \leqslant \int_c^b f \leqslant \int_c^b \psi$

Ainsi, en sommant (et en prenant en compte les propriétés des fonctions en escalier) : $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^c f + \int_c^b f \leqslant \int_a^b \psi$

On montre ensuite le résultat de la même manière que dans les autres théorèmes.

- Pour les autres cas, on montre aisément le résultat grâce à celui-ci, par exemple :
  - ◇ Si $a = b < c$, immédiat...
  - ◇ Si $b < a < c$, alors $\int_b^a f = \int_b^c f + \int_c^a f$
    D'où $\int_b^a f = \int_b^c f - \int_a^c f$, soit $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

### D) Croissance

**Théorème :**
Si $f$, $g$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$ avec $a < b$, et si $f < g$, alors :

$$\int_a^b f < \int_a^b g \tag{3.14}$$

La démonstration est immédiate en utilisant la linéarité et la positivité.

## II Majorations, minorations d'intégrales

**Théorème :**
Soit $f$ continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, avec $a \leqslant b$.

(Alors $f$ est bornée sur $[a, b]$).

On a :

$$(b-a)\inf f \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)\sup f \tag{3.15}$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \tag{3.16}$$

**Démonstration (cas où $a = b$ évident) :**

- (3.15) $\inf f \leqslant f \leqslant \sup f$, donc, par croissance (puisque $a < b$) :
  $\int_a^b \inf f \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \sup f$, d'où l'inégalité (puisque $\inf f$ et $\sup f$ sont constantes)
- (3.16) On a : $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ Donc $\int_a^b -|f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$, soit $-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$, d'où le résultat (on utilise le fait que si $-A \leqslant X \leqslant A$, alors $|X| \leqslant A$)

**Conséquence :**

Si $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\inf_{x\in[a,b]}|f(x)| \tag{3.17}$$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{3.18}$$

Pour la dernière inégalité, on a en effet : $\forall x \in [a,b]\,, |f(x)g(x)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]}|g(t)| \times |f(x)|$, et la croissance de l'intégrale.

**Remarque à propos de la croissance**

- La théorie, c'est $f \leqslant g \implies \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
- En pratique, on utilise : $(\forall x \in [a,b]\,, f(x) \leqslant g(x)) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

On dit « intégrer une inégalité »

Dans les cas où $a > b$, en pratique, on « retourne » : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Il peut cependant être utile de savoir que $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right|$ (même quand $a \geqslant b$)

# III Considérations à propos de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

**Proposition :**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ qui ne diffèrent que sur un nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

**Démonstration :**

$f-g$ est une fonction en escalier dont l'intégrale est évidemment nulle. (car sa valeur constante sur chaque intervalle ouvert d'une subdivision subordonnée est nulle).

**Étude :**

Soit $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$ (et non continue)

Soit $\sigma = (\underset{a}{x_0}, x_1, \dots \underset{b}{x_n})$ une subdivision subordonnée à $f$.

On sait que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on peut introduire $f_i$, prolongement par continuité de $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ à $[x_{i-1},x_i]$.

Alors $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i$

Donc $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i$.

Ce qui ramène l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à une somme d'intégrales de fonctions continues sur des segments.

# IV Positivité stricte

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$ avec $a<b$.

Si $f$ est positive et non identiquement nulle, alors $\int_a^b f > 0$

**Remarque :**

c'est faux pour une fonction continue par morceaux et non continue.

**Démonstration :**

On se place dans les hypothèses du théorème : il existe alors $c \in [a,b]$ tel que $f(c)>0$.

Comme $f$ est continue en $c$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \underbrace{[a,b] \cap [c-\alpha, c+\alpha]}_{\substack{\text{segment du type } [c',c''] \\ \text{avec } a \leqslant c' < c'' \leqslant b}}, f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2} \tag{3.19}$$

Alors $\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c'} f}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{c'}^{c''} f}_{\geqslant (c''-c')\frac{f(c)}{2} > 0} + \underbrace{\int_{c''}^{b} f}_{\geqslant 0} > 0$

# V Inégalité de Cauchy–Schwartz pour les intégrales

Dans cette section, $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a<b$

## A) Un produit scalaire sur $\mathbb{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

(Rappel : $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev)

**Proposition :**

L'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \times g \end{array}$ est un produit scalaire.

