Chapitre 4 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment et dérivation

I Le résultat fondamental

A) Théorème

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in I$.

Alors l'application $\begin{array}{l} F: I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{array}$ (qui est bien définie sur I car $\forall x \in I$, $\underset{\leftrightarrow}{[a,x]} \subset I$, et donc f est continue sur ce segment) est dérivable de dérivée f.

Démonstration :

Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Pour cela, étudions $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$, de manière à montrer que cela tend vers 0 quand x tend vers x_0.

$$\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \underset{\to 0}{\varepsilon(x)}\right)$$

Pour cela, étudions $F(x)-F(x_0)-(x-x_0)f(x_0)$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned}
|F(x)-F(x_0)-(x-x_0)f(x_0)| &= \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - (x-x_0)f(x_0)\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^x f(t)dt - (x-x_0)f(x_0)\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right| \\
&\leq \begin{cases} \int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt \leq (x-x_0) \sup\limits_{t\in[x_0,x]} |f(t)-f(x_0)| \text{ si } x \geq x_0 \\ \int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0)|dt \leq (x_0-x) \sup\limits_{t\in[x,x_0]} |f(t)-f(x_0)| \text{ si } x \leq x_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans les deux cas : $|F(x)-F(x_0)-(x-x_0)f(x_0)| \leq |x_0-x| \sup\limits_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t)-f(x_0)|$

Donc $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \sup\limits_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t)-f(x_0)|$

Or, $\sup\limits_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t)-f(x_0)| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. En effet :

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ (α existe car f est continue en x_0). Alors, pour $x \in I$ tel que $|x-x_0| < \alpha$, on a $\forall t \in \underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}$, $|x_0 - t| < \alpha$.

Donc $\forall t \in [x, x_0]_{\leftrightarrow}$, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Donc $\sup\limits_{t \in [x, x_0]_{\leftrightarrow}} |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, soit $\left| \sup\limits_{t \in [x, x_0]_{\leftrightarrow}} |f(t) - f(x_0)| \right| \leq \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \left(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left| \sup\limits_{t \in [x, x_0]_{\leftrightarrow}} |f(t) - f(x_0)| \right| \leq \varepsilon \right)$, ce qui montre la limite voulue.

D'où on tire alors le résultat voulu.

B) Remarques

Soit f une fonction définie sur I, où I est un intervalle. On suppose f non continue, mais cependant continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.

Alors, pour tout $a \in I$, $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est parfaitement définie car f est continue par morceaux sur le segment $[a, x]_{\leftrightarrow}$.

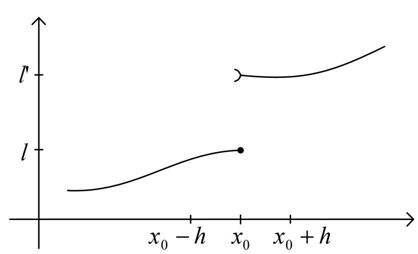
- Elle est continue :

Soit $x_0 \in I$, $h > 0$. Soit $S = [x_0 - h, x_0 + h] \cap I$. Pour tout $x \in S$, on a :

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq |x_0 - x| \sup_{t \in S} |f(t)|$$

Donc F est lipschitzienne sur S, donc sur un voisinage de x_0. Donc F est continue en x_0.

- De plus, la démonstration précédente montre que F est dérivable en tout $x_0 \in I$ où f est continue.
- En revanche, F n'est pas dérivable en un x_0 où f n'est pas continue. Exemple :



f étant continue par morceaux sur un segment contenant x_0, elle admet une limite finie à $\begin{cases} \text{droite en } x_0 \text{, disons } l' \\ \text{gauche en } x_0 \text{, disons } l \end{cases}$

En se plaçant dans le cas de la figure :

F est dérivable de dérivée f sur $]x_0 - h, x_0[$, mais aussi sur $]x_0, x_0 + h[$.

Si F était dérivable en x_0, le théorème sans nom dirait :

$\underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F'(x)}_{l} = F'(x_0) = \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F'(x)}_{l'}$, d'où contradiction.

C) Conséquence du théorème

Théorème :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors :
(1) f admet des primitives sur I.
(2) Si G est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont exactement les $G+\text{cte}$
(3) Pour tout $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
(4) Si G est une primitive de f, alors, pour tout $a, b \in I$, on a :
$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$, noté $[G(t)]_a^b$

Démonstration :

(1) Voir théorème : si on se donne $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.

