Chapitre 10 : Courbes paramétrées (planes)

I désigne ici un intervalle infini de $\mathbb{R}$.
$\mathfrak{P}$ désigne un plan affine de direction P, euclidien orienté quand il le faut, et $\mathfrak{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$ en est un repère (orthonormé direct si nécessaire)

I Généralités

A) Préliminaire

Soit $\gamma : \begin{array}{l} I \to \mathfrak{P} \\ t \mapsto M(t) \end{array}$

Soit $A \in \mathfrak{P}$, posons $\vec{F}_A : \begin{array}{l} I \to P \\ t \mapsto \overrightarrow{AM(t)} \end{array}$

($\vec{F}_A$ est une fonction vectorielle)

Proposition :

La classe de la fonction vectorielle $\vec{F}_A$, ainsi que les vecteurs de ses éventuelles dérivées d'ordre ≥ 1 ne dépendent pas du choix de A.

En effet, si B est un autre point de $\mathfrak{P}$:

$\vec{F}_B(t)=\overrightarrow{BM(t)}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM(t)}=\overrightarrow{BA}+\vec{F}_A(t)$

Donc $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ sont bien de même classe, et sont égales à une constante près, donc les dérivées successives sont bien égales.

Définition :

La classe de γ, c'est-à-dire de $t \mapsto M(t)$ est, par définition, la classe de $\vec{F}_A : t \mapsto \overrightarrow{AM(t)}$ (qui ne dépend pas de A). Et, si cette fonction est de classe C^k, avec $k \geq 1$, pour tout $t \in I$, $\dfrac{d^k\vec{F}_A}{dt^k}(t)$ est noté $\dfrac{d^k\overrightarrow{M}}{dt^k}(t)$.

B) Définition

Soit $k \geq 1$. Un arc paramétré de classe C^k du plan $\mathfrak{P}$, c'est une fonction $\gamma : \begin{array}{l} I \to \mathfrak{P} \\ t \mapsto M(t) \end{array}$ de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Vocabulaire :

Si $\gamma : \begin{array}{l} I \to \mathfrak{P} \\ t \mapsto M(t) \end{array}$ est un arc paramétré de classe C^k ($k \geq 1$) :

- $\{M(t), t \in I\}$ s'appelle le support de l'arc paramétré γ, ou aussi la trajectoire du mobile (tel que, pour tout $t \in I$, $M(t)$ soit la position du mobile « à l'instant t »)
- $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)=\vec{v}(t)$: vecteur vitesse à l'instant t.

- Si $k \geq 2$: $\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}(t) = \vec{a}(t)$ est le vecteur accélération à l'instant t.
- On dit que le point de paramètre t est stationnaire lorsque $\vec{v}(t) = \vec{0}$.
- Un point A du support est dit multiple (ou plus précisément double, triple…) lorsqu'il existe t_1, t_2 distincts de I tels que $M(t_1) = M(t_2) = A$

Finalement, la donnée d'un arc paramétré correspond à la donnée d'un mouvement d'un point mobile.

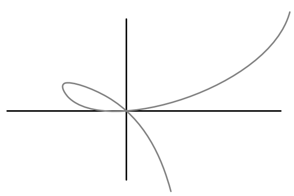
Exemple :

Construire le support de l'arc paramétré $t \mapsto M(t)$ où $M(t)\begin{pmatrix} t(t+1) \\ t^2(t+1) \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$.

$x(t) = t^2 + t \qquad x'(t) = 2t + 1$

$y(t) = t^3 + t^2 \qquad y'(t) = 3t^2 + 2t$

t		$-2/3$		$-1/2$		0	
$x'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x(t)$	$\searrow$		$\searrow$	$1/4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$	$4/27$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
$y'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$



II Tangente

Dans tout ce paragraphe, $\gamma : \begin{array}{l} I \to \mathfrak{P} \\ t \mapsto M(t) \end{array}$ est un arc paramétré de classe C^k, avec $k \geq 1$.

A) Définition

- Soit $t_0 \in \mathring{I}$.

On dit que l'arc γ présente une tangente au point $M_0 = M(t_0)$ lorsque la fonction $t \mapsto \dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}$ est définie au voisinage épointé (c'est-à-dire en retirant t_0) de t_0, admet une limite à droite et une limite à gauche en t_0, ces deux limites étant égales ou opposées.

Dans ce cas, on note $\vec{T}(t_0)$ la limite à droite, et la tangente à la courbe au point M_0 est par définition la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{T}(t_0)$ (appelé vecteur unitaire de sur la tangente orientée)

$\dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}$ est de norme 1 au voisinage épointé de t_0, donc $\left\|\vec{T}(t_0)\right\| = 1$.

