

Chapitre 7 : Coniques

\mathfrak{P} désigne ici un plan affine euclidien de dimension 2.

I Ellipses, hyperboles, paraboles

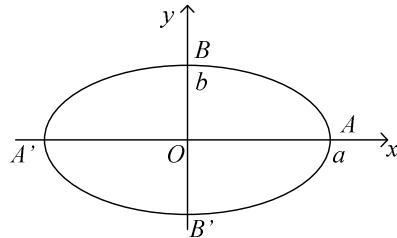
A) Ellipse

C'est une courbe admettant, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , une équation du type $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \geq b$.

Paramétrage classique :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, \theta \in [-\pi, \pi]$$

Tracé :



Vocabulaire :

A, B, A', B' sont appelés les sommets, O le centre.

(AA') est le grand axe, (BB') le petit axe.

a est la longueur du $\frac{1}{2}$ grand axe, b la longueur du $\frac{1}{2}$ petit axe.

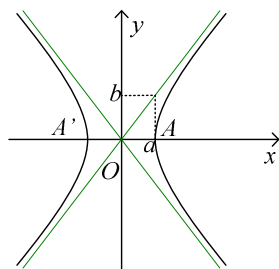
B) Hyperbole

C'est une courbe admettant dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) une équation du type $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Paramétrage classique :

$$\text{Branche des } x \geq 0 : \begin{cases} x = a \cdot \text{ch } t \\ y = b \cdot \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R} . \text{ Branche des } x \leq 0 : \begin{cases} x = -a \cdot \text{ch } t \\ y = b \cdot \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

Tracé :



Asymptotes : $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

Vocabulaire :

A et A' sont appelés les sommets de l'hyperbole, O son centre.

(AA') est l'axe transverse.

Cas particulier :

Lorsque les asymptotes sont orthogonales (c'est-à-dire lorsque $a = b$), l'hyperbole est dite équilatère. Elle admet alors, dans un repère orthonormé dont les axes sont les asymptotes, une équation du type $xy = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$).

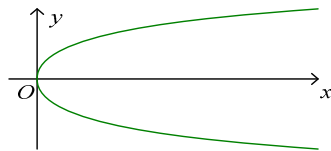
C) Parabole

C'est une courbe admettant dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) une équation du type $y^2 = 2px$ où $p \in \mathbb{R}^*$.

Un paramétrage évident :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, t \in \mathbb{R}. \\ y = t \end{cases}$$

Tracé :



Vocabulaire :

(Ox) est l'axe de la parabole

O son sommet, p le paramètre de la parabole.

II Définition générale, réduction de l'équation

A) Définition générale

Définition :

Soit C une partie du plan \mathfrak{P} . On dit que C est une conique lorsqu'il existe un repère \mathfrak{R} de \mathfrak{P} dans lequel C admet une équation du type $ax^2 + 2\gamma xy + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$, avec $(a, \gamma, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^6$ et $(a, \gamma, b) \neq (0, 0, 0)$.

Ainsi, si C est une conique, alors C admet dans tout repère de \mathfrak{P} une équation du même type.

En effet :

Supposons que C est une conique dans un repère $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathfrak{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ un autre repère de \mathfrak{P} . On note $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ la colonne de composantes

de O' dans \mathfrak{R} , $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ la matrice de passage de (\vec{i}, \vec{j}) à (\vec{i}', \vec{j}') .

Soit $M \in \mathfrak{P}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sa colonne de composantes dans \mathfrak{R} , $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sa colonne de composantes dans \mathfrak{R}' .

$$\text{On a alors } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ainsi, C a pour équation dans \mathfrak{R}' :

$$a(\alpha + a_{1,1}x' + a_{1,2}y')^2 + 2\gamma(\alpha + a_{1,1}x' + a_{1,2}y')(\beta + a_{2,1}x' + a_{2,2}y') + b(\beta + a_{2,1}x' + a_{2,2}y')^2 + 2c(\alpha + a_{1,1}x' + a_{1,2}y') + 2d(\beta + a_{2,1}x' + a_{2,2}y') + e = 0$$

Déjà, on voit immédiatement qu'en développant les produits on obtient bien la bonne forme.

