Chapitre 5 : Intégration sur un segment de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

I Intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle infini de $\mathbb{R}$, a et b deux réels, et on convient que si $a > b$, la notation $[a,b]$ désigne le segment $[b,a]$.

A) Notations et rappels

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction (dite « complexe, d'une variable réelle »)

Soient $\text{Re} f$ et $\text{Im} f$ les parties réelles et imaginaires de f (c'est-à-dire les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in I, f(x) = \text{Re}(f(x)) + i\,\text{Im}(f(x))$)

On rappelle que f est continue sur I si et seulement si $\text{Re} f$ et $\text{Im} f$ sont continues sur I.

On notera de plus $\overline{f}$ et $|f|$ les fonctions définies sur I par : $\forall x \in I, \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ et $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$. Bien entendu, si f est continue sur I, alors $\overline{f}$ et $|f|$ le sont aussi.

B) Fonctions continues par morceaux sur un segment

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

- f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$
- f a une limite (dans $\mathbb{C}$) à droite en x_{i-1}
- f a une limite (dans $\mathbb{C}$) à gauche en x_i

(C'est la définition analogue à celle qui concerne les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

On prouve immédiatement que, pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$:

f continue par morceaux $\Leftrightarrow$ $\text{Re} f$ et $\text{Im} f$ continues par morceaux.

Et donc, aisément :

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, alors les fonctions $\overline{f}$, $|f|$ $\lambda f + \mu g$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) sont aussi continues par morceaux.

C) Définition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, continue par morceaux. On peut définir :

$$\int_a^b f(t)dt \underset{\text{déf}}{=} \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

Remarque : s'il se trouve que f est à valeurs réelles, on retrouve bien l'intégrale de f sur $[a,b]$ au sens du chapitre précédent.

D) Premières propriétés

En utilisant la définition et les propriétés des intégrales des fonctions réelles, on établit aisément les propriétés suivantes :

1) Linéarité

Si f et g sont deux fonctions complexes continues par morceaux sur $[a,b]$, alors pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$:

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt$$

Remarque : la relation de définition du C) peut maintenant être vue comme une conséquence de la linéarité.

2) Conjugaison

Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux : $\int_a^b \overline{f}(t)dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}$

3) Chasles

Si f est une fonction complexe continue par morceaux sur un segment contenant a, b, c :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

4) Fonctions « presque partout égales »

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et si f et g ne diffèrent que sur un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

Il en résulte, comme pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, que le calcul de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux se ramène au calcul d'une somme d'intégrales de fonctions continues.

5) Majoration du module

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, continue par morceaux.

Si $a\leq b$, alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\int_a^b |f(t)|dt$

Démonstration :

Posons $\int_a^b f(t)dt = re^{i\theta}$, avec $(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ (alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = r$)

Alors :

$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt$

Soient u et v les parties réelles et imaginaires de la fonction $t\mapsto e^{-i\theta}f(t)$.

Alors $\underbrace{r}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\int_a^b u(t)dt}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\int_a^b v(t)dt}_{\in\mathbb{R}}$. Donc $\int_a^b v(t)dt = 0$ et $\int_a^b u(t)dt = r$.

Or, pour tout $t\in[a,b]$, $u(t)\leq|u(t)+iv(t)| = |e^{-i\theta}f(t)| = |f(t)|$

Donc $r = \int_a^b u(t)\leq\int_a^b |f(t)|dt$.

E) Intégrale d'une fonction continue et primitives

Rappels :

Soit $f:I\to\mathbb{C}$. Alors f est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables, et on a alors : $\forall x\in I, f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)$

Soit $f:I\to\mathbb{C}$, dérivable. Si $\forall x\in I, f'(x)=0$, alors $\exists k\in\mathbb{C}, \forall x\in I, f(x)=k$ (évident puisque $f'=0 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} f)' = (\operatorname{Im} f)' = 0$, et I est un intervalle)

Soit $f:I\to\mathbb{C}$. Une primitive de f (sur I) est une fonction $F:I\to\mathbb{C}$, dérivable, telle que $F'=f$. Si f admet une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensembles des fonctions $F+k$, k décrivant $\mathbb{C}$. (C'est un corollaire du point précédent)

Exemple :

Rappelons que pour $z=u+iv$ avec $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, on définit e^z par :

$e^z = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v)$

Soit $m\in\mathbb{C}$, et soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = e^{mx}$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = me^{mx}$.

