Chapitre 9 : Fonctions vectorielles à valeurs dans un espace euclidien

E désigne ici un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension p, $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,..e_p)$ en est une base.
D est une partie de $\mathbb{R}$, $F:D\to E$ est une fonction de D dans E.
On note $f_1,f_2,...f_p$ les fonctions de D dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall t\in D, F(t)=\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i$
(On les appelle les fonctions coordonnées de F dans la base $\mathfrak{B}$)

I Limite, continuité

Définition, proposition :
Soit $a\in\mathbb{R}$ un point adhérent à D, et $l\in E$ de coordonnées $l_1,l_2,..l_p$ dans $\mathfrak{B}$.

$$\begin{aligned}\lim_a f=l &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall t\in D,(|t-a|<\alpha\Rightarrow\|F(t)-l\|<\varepsilon)\\ &\Leftrightarrow \forall i\in[\![1,p]\!], \lim_a f_i=l_i\\ &\Leftrightarrow \lim_{t\mapsto a}\|F(t)-l\|=0\end{aligned}$$

Définition, proposition analogues pour l'éventuelle limite en $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque D est non majorée ou non minorée.

Définition et proposition analogues pour les éventuelles limites à droite ou à gauche en un point a de $\mathbb{R}$ tel que a soit adhérent à $D\cap]a,+\infty[$ ou $D\cap]-\infty,a[$.

On établit aisément les résultats concernant les opérations classiques sur les fonctions vectorielles : si $F,G:D\to E$ on des limites en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, si $\lambda\in\mathbb{R}$ et si $\varphi:D\to\mathbb{R}$ a une limite finie en a.

Alors $F+G$, λF, φF, $F\cdot G$ et $\|F\|$ on des limites en a, qui sont respectivement :

$\lim_a F+\lim_a G$, $\lambda\lim_a F$, $\lim_a\varphi.\lim_a F$, $\lim_a F\cdot\lim_a G$ et $\left\|\lim_a F\right\|$.

Et dans les cas où E est orienté et de dimension 3, $F\wedge G$ a une limite en a qui est $\lim_a F\wedge\lim_a G$

On a aussi le théorème de composition :
Si $\varphi:A\to\mathbb{R}$ (avec $A\subset\mathbb{R}$), si $F:D\to E$ (avec $\varphi(A)\subset D$), si $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A et si φ a une limite $a\in\overline{\mathbb{R}}$ en α, alors a est adhérent à D, et si de plus F a une limite en a, alors $F\circ\varphi$ a une limite en α, qui est $\lim_a F$.

Définition, proposition :
Soit $a\in D$.
F est continue en a $\Leftrightarrow$ F admet une limite en a (c'est alors nécessairement $F(a)$)
$\Leftrightarrow \forall i\in[\![1,p]\!]$, f_i est continue en a.
(Définition, proposition analogues pour l'éventuelle continuité à droite/à gauche en a)

Définition, proposition :

F est continue sur D $\Leftrightarrow \forall \in D$, F est continue en a.

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ f_i$ est continue sur D.

On justifie aisément les résultats attendus concernant la continuité et les opérations classiques sur les fonctions vectorielles…

On montre aussi facilement le théorème :

Si K est un segment de $\mathbb{R}$, et si $F : K \to E$ est continue sur K, alors F est bornée sur K (c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in K, \|F(t)\| \leq M$)

On a en effet l'équivalence suivante :

F est bornée $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ f_i$ est bornée.

II Dérivabilité

Ici, I désigne un intervalle infini de $\mathbb{R}$, on conserve les notations du début avec $D = I$ (ainsi, F est une fonction de I dans E)

A) Définition, proposition

Soit $a \in I$.

F est dérivable en a $\Leftrightarrow$ l'application $\begin{array}{l} I \setminus \{a\} \to E \\ t \mapsto \dfrac{F(t)-(a)}{t-a} \end{array}$ a une limite en a.

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ f_i$ est dérivable en a.

Cette limite est alors notée $F'(a)$ ou $\dfrac{dF}{dt}(a)$, et on a $F'(a) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(a) e_i$.