Et les coefficients ne sont pas tous nuls, car sinon l'équation serait celle d'une droite (ou l'ensemble vide) dans le repère \mathfrak{R}' , et en repassant au repère \mathfrak{R} on obtiendrait toujours une droite, c'est-à-dire une équation du type $ax + by + c = 0$.

B) Première réduction de l'équation

Soit C une conique, et soit $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de \mathfrak{P} .

Alors, selon la définition et la remarque qui a suivi, C admet dans le repère \mathfrak{R} l'équation $ax^2 + 2\gamma xy + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ avec $(a, \gamma, b) \neq (0, 0, 0)$.

On cherche un autre repère orthonormé \mathfrak{R}' dans lequel l'équation de C n'a plus de terme en xy .

Déjà, il est clair que s'il existe un tel repère, on peut supposer qu'il a pour origine O et qu'il est déduit de \mathfrak{R} par rotation. En effet, si $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ convient, alors (O, \vec{I}, \vec{J}) convient aussi (On remarque en effet, dans le [A](#)), que si on fait uniquement un changement d'origine, c'est-à-dire que $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le coefficient de $x'y'$ dans l'équation de la conique dans \mathfrak{R}' est le même que celui de xy dans \mathfrak{R} , et (O, \vec{J}, \vec{I}) aussi, on peut donc supposer que (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{I}, \vec{J}) sont deux bases orthonormées de même sens, donc déduites l'une de l'autre par rotation.

On doit donc chercher $\theta \in \mathbb{R}$ tel que l'équation de C dans \mathfrak{R}' n'ait plus de termes en XY , \mathfrak{R}' étant le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) avec $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ comme matrice de passage de (\vec{i}, \vec{j}) à (\vec{I}, \vec{J}) .

$$\text{Si } M(x, y) \text{ dans } \mathfrak{R} \text{ et } M(X, Y) \text{ dans } \mathfrak{R}', \text{ on a : } \begin{cases} x = (\cos \theta)X - (\sin \theta)Y \\ y = (\sin \theta)X + (\cos \theta)Y \end{cases}$$

Donc l'équation de C dans \mathfrak{R}' est :

$$a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + 2\gamma(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) + b(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 + \dots = 0$$

Le terme en XY est : $-2a \cos \theta \sin \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + 2\gamma(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

Et il est nul si et seulement si : $2\gamma \cos(2\theta) + (b - a) \sin(2\theta) = 0$

Si $a = b$, on peut choisir $\theta = \frac{\pi}{4}$

Si $a \neq b$, on prend θ tel que $\tan(2\theta) = \frac{2\gamma}{a-b}$, par exemple $\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2\gamma}{a-b}\right)$

Conclusion :

Si C est une conique, alors il existe un repère orthonormé de \mathfrak{P} dans lequel l'équation de C est $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$

C) Nouvelles réductions de l'équation

Soit C une conique.

Selon ce qui précède, il existe un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'équation de C est $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$

- 1^{er} cas : si $ab \neq 0$

Alors l'équation peut s'écrire : $a(x + \frac{c}{a})^2 + b(y + \frac{d}{b})^2 + k = 0$,

Avec $k \in \mathbb{R}$ (indépendant de x et y)

Ainsi, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{O\Omega} = -\frac{c}{a}\vec{i} - \frac{d}{b}\vec{j}$, C a pour équation :

$$ax^2 + by^2 + k = 0$$

On se place donc dans ce repère :

- Soit $ab > 0$: quitte à multiplier par -1, on peut supposer $a > 0, b > 0$

Si $k > 0$, alors $C = \emptyset$.

Si $k = 0$, alors $C = \{\Omega\}$.

Si $k < 0$, alors s'écrit : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, donc C est une ellipse

(éventuellement, si $\alpha < \beta$, on se place dans $(\Omega, \vec{j}, \vec{i})$ pour avoir l'ellipse telle qu'elle a été définie en **I**).

- Si $ab < 0$: quitte à multiplier par -1, on peut supposer $a > 0, b < 0$

Si $k = 0$, alors l'équation peut s'écrire $(ux - vy)(ux + vy) = 0$, donc C est la réunion de deux droites sécantes en Ω et symétriques par rapport aux axes du repère.