- Si t_0 est une extrémité de *I*, on adapte la définition…

B) Cas d'un point régulier

Définition :

$M(t_0)$ est régulier $\Leftrightarrow \vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$

$M(t_0)$ est stationnaire $\Leftrightarrow \vec{v}(t_0) = \vec{0}$

Supposons ici que $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$, notons $M_0 = M(t_0)$, $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$.

Le DL à l'ordre 1 en t_0 de la fonction vectorielle $\vec{F} : t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ donne :

$\vec{F}(t) = \vec{F}(t_0) + (t-t_0)\vec{F}'(t_0) + (t-t_0)\vec{\varepsilon}(t)$ où $\lim\limits_{t \mapsto t_0} \vec{\varepsilon}(t) = \vec{0}$

Ou encore : $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t_0) + (t-t_0)\vec{v}(t_0) + (t-t_0)\vec{\varepsilon}(t)$

C'est-à-dire $\overrightarrow{M_0M(t)} = (t-t_0)(\vec{v}_0 + \vec{\varepsilon}(t))$

Donc $\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\| = |t-t_0| \underbrace{\left\|\vec{v}_0 + \vec{\varepsilon}(t)\right\|}_{\substack{\text{tend vers } \vec{v}_0 \\ \text{lorsque } t \mapsto t_0}}$

Donc $\dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|} = \dfrac{t-t_0}{|t-t_0|} \dfrac{\vec{v}_0 + \vec{\varepsilon}(t)}{\left\|\vec{v}_0 + \vec{\varepsilon}(t)\right\|}$ est définie au voisinage épointé de t_0, tend vers $\dfrac{\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|}$ à droite et $\dfrac{-\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|}$ à gauche.

Ainsi, en un point non stationnaire, $\vec{T}(t_0) = \dfrac{\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|}$.

Equation de la tangente :

$M(t)\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$, $\vec{v}(t)\begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{vmatrix}$

Tangente en $M_0 = M(t_0)$:

$y'(t_0)(x-x_0) - x'(t_0)(y-y_0) = 0$ (avec $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$)

Donc si $x'(t_0) = 0$, on a une tangente verticale, sinon de pente $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

C) Cas d'un point stationnaire « pas méchant »

On suppose que $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$, mais que $\left\{ i \geq 2, \gamma \text{ est de classe } C^i \text{ et } \dfrac{\overrightarrow{d^iM}}{dt^i}(t_0) \neq \vec{0} \right\} \neq \varnothing$

C'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, on note *p* son plus petit élément.

Le DL à l'ordre p de $\vec{F}$ donne alors :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\left(\frac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0) + \underbrace{\vec{\varepsilon}(t)}_{\to\vec{0}}\right)$$

Il en résulte comme pour un point régulier qu'il y a une tangente en $M(t_0)$, et qu'elle est dirigée par $\dfrac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0)$.

Cas particulier :

Si γ est de classe C^2, si $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$ et $\vec{a}(t_0) \neq \vec{0}$, il y a alors une tangente en $M(t_0)$, dirigée par $\vec{a}(t_0)$.

III Etude locale « plus poussée »

On prend les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, et l'arc est supposé ici de classe C^k, avec $k \geq 2$.

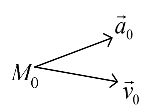
A) Cas d'un point birégulier

On suppose que $M(t_0)$ est birégulier, c'est-à-dire que $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$ et $(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0))$ est libre.

Le DL de $\vec{F}$ en t_0 à l'ordre 2 donne :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = (t-t_0)\vec{v}_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2}\vec{a}_0 + (t-t_0)^2\varepsilon(t) \text{ où } \lim_{t\mapsto t_0}\vec{\varepsilon}(t) = \vec{0}$$

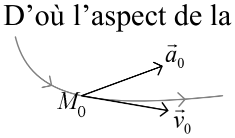
On se place dans le repère $(M_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0)$:



Dans ce repère :

$$M\left|\begin{array}{l}(t-t_0) + (t-t_0)^2\alpha(t)\\ \dfrac{(t-t_0)^2}{2} + (t-t_0)^2\beta(t)\end{array}\right. \text{ où } \vec{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\vec{v}_0 + \beta(t)\vec{a}_0 \text{ (donc } \alpha(t), \beta(t) \xrightarrow[t\mapsto t_0]{} 0\text{)}$$

D'où l'aspect de la courbe :



On dit alors qu'on a un point ordinaire.