En effet, si on pose $m=\alpha+i\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \\ &= e^{\alpha x}(\alpha e^{i\beta x} + \beta i e^{i\beta x}) = me^{mx} \end{aligned}$$

Il en résulte que si $m\in\mathbb{C}^*$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{m}e^{mx}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto e^{mx}$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, continue. Alors, pour tout $a \in I$:

La fonction $F : \begin{array}{l} I \to C \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{array}$ est dérivable, de dérivée *f*.

Conséquence 1 :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, continue. Alors *f* admet des primitives sur *I*, et, de plus, pour chaque $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de *f* sur *I* qui prenne la valeur 0 en *a*.

Conséquence 2 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, continue, et soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ (qu'on note $[F(x)]_a^b$)

Démonstration du théorème :

Avec les hypothèses du théorème, notons $f_1 = \operatorname{Re} f$ et $f_2 = \operatorname{Im} f$.

Alors, pour tout $x \in I$: $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x f_1(t)dt + i\int_a^x f_2(t)dt$, et on sait que les fonctions $x \mapsto \int_a^x f_1(t)dt$ et $x \mapsto \int_a^x f_2(t)dt$ sont dérivables sur *I*, de dérivées respectives f_1 et f_2 (puisque f_1 et f_2 sont continues), d'où le résultat.

Les conséquences du théorème se démontrent exactement comme dans le cas réel.

Application à la recherche de primitives des fonctions réelles.

Exemple :

Nous allons déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction réelle $x \mapsto e^{3x}\cos 2x$. On peut le faire à partir de deux intégrations par partie, mais on peut faire autrement :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x e^{3t}\cos 2t dt = \operatorname{Re}\left(\int_0^x e^{(3+2i)t}dt\right)$ (selon la définition du C)

Or, $\int_0^x e^{(3+2i)t}dt = \left[\frac{e^{(3+2i)t}}{3+2i}\right]_0^x = \frac{1}{3+2i}(e^{(3+2i)x} - 1) = \frac{3-2i}{13}(e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x) - 1)$

Donc $\int_0^x e^{3t}\cos 2t dt = \frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{3}{13}$

F) Intégration par parties

Rappel :

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$

Si *f* et *g* sont continues, alors fg est continue.

Si *f* et *g* sont dérivables, alors fg est dérivable, de dérivée $(fg)' = f'g + fg'$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite de classe C^n (sur *I*) lorsqu'elle est *n* fois dérivable sur *I* et lorsque sa dérivée *n*-ième est continue sur *I*.

On établit aisément que *f* est de classe C^n si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

De ces résultats, on tire immédiatement, comme dans le cas réel :

Théorème :

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Si f et g sont de classe C^1 sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Conséquence : Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n-1$)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est de classe C^n ($n \geq 1$) sur $[a,b]$:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx$$

(La démonstration est analogue à celle fait dans le cas réel : faire une récurrence)

Conséquence : Inégalité de Taylor-Lagrange (à l'ordre $n-1$)

Si f est de classe C^n ($n \geq 1$) sur $[a,b]$, et si M désigne un majorant du module de $f^{(n)}$ sur $[a,b]$ (il en existe car une fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée), alors :

$$\left| f(b) - \left(f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \right) \right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!}M$$

Démonstration :

Selon le théorème précédent, il suffit de montrer que :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx \right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!}M$$

- Si $a \leq b$, on a alors :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| dx$$

Or, pour tout $x \in [a,b]$, $\left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$

D'où, selon les résultats concernant les intégrales de fonctions réelles :

$$\int_a^b \left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| dx \leq M\int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = M\left[-\frac{(b-x)^n}{n!} \right]_a^b = M\frac{(b-a)^n}{n!}$$

- Si $b \leq a$, on procède de même en écrivant :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx \right| = \left| \int_b^a \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx \right|$$

et que, pour tout $x \in [a,b]$, $\left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| = \frac{(x-b)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(x)\right|$.