**Démonstration :**

- Pour tous $f, f', g, g' \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b f(g+\lambda g') = \int_a^b fg + \lambda f g' = \int_a^b fg + \lambda \int_a^b fg' \tag{3.20}$$

et

$$\int_a^b (f+\lambda f')g = \int_a^b fg + \lambda f' g = \int_a^b fg + \lambda \int_a^b f'g \tag{3.21}$$

D'où la bilinéarité.

- Pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\int_a^b fg = \int_a^b gf \tag{3.22}$$

D'où la symétrie.

- Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :

  $\int_a^b f^2 \geqslant 0$ car $\forall x\,[a,b]\,, f(x)^2 \geqslant 0$ (d'où la positivité)

  Si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f^2 = 0$ (positivité stricte puisque $f^2$ est positive et continue)

  D'où $f = 0$

  L'application est donc bien définie–positive.

### B) Conséquence : inégalité de Cauchy–Schwartz

**Conséquence :**

Pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2 \tag{3.23}$$

Variante :

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2} \tag{3.24}$$

## VI Sommes de Riemann

Dans ce paragraphe, $a$ et $b$ désignent deux réels, avec $a < b$.

### A) Le théorème

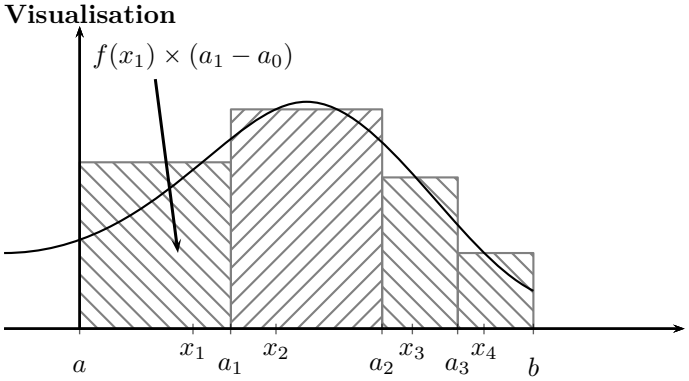
**Définition :**

Soit $f$ continue sur $[a,b]$, et $\sigma = (\underset{a}{a_0}, \dots \underset{b}{a_n})$ une subdivision de $[a,b]$.

Une somme de Riemann attachée à $f$ et $\sigma$, c'est une somme du type :

$S_{f,\sigma,x} = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(x_k)$, où $x = (x_1, \dots x_n)$ est une famille de points de $[a,b]$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k \in [a_{k-1}, a_k]$.

**Visualisation**




**Théorème :**

Soit $f$ continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision $\sigma$ de pas inférieur à $\alpha$ et toute somme de Riemann $S$ attachée à $f$ et $\sigma$, $|S - \int_a^b f| < \varepsilon$.

(Le pas d'une subdivision $\sigma = (a_0, \dots a_n)$ est la valeur de $\max_{i \in [\![1,n]\!]}(a_i - a_{i-1})$)

**Démonstration :**

Soit $\varepsilon > 0$.

On introduit alors $\alpha > 0$ tel que $\forall x, x' \in [a,b], (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$ (ce qui est possible car $f$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y est uniformément continue)

Soit $\sigma = (\underset{a}{a_0}, \dots \underset{b}{a_n})$ une subdivision de pas inférieur à $\alpha$.

Pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, on prend $x_k \in [a_{i-1}, a_i]$

Soit alors $S = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(x_k)$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \right| &= \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x_k)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(x_k)|\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pour tout $x \in [a_{k-1}, a_k]$, on a $|f(x) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$ puisque $|x - x_k| \leqslant a_k - a_{k-1} < \alpha$

Donc $\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \right| \leqslant \int_{a_{k-1}}^{a_k} \varepsilon\,\mathrm{d}x = (a_k - a_{k-1})\varepsilon$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left( \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \right) \right| \end{aligned} \tag{3.26}$$

D'où :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})\varepsilon = (b-a)\varepsilon \tag{3.27}$$