(2) Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors :
$\forall t \in I, F'(t) = G'(t)$, donc $\forall t \in I, (F-G)'(t) = 0$. Donc $F - G = \text{cte}$ car I est un intervalle. Inversement, si G est une primitive, alors $G+\text{cte}$ en est aussi une

(3) $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive, elle est nulle en a, et c'est la seule d'après (2).

(4) Soit G une primitive de f. Alors la fonction $F : t \mapsto G(t) - G(a)$ est une primitive de f qui s'annule en a. Alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) - G(a)$

D) Exercices d'application

- Soit $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$. Alors, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{-x^2}$. D'où étude (en exercice)…
- Soit $\phi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t-1} dt$.

- Déjà, $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t-1} dt$ a un sens lorsque $f : t \mapsto \frac{e^t}{t-1}$ est définie et continue (intégrable suffit mais ici c'est pareil…) sur le segment $\underset{\leftrightarrow}{[x, x^2]}$, c'est-à-dire lorsque 1 n'appartient pas au segment $\underset{\leftrightarrow}{[x, x^2]}$, c'est-à-dire lorsque $x > 1$ ou $-1 < x < 1$. Ainsi, le domaine de définition de ϕ est $D =]-1, +\infty[\setminus \{1\}$
- Justifier que ϕ est dérivable sur D, donner $\phi'(x)$:
  - Dérivabilité sur $]1, +\infty[$:

    f est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Donc elle y admet une primitive, disons F. Alors $\forall x \in]1, +\infty[, \phi(x) = F(x^2) - F(x)$ ((4) du théorème précédent). Donc ϕ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x \in]1, +\infty[$:

    $$\phi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{x^2-1} - \frac{e^x}{x-1}$$

- Dérivabilité sur $]-1,1[$: analogue.

E) Les choses fausses

- f intégrable sur un segment $[a,b] \not\Rightarrow f$ admet une primitive sur $[a,b]$
- f admet une primitive sur $[a,b] \not\Rightarrow f$ est intégrable sur $[a,b]$

Exemples :

- Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (mais pas continue)

Alors f est intégrable sur $[a,b]$, mais n'admet pas de primitive sur $[a,b]$:

Si F en était une, il y aurait contradiction avec le théorème sans nom pour $F'(c)$ où c est un point de discontinuité.

- Considérons $F : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Alors F est dérivable sur $]0,1]$, et :

$\forall x \in]0,1], F'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}x^2\cos\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

De plus, pour tout $x \in]0,1]$: $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = x\sin\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$

La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0,1]$. Elle y admet donc une primitive G. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} = G'(x) - F'(x)$

La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ admet donc une primitive sur $[0,1]$ (à savoir $G - F$), mais elle n'est pas intégrable car non bornée.

(Remarque : elle n'est pas continue en 0, ni continue par morceaux sur $[0,1]$ car, en 0, il n'y a pas de limite finie à droite)

- On rappelle aussi que pour f continue sur D, si F est une primitive de f sur D, il est faux en général que les primitives de f sur D sont les $F + \text{cte}$ (car D n'est pas forcément un intervalle)

II Tableau des primitives usuelles

Tableau donnant la valeur en x d'une primitive F pour une fonction f continue sur un intervalle I :

f	I	F
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cte}$
$x \mapsto x^{-n}, n \geq 2$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + \text{cte}$
$x \mapsto x^{-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_-^*$	$\left.\begin{array}{l} x \mapsto \ln x + \text{cte} \\ x \mapsto \ln(-x) + \text{cte} \end{array}\right\} x \mapsto \ln\lvert x\rvert + \text{cte}$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{-\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cte}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + \text{cte}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + \text{cte}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + \text{cte}$
$x \mapsto \text{ch}\, x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{sh}\, x + \text{cte}$
$x \mapsto \text{sh}\, x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{ch}\, x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{Arctan}\, x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$x \mapsto \text{Arcsin}\, x + \text{cte}$ ou $x \mapsto -\text{Arccos}\, x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{Argsh}\, x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$ $]-\infty,-1[$	$x \mapsto \text{Argch}\, x + \text{cte}$ $x \mapsto -\text{Argch}(-x) + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$]-\infty,-1[,]-1,1[,]1,+\infty[$ $]-1,1[$ $]1,+\infty[,]-\infty,-1[$	$x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\lvert 1-x\rvert + \dfrac{1}{2}\ln\lvert 1+x\rvert + \text{cte}$ $x \mapsto \text{Argth}\, x + \text{cte}$ $x \mapsto \text{Argcoth}\, x + \text{cte}$
$x \mapsto \tan x$	$I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert + \text{cte}$

III Intégration par parties

A) Théorème

Théorème :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a, b]$.