Remarque importante (rappel)

Pour $n = 1$, on obtient l'inégalité des accroissements finis, mais on rappelle que l'égalité des accroissements finis est fausse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:

Si $f(x) = x^2 + ix^3$ sur $[0,1]$, il n'existe pas de $c \in]0,1[$ tel que $f(1) - f(0) = (1-0)f'(c)$ car il faudrait que $1 + i = 2c + 3ic^2$, ce qui est impossible.

G) Changement de variable

Théorème :

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et soit $f : I \to \mathbb{C}$, continue, avec $\varphi([a,b]) \subset I$.

Alors $\int_a^b f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

La démonstration est analogue à celle faite dans le cas où *f* est à valeurs réelles, en utilisant bien sûr le fait que si $F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de *f* sur *I*, alors $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall t \in [a,b], (F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$

H) Remarque importante pour finir

De même que l'égalité des accroissements finis est fausse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, le théorème de la moyenne est faux aussi pour *f* à valeurs dans $\mathbb{C}$. (même exemple que pour l'égalité des accroissements finis)

II Intégration des fonctions rationnelles (à coefficients dans $\mathbb{C}$)

A) Méthode générale

Rappel :

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, admettant des pôles complexes $a_1, a_2, \ldots a_p$ avec les multiplicités $n_1, n_2, \ldots n_p$. Alors *F* se décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - a_i)^j} \right)$$

Où *E* est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ (qui est la partie entière de *F*), et où les $\lambda_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

Soit maintenant *I* un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun pôle de *F*. Pour trouver une primitive de $t \mapsto F(t)$ sur *I*, on est donc ramené à la recherche de primitives des fonctions polynôme et des fonctions du type $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$, où $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$.

- Cas des fonctions polynomiales : évident
- Cas de $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$, où $n \geq 2$:

Soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas *a*.

Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$ admet sur *I* la primitive $t \mapsto \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(t-a)^{n-1}}$.

(La vérification est immédiate en dérivant…)

- Cas de $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ (Les logarithmes de complexes ne sont pas au programme !!)

- Si $a \in \mathbb{R}$, on sait que $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ admet sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ la primitive $t \mapsto \ln|t-a|$.

- Si $a \notin \mathbb{R}$, alors $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, et :

$\forall t \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{t-a} = \dfrac{t-\bar{a}}{(t-a)(t-\bar{a})} = \dfrac{t-\bar{a}}{t^2 - st + p}$ avec $s = a + \bar{a}$ et $p = a\bar{a}$.

Donc $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ et $s^2 - 4p < 0$.

On a aussi : $\forall t \in \mathbb{R}, \dfrac{t-\bar{a}}{t^2 - st + p} = \dfrac{\frac{1}{2}(2t-s) + \frac{s}{2} - \bar{a}}{t^2 - st + p}$.

Ainsi, une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t-s}{t^2 - st + p}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \ln(t^2 - st + p)$.

On doit donc maintenant trouver une primitive sur R de $t \mapsto \dfrac{\frac{s}{2} - \bar{a}}{t^2 - st + p}$.

On a, en mettant sous forme canonique : $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 - st + p = \left(t - \dfrac{s}{2}\right)^2 + p - \dfrac{s^2}{4}$

De plus, on a $p - \dfrac{s^2}{4} > 0$. On introduit alors $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $k^2 = p - \dfrac{s^2}{4}$.