Définitions, propositions analogues pour l'éventuelle dérivabilité et dérivée à droite ou à gauche en a, et pour la dérivabilité et la dérivée sur I.

Proposition :

(Rappel : I est un intervalle de $\mathbb{R}$)

Si F est dérivable sur I, alors $F' = 0 \Leftrightarrow F = \text{cte}$

Notions de dérivées successives, de classes de fonctions analogues aux définitions des fonctions réelles…

B) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

Si $F, G : I \to E$ sont dérivables en a, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, alors $F + G$, λF, φF et $F \cdot G$ sont dérivables en a, et on a :

$(F+G)'(a) = F'(a) + G'(a)$

$(\lambda.F)'(a) = \lambda.F'(a)$

$(\varphi.F)'(a) = \varphi'(a).F(a) + \varphi(a).F'(a)$

$(F \cdot G)'(a) = F'(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot G'(a)$

Et, dans le cas où E est de dimension 3 et orienté, $F \wedge G$ est dérivable en a et :

$(F \wedge G)'(a) = F'(a) \wedge G(a) + F(a) \wedge G'(a)$.

Remarque :

On obtient ensuite par récurrence les formules de Leibniz pour $(\varphi.F)^{(n)}, (F\cdot G)^{(n)}$ et $(F\wedge G)^{(n)}$, lorsque F, G et φ sont de classe C^n.

Théorème de composition :

Si $\varphi : J\to\mathbb{R}$, $F : I\to E$ avec $\varphi(J)\subset I$, si $\alpha\in J$ et si φ est dérivable en α et F dérivable en $\varphi(\alpha)$, alors $F\circ\varphi$ est dérivable en α, et $(F\circ\varphi)'(\alpha)=\varphi'(\alpha)F'(\varphi(\alpha))$

Proposition :

Si $F : I\to E$ est dérivable en a, et si $F(a)\neq 0$, alors $\|F\|$ est dérivable en a, et :

$$(\|F\|)'(a)=\frac{F(a)\cdot F'(a)}{\|F(a)\|}$$

En effet, $\|F\|=\sqrt{F\cdot F}$, et en appliquant le théorème de dérivation pour la composition des fonctions réelles $F\cdot F$ et $u\mapsto\sqrt{u}$:

Si $F(a)\cdot F(a)\neq 0$ (c'est-à-dire si $F(a)\neq 0$), alors $\sqrt{F\cdot F}$ est dérivable en a, de dérivée $\frac{1}{2}\frac{2F(a)\cdot F'(a)}{\sqrt{F(a)\cdot F(a)}}=\frac{F(a)\cdot F'(a)}{\|F(a)\|}$.

Proposition :

Si F est dérivable sur I, et si $\|F\|=\text{cte}$, alors $F\perp F'$

(c'est-à-dire $\forall t\in I, F(t)\perp F'(t)$)

En effet :

Si $\|F\|=\text{cte}=0$, c'est que $F=\text{cte}=0$, d'où le résultat.

Sinon, selon la propriété précédente, on peut écrire :

$$\forall a\in I, 0=(\|F\|)'(a)=\frac{F(a)\cdot F'(a)}{\|F(a)\|}$$

Exemple :

$\mathbb{C}$ est un cas particulier d'espace euclidien sur $\mathbb{R}$. (de dimension 2, une base orthonormée étant par exemple la base $(1,i)$, la norme euclidienne étant le module)

On a déjà traité le cas des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (et on a dans ce cas une opération supplémentaire, à savoir la multiplication)

Pour tout $m\in\mathbb{C}$, la fonction $t\mapsto e^{m.t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t\mapsto me^{m.t}$.

Lorsqu'on prend $m=i$, cette fonction, $t\mapsto e^{i.t}$ est de module constant égal à 1, et sa dérivée $t\mapsto ie^{i.t}=e^{i(t+\frac{\pi}{2})}$ lui est bien orthogonale.

III Intégration

Proposition, définition :

Soit $F : [a,b]\to E$, continue. Alors la valeur de $\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)dt\right)e_i$ est indépendante du choix de la base $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_p)$. Cette valeur est par définition $\int_a^b F(t)dt$.