Alors $\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Démonstration :

$t \mapsto f(t)g'(t)$ et $t \mapsto f'(t)g(t)$ sont continues sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, donc déjà les deux intégrales on un sens. De plus, une primitive de la fonction $t \mapsto f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$ (continue) est $t \mapsto f(t)g(t)$. Donc $\int_a^b (f(t)g'(t)+f'(t)g(t))dt = [f(t)g(t)]_a^b$

D'où le résultat par linéarité.

B) Exemples pratiques

- $\displaystyle\int_0^1 \text{Arctan}\, t\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{intégration par parties} \\ f(t)=\text{Arctan}\,t \quad f'(t)=\frac{1}{t^2+1} \\ g'(t)=1 \quad g(t)=t}}{=} [t\text{Arctan}\, t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

Remarque : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a de même :

$$\int_0^x \text{Arctan}\, t\, dt = x\text{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \underbrace{\text{cte}}_{=0}$$

Or, $x \mapsto \int_0^x \text{Arctan}\, t\, dt$ est une primitive de la fonction continue Arctan. Ainsi, une primitive de Arctan est $x \mapsto x\text{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

On trouve parfois (mais il faut éviter de l'utiliser) la notation :

$$\underbrace{\int \text{Arctan}\, x\, dx}_{\text{intégrale indéfinie}} = x\text{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{cte}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_1^x \ln t dt \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)=\ln t \quad f'(t)=\frac{1}{t} \\ g'(t)=1 \quad g(t)=t}}{=} [t\ln t]_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - x + 1$

Ainsi, une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x\ln x - x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voire même $\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$) :

$$\int_1^x t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}dt = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \underbrace{\text{cte}}_{\frac{1}{(n+1)^2}}$$

pour $n=-1$:

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = [\ln^2 t]_1^x - \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \text{, d'où } \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$

Alors :

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x t^{n+1}e^t dt = [t^{n+1}e^t]_0^x - (n+1)\int_0^x t^n e^t dt = x^{n+1}e^x - (n+1)I_n(x)$$

- $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x dx = [-x^2\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x dx$

et $\int_0^\pi 2x\cos x dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = [\cos x]_0^\pi$. Donc $\int_0^\pi x^2\sin x dx = \pi^2 - 4$

C) Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème :
Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.
Soit *f* de classe C^{n+1} sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$.
Alors :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)dx$$

Démonstration : par récurrence sur *n*.
Pour $n=0$: le théorème dit que pour *f* de classe C^1 sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$:

$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(t)dt$. Ok

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons le théorème vrai pour *n*.
Déjà, *f* est de classe C^{n+1}, donc :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\underbrace{\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(a)dx}_{R_n}$$

Or, $R_n=\underbrace{\left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b}_{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)}-\int_a^b\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$

Ce qui achève la récurrence.

Intérêt de la formule : très simple à démontrer par rapport aux autres.

IV Changement de variable

A) Le théorème

Théorème :
Soient $a,b\in\mathbb{R}$.
Soit $\varphi:\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}\to\mathbb{R}$ de classe C^1.
Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* contenant $\varphi(\underset{\leftrightarrow}{[a,b]})$ (et à valeurs réelles)

Alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx$

On dit qu'on a fait le changement de variable $\begin{cases} x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{cases}$

Démonstration :

- La fonction $t\mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$.

En effet, φ est de classe C^1 sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, et *f* est continue sur *I*, contenant $\varphi(\underset{\leftrightarrow}{[a,b]})$.

Donc $f\circ\varphi$ est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$.

Enfin, φ est de classe C^1 sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, donc φ' est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$.

Donc, par produit, $t\mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$.

- La fonction *f* est continue sur *I*. Elle y admet donc une primitive *F*.

Alors $t\mapsto F(\varphi(t))$ est dérivable sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, de dérivée $t\mapsto F'(\varphi(t))\varphi'(t)$, soit $t\mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$

- Ainsi, la fonction continue $t\mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ admet la primitive $t\mapsto F(\varphi(t))$.

Donc $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\left[F(\varphi(t))\right]_a^b$

- Or, $\left[F(\varphi(t))\right]_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))=\left[F(t)\right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx$.