B) Cas plus général

On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ tels que :

- γ est de classe C^q ; on note $\vec{r}_0 = \dfrac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0)$, $\vec{s}_0 = \dfrac{\overrightarrow{d^qM}}{dt^p}(t_0)$

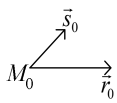
- $r_0 \neq \vec{0}$ et $p = \min\left\{ i \in \mathbb{N}^*, \overrightarrow{\dfrac{d^i M}{dt^i}}(t_0) \neq \vec{0} \right\}$
- $(\vec{r}_0, \vec{s}_0)$ est libre, et $q = \min\left\{ j \geq p+1, \left(\overrightarrow{\dfrac{d^p M}{dt^p}}(t_0), \overrightarrow{\dfrac{d^j M}{dt^j}}(t_0) \right) \text{est libre} \right\}$

Le DL à l'ordre q de $\vec{F}$ en t_0 donne :

$$\overrightarrow{M_0 M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{r}_0 + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_1 \vec{r}_0 + \ldots + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{s}_0 + (t-t_0)^q \vec{\varepsilon}(t)$$

Où $\lim\limits_{t \mapsto t_0} \vec{\varepsilon}(t) = \vec{0}$

Dans le repère $(M_0, \vec{r}_0, \vec{s}_0)$:

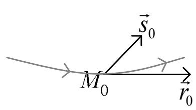


On a :

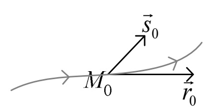
$$\overrightarrow{M_0 M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{r}_0 + (t-t_0)^p \left(\frac{(t-t_0)}{(p+1)!}\lambda_1 + \ldots + (t-t_0)^{q-p}\alpha(t) \right)\vec{r}_0$$
$$+ \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{s}_0 + (t-t_0)^q \beta(t)\vec{s}_0$$

Avec $\vec{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\vec{r}_0 + \beta(t)\vec{s}_0$, donc $\alpha(t), \beta(t) \xrightarrow[t \mapsto t_0]{} 0$

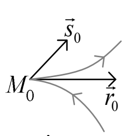
Donc $M(t) \left| \begin{array}{l} \dfrac{(t-t_0)^p}{p!} + o((t-t_0)^p) \\ \dfrac{(t-t_0)^q}{q!} + o((t-t_0)^q) \end{array} \right.$



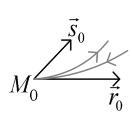
p impair
q pair
→point ordinaire



p impair
q impair
→point d'inflexion



p pair
q impair
→point de rebroussement
de première espèce



p pair
q pair
→point de rebroussement
de deuxième espèce

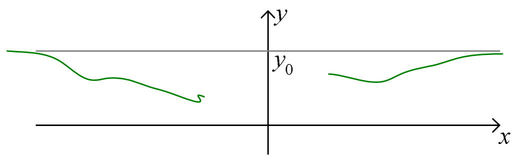
IV Branches infinies

Quelques situations, pour un arc $\gamma : \begin{array}{l} I \to \mathfrak{P} \\ t \mapsto M(t)\Big|_{y(t)}^{x(t)} \end{array}$.

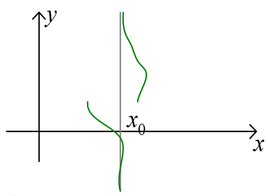
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à *I*.

On suppose que $x(t)$ et $y(t)$ ont une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque $t \mapsto a$, et que l'une de ces limites est infinie.

1$^{\text{er}}$ cas : $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to y_0 \in \mathbb{R}$:



2$^{\text{ème}}$ cas : $x(t) \to x_0 \in \mathbb{R}$, $y(t) \to \pm\infty$:



3$^{\text{ème}}$ cas : $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to \pm\infty$:

- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \alpha \in \mathbb{R}$, on a une direction asymptotique de pente α.
  - Si $y(t) - \alpha.x(t) \to \beta \in \mathbb{R}$, on a une asymptote d'équation $y = \alpha.x + \beta$
  - Si $y(t) - \alpha.x(t) \to \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction de pente α.
  - Si $y(t) - \alpha.x(t)$ n'a pas de limite, on n'a rien de mieux qu'une direction asymptotique.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$, on a une branche parabolique verticale.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ n'a pas de limite, on n'a rien à dire…

Remarque :

Si une courbe *C* a pour équation une équation de la forme $C : y = f(x), x \in I$, alors elle admet le paramétrage évident $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in I$

V Marche à suivre pour la construction du support d'un arc paramétré

Soit $\gamma : \begin{array}{l} I \to \mathfrak{P} \\ t \mapsto M(t)\Big|_{y(t)}^{x(t)} \text{ dans } \mathfrak{R} \end{array}$, de support *C*.