Si $k \neq 0$:

Soit $k > 0$, et l'équation s'écrit $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Soit $k < 0$, et l'équation s'écrit $-\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Et dans les deux cas, C est une hyperbole. (Attention, il faut changer de repère dans le deuxième cas pour avoir l'équation d'une hyperbole telle qu'elle a été définie : il faut se placer dans $(\Omega, \vec{j}, \vec{i})$)

- 2^{ème} cas : $ab = 0$

Quitte à se placer plutôt dans (O, \vec{j}, \vec{i}) , on peut supposer $a = 0, b \neq 0$.

Or, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, by^2 + 2cx + 2dy + e = b\left[\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 + 2\frac{c}{b}x + k\right]$,

avec $k \in \mathbb{R}$, indépendant de x et y .

Donc l'équation peut s'écrire $\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 + 2\frac{c}{b}x + k = 0$.

- Si $c = 0$

Soit $k > 0$, alors $C = \emptyset$

Soit $k = 0$, alors C est la droite d'équation $y = -\frac{d}{b}$

Soit $k < 0$, alors C est la réunion de deux droites parallèles d'équations :

$$y = -\frac{d}{b} \pm \sqrt{-k}$$

- Si $c \neq 0$, l'équation s'écrit alors $(y - y_0)^2 = -\frac{2c}{b}(x - x_0)$.

Donc dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) avec $\vec{OS} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, C admet l'équation $y^2 = -\frac{2c}{b}x$, donc C est une parabole.

Ainsi, on a trouvé :

Hyperbole, Ellipse (coniques à centre)

Parabole

→ coniques non dégénérées

∅, un point, une droite, deux droites parallèles ou sécantes

→ coniques dégénérées

III Définition monofocale d'une conique non dégénérée et autre qu'un cercle

Théorème 1 :

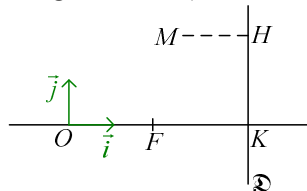
Soit F un point de \mathfrak{P} , soit \mathfrak{D} une droite ne contenant pas F et $e \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $C = \{M \in \mathfrak{P}, MF = e \times MH = d(M, \mathfrak{D})\}$ (où H désigne la projection orthogonale de M sur \mathfrak{D})

- Si $e \in]0, 1[$, alors C est une ellipse (qui n'est pas un cercle), dont le grand axe est la droite orthogonale à \mathfrak{D} passant par F .
- Si $e \in]1, +\infty[$, C est une hyperbole dont l'axe transverse est la droite orthogonale à \mathfrak{D} passant par F .
- Si $e = 1$, C est une parabole dont l'axe est la droite orthogonale à \mathfrak{D} passant par F .

Démonstration :

Soit $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de \mathfrak{P} de sorte que l'axe (O, \vec{i}) passe par F et soit orthogonal à \mathfrak{D} . (on choisira O en cours de démonstration)



Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ de sorte que, dans \mathfrak{R} , $F(c, 0)$ et $K(k, 0)$ (où K est le projeté orthogonal de F sur \mathfrak{D})

Et, pour $M(x, y)$, $\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} x-k \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x-c \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } MF = eMH \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2(x-k)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-e^2) + 2x(ke^2 - c) + y^2 = e^2k^2 - c^2$$

- Si $e \neq 1$, on peut choisir O de sorte que $ke^2 - c = 0$ (on prend O le barycentre de (K, e^2) , $(F, -1)$). Et ainsi $k^2e^2 - c^2 = \frac{c^2}{e^2} - c^2 = \frac{c^2}{e^2}(1-e^2)$ (avec $c \neq 0$ car sinon on aurait $k = c = 0$ et donc $F \in \mathfrak{D}$)

$$MF = eMH \Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = e^2k^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \text{ Avec } a^2 = \frac{c^2}{e^2}$$

Donc si $e \in]0, 1[$ on obtient une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Son grand axe est Ox et on a les formules :

$$a^2 = \frac{c^2}{e^2}, b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - c^2 \text{ et } k = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$$

Et si $e \in]1, +\infty[$, on obtient une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Son axe transverse est Ox , et on a les formules :

$$a^2 = \frac{c^2}{e^2}, b^2 = a^2(e^2 - 1) = c^2 - a^2 \text{ et } k = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$$

• Si $e = 1$, on obtient $MF = MH \Leftrightarrow 2x(k - c) + y^2 = k^2 - c^2$.