Ainsi, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2 - st + p} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t - \frac{s}{2})^2 + k^2} \underset{\substack{\uparrow \\ u = \frac{1}{k}(t - \frac{s}{2}) \\ du = \frac{1}{k}dt}}{=} \int_{\frac{1}{k}(x_0 - \frac{s}{2})}^{\frac{1}{k}(x - \frac{s}{2})} \frac{k\,du}{k^2u^2 + k^2} = \frac{1}{k}\left[\operatorname{Arctan} u\right]_{\frac{1}{k}(x_0 - \frac{s}{2})}^{\frac{1}{k}(x - \frac{s}{2})}$$

Ainsi, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - st + p}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{k}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\mathrm{k}}(t - \dfrac{s}{2})\right)$

Finalement, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln(t^2 - st + p) + \left(\frac{s}{2} - \bar{a}\right)\frac{1}{\sqrt{p - \frac{s^2}{4}}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t - \frac{s}{2}}{\sqrt{p - \frac{s^2}{4}}}\right)$$

(Bien entendu, il vaut mieux retenir la méthode que la formule, surtout dans ce dernier cas… !)

B) Cas des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$.

D'abord, bien sûr, on sait faire, puisque c'est un cas particulier du A) : on décompose la fraction rationnelle dans $\mathbb{C}$ et on intègre…

On peut quand même remarquer que si $F \in \mathbb{R}(X)$, sa partie entière est à coefficients réels, les coefficients apparaissant dans les parties polaires relatives à des pôles réels sont réels (voir le cours sur les fractions rationnelles), et enfin les pôles complexes non réels sont conjugués deux à deux, avec les mêmes multiplicités, et si la partie polaire relative à un pôle $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est $\dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{(X-a)^n}$, alors celle relative à $\overline{a}$ est $\dfrac{\overline{\lambda_1}}{X-\overline{a}}+\dfrac{\overline{\lambda_2}}{(X-\overline{a})^2}+...+\dfrac{\overline{\lambda_n}}{(X-\overline{a})^n}$ (cela résulte du fait que pour tout $t\in\mathbb{R}$ non pôle de F, $\overline{F(t)}=F(t)$, puisque $F\in\mathbb{R}(X)$, et de l'unicité de la décomposition en éléments simples).

Ainsi, lorsqu'il apparaît un terme $\dfrac{\lambda}{X-a}$ (avec $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$), il apparaîtra aussi $\dfrac{\overline{\lambda}}{X-\overline{a}}$. Donc, au lieu d'intégrer séparément ces deux termes, on peut plutôt les regrouper :

$$\frac{\lambda}{X-a}+\frac{\overline{\lambda}}{X-\overline{a}}=\frac{(\lambda+\overline{\lambda})X-(\lambda\overline{a}+\overline{\lambda}a)}{X^2-(a+\overline{a})X+a\overline{a}}=\frac{\alpha X+\beta}{X^2-sX+p}$$

Où $\alpha,\beta,s,p\in\mathbb{R}$ et $s^2-4p<0$.

Ensuite, on intègre $t\mapsto\dfrac{\alpha t+\beta}{t^2-st+p}$ comme dans le cas complexe…

Cependant, regrouper les termes en $\dfrac{\lambda}{(X-a)^n}$ et $\dfrac{\overline{\lambda}}{(X-\overline{a})^n}$ pour $n\geq 2$ avant d'intégrer n'a aucun intérêt (on peut le faire après)

C) Exemples

- Déjà, il n'est pas toujours utile de décomposer systématiquement :

Une primitive de $t\mapsto\dfrac{15t^2+4t}{(5t^3+2t^2+1)^7}$ est $t\mapsto\dfrac{-1}{6}\dfrac{1}{(5t^3+2t^2+1)^6}$

- Recherche d'une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{t^2-1}$ sur $I=\left]-\infty,-1\right[,\left]1,+\infty\right[$ ou $\left]-1,1\right[$:

$\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X+1}\right)$, donc $\forall t\in I, \dfrac{1}{t^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}\right)$.