## B) Cas particulier : les sommes $S_n$, $s_n$, $M_n$

Soit $f$ continue sur $[a,b]$

On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \tag{3.28}$$

C'est-à-dire :

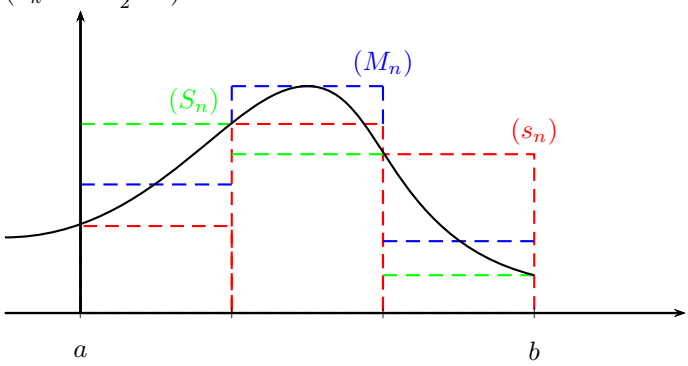
On prend pour $\sigma$ la subdivision régulière de $[a,b]$ en $n$ segments, et, en notant $\sigma = (a_0, \dots a_n)$, on prend les $x_k = a_k$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \tag{3.29}$$

(Même subdivision, mais $x_k = a_{k-1}$)

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (k - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right) \tag{3.30}$$

$(x_k = \frac{a_k + a_{k-1}}{2})$




**Théorème :**
Les suites $(S_n), (s_n), (M_n)$ convergent vers $\int_a^b f$.

**Démonstration :**
Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ comme dans le théorème précédent.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} < \alpha$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$, la subdivision régulière de $[a, b]$ en $n$ parties est de pas $\frac{b-a}{n} < \alpha$, donc $\left|s_n - \int_a^b f\right| < \varepsilon$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant N, \left|s_n - \int_a^b f\right| < \varepsilon$

(pour les autres suites remplacer simplement $s_n$)

**Exemple :**
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (pour $k \geqslant 1$). Montrer que $(u_n)$ converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$.

Les $\frac{k}{n}$ sont les points de la subdivision régulière de $[0, 1]$ en $n$ parties : on reconnaît alors une somme de Riemann :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.31}$$

$f$ étant continue sur $[0, 1]$, $u_n$ tend vers $\underbrace{\int_0^1 f}_{\ln 2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## C) Retour aux sommes de Riemann générales

**Majoration de l'erreur quand $f$ est lipschitzienne** On suppose ici l'existence de $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x, x' \in [a, b], |f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'| \tag{3.32}$$

Soit $S$ une somme de Riemann attachée à $f$ et $\sigma = (a_0, \ldots a_n)$ avec le choix $x = (x_1, \ldots x_n)$ des points $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$ . Majorons $|\int_a^b f - S|$

En reprenant la démonstration du A) :

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_k - a_{k-1})f(x_k)\right| &\leqslant \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(x_k)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M\int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - x_k|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M\int_{a_{k-1}}^{a_k} (a_k - a_{k-1})\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M(a_k - a_{k-1})^2 \\ &\leqslant M\delta^2\end{aligned} \tag{3.33}$$

Où on a noté $\delta$ le pas de la subdivision.

Ainsi, en continuant la démonstration comme au A) :

$$\left|\int_a^b f - S\right| \leqslant nM\delta^2 \tag{3.34}$$

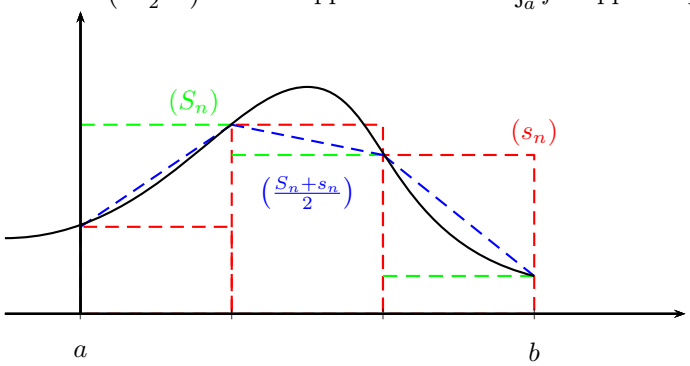
Ou, lorsque la subdivision est régulière :

$$\left|\int_a^b f - S\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{n} \tag{3.35}$$