(Puisque *f* est continue sur *I*, qui contient $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et *F* en est une primitive)

B) Exemples

- $\displaystyle\int_0^{\pi}2t\sin(t^2)dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{changement de variable}\\ x=t^2\\ dx=2tdt}}{=} \int_0^{\pi^2}\sin x dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi^2}=1-\cos(\pi^2)$

- $\displaystyle\int_1^2 t^3\ln(1+t^4)dt \underset{\substack{\uparrow\\ x=1+t^4\\ dx=4t^3dt}}{=} \frac{1}{4}\int_2^{17}\ln x dx=\frac{1}{4}\left[x\ln x-x\right]_2^{17}=\frac{1}{4}(17\ln 17-17-2\ln 2+2)$

- $\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt \underset{\substack{\uparrow\\ u=\ln t\\ du=\frac{t}{t}dt}}{=} \int_0^{\ln x}udu=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\ln x}=\frac{1}{2}\ln^2 x$

- $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt \underset{\substack{\uparrow\\ t=\cos\theta\\ dt=-\sin\theta d\theta\\ \text{pour }\theta=\frac{\pi}{2},t=0\\ \text{pour }\theta=0,t=1}}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sqrt{\sin^2\theta}}_{\substack{+\sin\theta\\ \text{pour }\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}}\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{4}$

(dans ce dernier, on va « de droite à gauche », contrairement aux autres exemples.)

Ici, $\varphi:\theta\mapsto\cos\theta$ (de classe C^1 sur $\mathbb{R}$), $f:t\mapsto\sqrt{1-t^2}$ (continue sur $[-1,1]$)

Remarque : on pouvait voir que $\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$ correspond aussi à $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle trigonométrique…

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{2+\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\frac{\theta}{2})d\theta}{3+\tan^2\frac{\theta}{2}} \underset{\substack{\uparrow\\ t=\tan\frac{\theta}{2}\\ dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})d\theta}}{=} 2\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \underset{\substack{\uparrow\\ u=t/\sqrt{3}\\ du=dt/\sqrt{3}}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}(1/\sqrt{3})$$

Variante : on peut faire aussi plutôt le changement de variable :

$$\begin{cases} \theta = 2\operatorname{Arctan} t \\ \mathrm{d}\theta = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

(on a $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; pour $t=0,\ \theta=0$, pour $t=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \dots$$

C) Application aux fonctions paires, impaires, périodiques

Proposition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et symétrique par rapport à 0.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

Si f est paire, alors $\forall x \in I, \int_0^x f(t)dt = -\int_0^{-x} f(t)dt$ (et $\int_{-x}^x f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$)

Si f est impaire, alors $\forall x \in I, \int_0^x f(t)dt = \int_0^{-x} f(t)dt$ (et $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$)

Démonstration :

Pour tout $x \in I$, on a :

$\int_0^{-x} f(t)dt \underset{\substack{\uparrow \\ u=-t \\ du=-dt}}{=} \int_0^x -f(-u)du$, et on obtient le résultat voulu dans les deux cas.

Proposition :

Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue. Alors :

(1) pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

(L'intégrale de f est invariante par translation de vecteur T de l'intervalle d'intégration)

(2) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

(L'intégrale de f sur un segment d'amplitude T ne dépend pas de ce segment)

Démonstration :

(1) On fait le changement de variable $u = t+T$ ($du = dt$)

(2) Relation de Chasles : $\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \underbrace{\int_T^{a+T} f}_{=\int_0^a f} = \int_0^T f$

Application :

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} + \underbrace{\int_{\pi}^{3\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}}_{\substack{=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} \\ \text{car } \theta\mapsto\frac{1}{2+\cos\theta} \text{ est} \\ 2\pi\text{-périodique}}} = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \theta\mapsto\frac{1}{2+\cos\theta} \\ \text{est paire}}}{=} 4\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

Et : $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \lim_{\substack{a\to\pi \\ a<\pi}} \int_0^{a} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ car $x \mapsto \int_0^{x} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ est continue, (et même dérivable)

Pour tout $a \in [0,\pi[$:

$$\int_0^{a} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 2\int_0^{\tan\frac{a}{2}} \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{a}{2}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{a}{2}}{3}\right) \xrightarrow[a\to\pi]{} \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

Donc $\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

V Un théorème de la moyenne

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue.

Alors il existe $c \in [a,b]$ (et même $]a,b[$ si $a \neq b$) tel que :

$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$.

Démonstration :

C'est le théorème des accroissements finis appliqué à une primitive de F de la fonction continue f.

(Le théorème est hors programme, il faut donc le redémontrer à chaque fois…)

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est une valeur atteinte (d'où le nom du théorème). Attention, ce théorème ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$!