Ainsi, une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{t^2-1}$ sur I est $t\mapsto\dfrac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)$, soit aussi $t\mapsto\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$

- Recherche d'un primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{(t^3-1)^2}$ sur $I=\left]-\infty,1\right[$ ou $\left]1,+\infty\right[$:

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

La partie entière est nulle, et la décomposition est de la forme :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}=\frac{\alpha_1}{(X-1)}+\frac{\alpha_2}{(X-1)^2}+\frac{\beta_1}{(X-j)}+\frac{\beta_2}{(X-j)^2}+\frac{\gamma_1}{(X-j^2)}+\frac{\gamma_2}{(X-j^2)^2}\quad(1)$$

(En utilisant le fait que $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\dfrac{1}{(t^3-1)^2}$ est égal à son conjugué et l'unicité de la décomposition en éléments simples, on montre que $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R},\gamma_1=\overline{\beta_1},\gamma_2=\overline{\beta_2}$ mais on peut faire autrement dans ce cas)

En remplaçant X par jX , on obtient :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}=\frac{\alpha_1}{jX-1}+\frac{\alpha_2}{(jX-1)^2}+\frac{\beta_1}{jX-j}+\frac{\beta_2}{(jX-j)^2}+\frac{\gamma_1}{jX-j^2}+\frac{\gamma_2}{(jX-j^2)^2}$$

$$=\frac{j^2\alpha_1}{X-j^2}+\frac{j\alpha_2}{(X-j^2)^2}+\frac{j^2\beta_1}{X-1}+\frac{j\beta_2}{(X-1)^2}+\frac{j^2\gamma_1}{X-j}+\frac{j\gamma_2}{(X-j)^2}$$

Donc, par unicité de la décomposition en éléments simples :

$\gamma_1=j^2\alpha_1,\quad \gamma_2=j\alpha_2,\quad \beta_1=j^2\gamma_1=j\alpha_1,\quad \beta_2=j\gamma_2=j^2\alpha_2$

Il nous reste donc à trouver α_1,α_2

En multipliant (1) par $(X-1)^2$, on obtient :

$$\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\alpha_1(X-1)+\alpha_2+(X-1)^2G$$

Où G est une fraction rationnelle dont 1 n'est pas pôle.

En remplaçant X par 1, on obtient $\alpha_2=\frac{1}{9}$

En dérivant formellement cette dernière égalité, on a alors :

$$\frac{-2(2X+1)}{(X^2+X+1)^3}=\alpha_1+2(X-1)G+(X-1)^2G'$$

En prenant la valeur en 1, on a alors $\alpha_1=-\frac{2}{9}$.

Ainsi :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{-2}{(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-2j}{(X-j)}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{-2j^2}{(X-j^2)}+\frac{j}{(X-j^2)^2}\right)$$

En regroupant $\frac{j}{(X-j)}$ et $\frac{j^2}{(X-j^2)}$, on obtient :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{-2}{(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2X+4}{X^2+X+1}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}\right)$$

On a :

$$\frac{2X+4}{X^2+X+1}=\frac{2X+1}{X^2+X+1}+\frac{3}{X^2+X+1}$$

Et $\frac{1}{X^2+X+1}=\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

Or, pour tout $x_0,x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\underset{\substack{t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u\\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}du}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(x_0+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}\frac{du}{u^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}u\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}(x_0+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}.$$

Donc une primitive de $t\mapsto 3\times\frac{1}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $t\mapsto 2\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)$.

D'autre part, une primitive de $t\mapsto\frac{j^2}{(t-j)^2}+\frac{j}{(t-j^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$t\mapsto-\left(\frac{j^2}{t-j}+\frac{j}{t-j^2}\right)$, soit aussi $t\mapsto-\left(\frac{-t+1}{t^2+t+1}\right)$.

Ainsi, une primitive sur I de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^3-1)^2}$ est la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{9}\left(-2\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln(t^2+t+1) + 2\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right) + \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)$$

III Primitives des fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{\alpha t}P(t)$. f est continue sur $\mathbb{R}$; cherchons une primitive de f.

Etude :

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, quelconque, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = e^{\alpha t}Q(t)$.

Alors g est dérivable, et $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = e^{\alpha t}(\alpha Q(t) + Q'(t))$.