La définition peut s'étendre aux fonctions continues par morceaux…

Propriété : linéarité, relation de Chasles…

Théorème (admis) :
Si $F:[a,b]\to E$ est continue (ou continue par morceaux), et si $a\le b$, alors :
$\left\|\int_a^b F(t)dt\right\|\le\int_a^b\|F(t)\|dt$

Théorème :

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si $F:I\to E$ est continue, alors la fonction $x\mapsto\int_a^x F(t)dt$ est une primitive de F sur I, et c'est l'unique primitive de F sur I nulle en a.

Il en résulte que si $F:I\to E$ est continue sur I, alors F admet une primitive G, et pour tous a, b de I, $\int_a^b F(t)dt=G(b)-G(a)$.

Conséquences : théorème d'intégration par parties, de changement de variables…

Remarque : La formule de la moyenne est fausse (Avec $E=\mathbb{C}$ par exemple).

IV Inégalités et formules de Taylor diverses

Inégalité des accroissements finis :

Si F est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si il existe $k\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall t\in]a,b[,\|F'(t)\|\le k$, alors $\|F(b)-F(a)\|\le k|b-a|$.

L'égalité des accroissements finis est fausse (voir encore avec $E=\mathbb{C}$)

Inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre $n-1$:

Si F est de classe C^n ($n\ge 1$) sur $[a,b]$, et si $M_n=\sup_{t\in[a,b]}\left\|F^{(n)}(t)\right\|$ (qui existe d'après le **I**),

alors $\left\|F(b)-(F(a)+(b-a)F'(a)+...+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a))\right\|\le\frac{|b-a|^n}{n!}M_n$

L'égalité de Taylor–Lagrange est fausse (elle est vraie dans $\mathbb{R}$ mais hors programme)

Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n-1$) :

$F:[a,b]\to E$ est de classe C^n ($n\ge 1$), alors :

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+...+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{|b-t|^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(t)dt$$

(Cette formule s'établit aisément grâce à des intégrations par parties successives, et donne ainsi une preuve de l'inégalité de Taylor–Lagrange grâce au théorème de majoration vu au **III**)

Formule de Taylor–Young (à l'ordre n) :

Si $F:I\to E$ est de classe C^n sur un intervalle I contenant 0, alors il existe $\varepsilon:I\to E$, telle que $\lim_{t\mapsto 0}\varepsilon(t)=0$ et :

$$\forall t\in I,F(t)=F(0)+t.F'(0)+\tfrac{t^2}{2}.F''(0)+...+\tfrac{t^n}{n!}.F^{(n)}(0)+t^n\varepsilon(t)$$

V Développements limités

Définition :

Soient I un intervalle infini de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, notons $D = I$ ou $I \setminus \{t_0\}$, et $F : D \to E$.

On dit que F admet un DL à l'ordre n en t_0 lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon : D \to E$ et des éléments $a_0, a_1, \dots a_n$ de E tels que :

- $\lim\limits_{t \mapsto t_0} \varepsilon(t) = 0$
- $\forall t \in D, F(t) = a_0 + (t - t_0)a_1 + (t - t_0)^2 a_2 + \dots + (t - t_0)^n a_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$

Propriétés :

- Unicité de l'éventuel DL à l'ordre n en t_0.
- Existence d'un DL à l'ordre n en t_0 $\Rightarrow$ existence de DL en t_0 à tout ordre $q \le n$.
- Existence d'un DL à l'ordre 0 en t_0 $\Leftrightarrow$ existence d'une limite en t_0

En supposant maintenant que $t_0 \in I$ (c'est-à-dire que $D = I$) :

- Existence de DL à l'ordre 1 en t_0 $\Leftrightarrow$ dérivabilité en t_0

(Mais ne s'étend pas aux ordres supérieurs)

- F est de classe C^n au voisinage de t_0 $\Rightarrow$ F a un DL à l'ordre n en t_0

(Donné alors par la formule de Taylor–Young)

Opérations sur les DL :

- Somme, produit par un scalaire : évident.
- Pour les autres opérations : voir ce qui se passe dans chaque cas particulier.