On choisit pour O le milieu de F et K , on a alors $k = -c$ et donc :

$$MF = MH \Leftrightarrow y^2 = 4cx$$

On obtient la parabole d'équation $MF = MH \Leftrightarrow y^2 = 2px$ avec $p = 2c$, son axe est Ox

Théorèmes 2 :

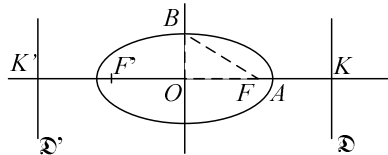
Soit $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de \mathfrak{P} .

Théorème 2.1 :

Soit \mathfrak{C} l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$

Alors il existe exactement un réel $e \in]0, 1[$ et deux couples (F, \mathfrak{D}) constitués d'un point F et d'une droite \mathfrak{D} ne contenant pas F de sorte que $\mathfrak{C} = \{M \in \mathfrak{P}, MF = e \times MH\}$.

On a alors le dessin :



et les formules :

$$c^2 = a^2 - b^2, e = \frac{c}{a} \text{ (on a } BF = a)$$

$$F(c, 0) \quad \mathfrak{D}: x = \frac{a^2}{c}$$

$$F'(-c, 0) \quad \mathfrak{D}': x = -\frac{a^2}{c}$$

Vocabulaire :

On appelle e l'excentricité de l'ellipse, F, F' ses foyers, $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ ses directrices (on parle de directrice \mathfrak{D} associée à F)

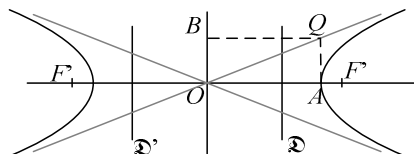
Théorème 2.2 :

Soit \mathfrak{H} l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Alors il existe exactement un réel $e \in]1, +\infty[$ et deux couples (F, \mathfrak{D}) de sorte que :

$$\mathfrak{H} = \{M \in \mathfrak{P}, MF = e \times MH\}$$

On a alors le dessin :



et les formules :

$$c^2 = a^2 + b^2, e = \frac{c}{a} \text{ (on a } OB = b \text{ et } OQ = c)$$

$$F(c,0) \quad \mathfrak{D}: x = \frac{a^2}{c}$$

$$F'(-c,0) \quad \mathfrak{D}': x = -\frac{a^2}{c}$$

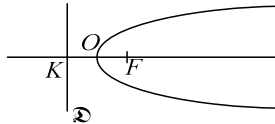
Le vocabulaire est le même que pour l'ellipse.

Théorème 2.3 :

Soit C la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

Alors il existe un couple (F, \mathfrak{D}) de sorte que $C = \{M \in \mathfrak{P}, MF = MH\}$

On a alors le dessin et les formules :



$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad \mathfrak{D}: x = -\frac{p}{2}$$

On appelle F le foyer, et \mathfrak{D} la directrice de la parabole.

Démonstration :

Soit \mathfrak{C} une ellipse (qui n'est pas un cercle) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$ dans un repère $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Selon le théorème 1, si un réel e et un couple (F, \mathfrak{D}) conviennent, alors F appartient à l'axe Ox , et \mathfrak{D} est orthogonale à cet axe :

F a donc des coordonnées du type $(c, 0)$, et \mathfrak{D} une équation de la forme $x = k$.

Mais, selon la démonstration du théorème 1, l'ensemble des $M \in \mathfrak{P}$ tels que $MF = eMH$ coïncidera avec \mathfrak{C} si et seulement si :

$$b^2 = a^2 - c^2, e^2 = \frac{c^2}{a^2} \text{ et } k = \frac{a^2}{c}$$

Ce qui donne bien deux valeurs opposées de c , une valeur de e et une valeur de k pour chaque valeur de c .