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} g' = f &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha Q(t) + Q'(t) = P(t) \\ &\Leftrightarrow \alpha Q + Q' = P \end{aligned}$$

(La deuxième équivalence se justifie par le fait que deux polynômes qui coïncident sur une infinité de valeurs sont égaux)

Un peu d'algèbre :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \le n$

Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X] \\ \quad Q \mapsto \alpha Q + Q' \end{array}$

(la définition a bien un sens car si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $\alpha Q + Q' \in \mathbb{C}_n[X]$)

Alors φ est linéaire (vérification immédiate), et comme $\alpha \neq 0$, on remarque que :

$\forall Q \in \mathbb{C}_n[X], \deg(\varphi(Q)) = \deg(Q)$

Ainsi, φ est injective (puisque $\varphi(Q) = 0 \Rightarrow \deg(\varphi(Q)) = -\infty = \deg(Q) \Rightarrow Q = 0$)

Comme φ est un endomorphisme en dimension finie, φ est bijective.

Ainsi, il existe un unique $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\alpha Q + Q' = P$, et on a même $\deg P \le \deg Q$

Conclusion :

Les primitives de $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \mapsto e^{\alpha t}Q(t) + \text{cte}$, où Q est un certain polynôme de même degré que P (on l'obtient par identification)

Ce résultat est faux pour $\alpha = 0$ (en particulier parce que Q est de même degré que P)

Intérêt :

On peut ainsi obtenir les primitives des fonctions réelles de la forme :

$t \mapsto e^{\alpha t}P(t)\cos(\omega t)$ et $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)\sin(\omega t)$ (où $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$).

Exemple :

Recherche de primitives de $f_1 : t \mapsto e^t(t^2+1)\cos(2t)$ et $f_2 : t \mapsto e^t(t^2+1)\sin(2t)$

Soit $f = f_1 + if_2$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{(1+2i)t}(t^2+1)$, et si F est une primitive de f, alors $\operatorname{Re} F$ est une primitive de f_1 et $\operatorname{Im} F$ une primitive de f_2.

On cherche F sous la forme $F(t)=e^{(1+2i)t}(\alpha t^2+\beta t+\gamma)$

Alors $\forall t\in\mathbb{R}, F'(t)=e^{(1+2i)t}((1+2i)(\alpha t^2+\beta t+\gamma)+(2\alpha t+\beta))$

Donc $F'=f \Leftrightarrow \alpha(1+2i)=1$ et $\beta(1+2i)+2\alpha=0$ et $\gamma(1+2i)+\beta=1$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{1+2i} \text{ et } \beta=\frac{-2\alpha}{1+2i} \text{ et } \gamma=\frac{1}{1+2i}(1-\beta)$$

D'où, après calculs, on obtient qu'une primitive de f est F donnée par :

$$\forall t\in\mathbb{R}, F(t)=\frac{1}{125}e^{(1+2i)t}\left(25(1-2i)t^2+10(3+4i)t+(3-46i)\right)$$

Ainsi :

$$\forall t\in\mathbb{R}, f_1(t)=\mathrm{Re}(F(t))=\frac{1}{125}e^{t}\left((25t^2+30t+3)\cos(2t)-(-50t^2+40t-46)\sin(2t)\right)$$

$$\forall t\in\mathbb{R}, f_2(t)=\mathrm{Im}(F(t))=\frac{1}{125}e^{t}\left((25t^2+30t+3)\sin(2t)+(-50t^2+40t-46)\cos(2t)\right)$$

IV Complément : règle de Bioche

On cherche l'intégrale d'une fraction rationnelle F en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ($\int_a^b F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$)

Si $F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ (attention au $d\theta$!) est inchangé par $\theta\mapsto-\theta$, faire le changement de variable $u=\cos\theta$ peut être utile pour calculer l'intégrale.

Si c'est inchangé par $\theta\mapsto\pi-\theta$, faire le changement de variable $u=\sin\theta$

Si c'est inchangé par $\theta\mapsto\pi+\theta$, faire le changement de variable $u=\tan\theta$