## D) Remarque sur la méthode des trapèzes

Prendre $(S_n)$ ou $(s_n)$ comme approximation de $\int_a^b f$, c'est appliquer la méthode des rectangles. (pour $(M_n)$ aussi)

Prendre $\left(\frac{S_n+s_n}{2}\right)$ comme approximation de $\int_a^b f$ s'appelle appliquer la méthode des trapèzes :




## E) Cas où $f$ est monotone (et toujours continue)

Supposons $f$ croissante ; alors, en notant toujours $(a_0, \dots a_n)$ la subdivision régulière de $[a, b]$ en $n$ parties : $\forall x \in [a_{k-1}, a_k]\,, f(a_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(a_k)$

Donc

$$\underbrace{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_{k-1})\,\mathrm{d}x}_{(a_k-a_{k-1})f(a_{k-1})} \leqslant \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_k)\,\mathrm{d}x}_{(a_k-a_{k-1})f(a_k)} \tag{3.36}$$

D'où, en sommant :

$$s_n \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_n \tag{3.37}$$

Il en est de même quand $f$ est décroissante (en retournant les inégalités)

**Application :**

$$\left|\int_a^b f - S_n\right| \leqslant |S_n - s_n| \tag{3.38}$$

$$\left|\int_a^b f - s_n\right| \leqslant |S_n - s_n| \tag{3.39}$$

$$S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \tag{3.40}$$

**Exemple numérique** Donner une approximation à $2 \times 10^{-1}$ près de $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

On note $f\colon x \to \dfrac{1}{1+x^4}$.

$f$ est décroissante. Donc $S_n \leqslant I \leqslant s_n$

$$s_n - S_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) = \frac{1}{2n} \tag{3.41}$$

On encadre $I$ par $S_n$ et $s_n$ avec $n$ tel que $\frac{1}{2n} \leqslant 2 \times 10^{-1}$ ; on prend ainsi $n = 3$.

$$s_3 = \frac{1}{3}\left(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\right) = 0.94\ldots \tag{3.42}$$

$$S_3 = s_3 - \frac{1}{6} = 0.77\ldots \tag{3.43}$$

D'où $0.77 \leqslant I \leqslant 0.95$

Donc $I \approx 0.85$ à $10^{-1}$ près

ou $I \approx 0.8$ à $2 \times 10^{-1}$ près.

### F) Remarque

La théorie parle de $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ pour $f$ continue sur $[a, b]$.

En pratique, on reconnaît le plus souvent $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{k}{n})$ où $\varphi$ est continue sur $[0, 1]$.

Et, en effet, $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = (b-a) \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{k}{n})$ avec :

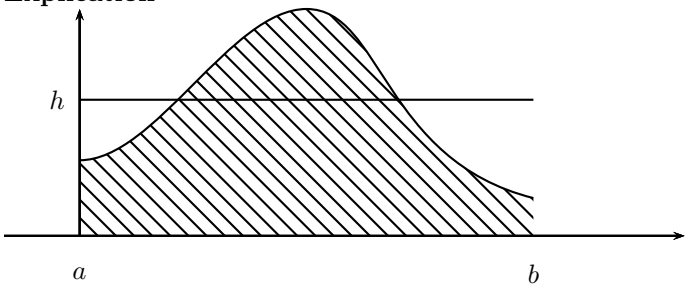
$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a + t(b-a)) \end{array} \tag{3.44}$$

## VII Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, avec $a < b$.

On définit la valeur moyenne de $f$ sur $[a, b]$ : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

**Explication**




La valeur moyenne $h$ de $f$ sur $[a, b]$ est le réel $h$ tel que l'aire hachurée soit l'aire correspondante pour la fonction constante égale à $h$. Ou :

Soit $(a_0, \dots a_n)$ la subdivision régulière de $[a, b]$. Moyenne arithmétique des $f(a_i), i \in [\![1, n]\!]$ :

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n} = \underbrace{\frac{1}{b-a} \times \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k)}_{\text{tend vers } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} \tag{3.45}$$