Pour les théorèmes 2.2 et 2.3, on fait le même raisonnement.

IV Définition bifocale d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole)

Théorème 1 :

Soient F et F' deux points distincts, et soit a un réel tel que $2a > FF'$.

Alors $C = \{M \in \mathfrak{P}, MF + MF' = 2a\}$ est une ellipse de foyers F et F' et de $\frac{1}{2}$ grand axe a .

Théorème 2 :

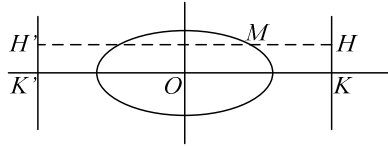
Soient F et F' deux points distincts, et soit a un réel tel que $0 < 2a < FF'$.

Alors $C = \{M \in \mathfrak{P}, |MF - MF'| = 2a\}$ est une hyperbole de foyers F et F' et de $\frac{1}{2}$ distance aux foyers a .

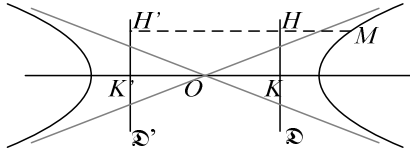
Démonstration simultanée des deux théorèmes :

Soient F, F' distincts, et a un réel strictement positif. On note $2c = FF'$.

(1) Si $a > c$, on peut introduire l'ellipse \mathfrak{C} de foyers F, F' , de $\frac{1}{2}$ grand axe a , et, pour tout M de \mathfrak{C} , on a : $MF + MF' = e(MH + MH') = eKK' = e \frac{2a^2}{c} = 2a$



Si $0 < a < c$, on peut introduire l'hyperbole \mathfrak{H} de foyers F, F' et de $\frac{1}{2}$ distance aux sommets a , et pour tout $M \in \mathfrak{H}$, on a : $MF - MF' = e(MH - MH') = e(\pm KK') = \pm 2a$
 (\pm selon la branche)



Ainsi, dans chaque cas, on a montré une première inclusion ($\mathfrak{E} / \mathfrak{H} \subset C$).

(2) Montrons maintenant l'autre inclusion :

Plaçons-nous dans un repère $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé de sorte que O soit le milieu de $[F'F]$ et $\overline{F'F} = 2c\vec{i}$.

Alors, pour tout $M \in \mathfrak{H}$ de coordonnées (x, y) dans ce repère :

$$MF^2 - MF'^2 = \overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2 = (\overline{MF} - \overline{MF'}) \cdot (\overline{MF} + \overline{MF'}) = \overline{F'F} \cdot 2\overline{MO} = -4cx$$

Et d'autre part, en désignant par $\varepsilon, \varepsilon'$ deux éléments quelconques de $\{-1, 1\}$:

$$MF^2 - MF'^2 = (\varepsilon MF)^2 - (\varepsilon' MF')^2 = (\varepsilon MF - \varepsilon' MF')(\varepsilon MF + \varepsilon' MF')$$

Donc :

$$\varepsilon MF + \varepsilon' MF' = 2a \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon MF + \varepsilon' MF' = 2a \\ \varepsilon MF - \varepsilon' MF' = \frac{-4cx}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon MF = a - \frac{c}{a}x$$

$$\Rightarrow (x - c)^2 + y^2 = (a - \frac{c}{a}x)^2$$

D'où, après simplification :

$$\varepsilon MF + \varepsilon' MF' = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Donc :

- Dans le cas $a > c$, en prenant $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, on voit que $MF + MF' = 2a \Rightarrow M \in \mathfrak{E}$.
- Et dans le cas $a < c$, en prenant $\varepsilon = 1, \varepsilon' = -1$ puis $\varepsilon = -1, \varepsilon' = 1$, on voit que $|MF - MF'| = 2a \Rightarrow M \in \mathfrak{H}$.

Remarque :

Le théorème 1 peut s'étendre au cas $F = F'$, et on obtient alors un cercle (de rayon a)