(1) Etude du domaine de définition, de la classe…

(2) Réduction de l'intervalle d'étude :
Exemples, dans le cas $I=\mathbb{R}$:

(a) $\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x(-t)=x(t)\\y(-t)=y(t)\end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}^+$, et on obtient tout *C*.

(b) $\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x(-t)=-x(t)\\y(-t)=-y(t)\end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}^+$, et on obtient *C* en faisant la symétrie par rapport à *O*.

(c) $\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x(-t)=x(t)\\y(-t)=-y(t)\end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}^+$, et on obtient *C* en faisant la symétrie par rapport à $(Ox$ selon $(Oy$.

(d) $\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x(-t)=-x(t)\\y(-t)=y(t)\end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}^+$, et on obtient *C* en faisant la symétrie par rapport à $(Oy$ selon $(Ox$.

(e) $\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x(t+T)=x(t)\\y(t+T)=y(t)\end{cases}$. L'étude entre 0 et *T* donne toute la courbe.

(f) $\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x(t+T)=x(t)+\alpha\\y(t+T)=y(t)+\beta\end{cases}$. On fait l'étude entre 0 et *T*, puis on fait les translations $n.\vec{u}, n\in\mathbb{Z}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

(3) Tableau de variations, limites.
(4) Points particuliers, stationnaires, branches infinies…

VI Paramétrages classiques, coniques

- $\mathfrak{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Alors $\mathfrak{E}$ est le support de l'arc paramétré $\begin{cases}x=a.\cos t\\y=b.\sin t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

- $\mathfrak{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Paramétrage :

$\begin{cases}x=a.\mathrm{ch}\,t\\y=b.\mathrm{sh}\,t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ pour la branche des $x>0$.

$\begin{cases}x=-a.\mathrm{ch}\,t\\y=b.\mathrm{sh}\,t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ pour l'autre branche.

- $P: y^2=2px$

Paramétrage : $\begin{cases}y=y\\x=\frac{y^2}{2px}\end{cases}, y\in\mathbb{R}$.

- Tangente à une ellipse :

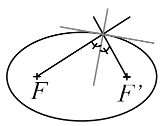
Soit $\mathfrak{E}$ une ellipse de foyers *F* et *F'* et de ½ grand axe *a*.

Soit $t \mapsto M(t)$ un paramétrage de l'ellipse, de classe C^1 au moins et sans point stationnaire.

On a : $\forall t \in I, \left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\| + \left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\| = 2a$

Ainsi, en dérivant, $\forall t \in I, \dfrac{\overrightarrow{FM(t)} \cdot \vec{v}(t)}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{F'M(t)} \cdot \vec{v}(t)}{\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|} = 0$

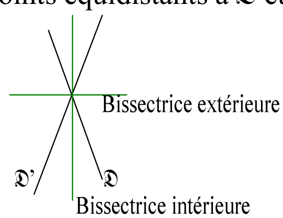
C'est-à-dire $\forall t \in I, \vec{v}(t) \perp \left(\dfrac{\overrightarrow{FM(t)}}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{F'M(t)}}{\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|} \right)$



Ainsi, $\vec{v}(t)$ est dans la direction de la bissectrice extérieure.

Définition :

La bissectrice de deux droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$', c'est la réunion de deux droites qui sont l'ensemble des points équidistants à $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}$'.



- Tangente à une hyperbole :

$\vec{v}(t)$ est dirigé selon la bissectrice intérieure… (C'est la même chose que pour l'ellipse, mais on remplace les + par des –).

- Cas d'une parabole :

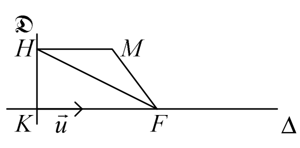
Soit P une parabole de foyer F et de directrice $\mathfrak{D}$.

Alors $P = \{M \in \mathfrak{P}, MF = MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathfrak{D}$.

Soit K le projeté orthogonal de F sur $\mathfrak{D}$, Δ la droite orthogonale à $\mathfrak{D}$ passant par K.

Ainsi, $\overrightarrow{HM}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{KM}$ sur $\mathrm{dir}(\Delta)$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire sur Δ de même sens que $\overrightarrow{KF}$. Alors $HM = \overrightarrow{KM} \cdot \vec{u}$.



Donc $\forall t \in I, \left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\| = MF = MH = \overrightarrow{KM} \cdot \vec{u}$.

Donc, en dérivant, $\forall t \in I, \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \overrightarrow{FM(t)}}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} = \vec{v}(t) \cdot \vec{u}$

Soit $\forall t \in I, \vec{v}(t) \perp \left(\dfrac{\overrightarrow{FM(t)}}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} - \vec{u} \right)$

La tangente en M est donc la bissectrice des ½ droites $[MF)$ et $[MH)$