

Chapitre 13 : Espace \mathbb{R}^n

Limite et continuité des fonctions d'une partie de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls.

I Normes sur un \mathbb{R} -espace vectoriel

Pour ce paragraphe, E désigne un \mathbb{R} -ev.

A) Norme (rappels)

Définition :

Une norme sur E , c'est une application N de E dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

$$(1) \quad \forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$$

$$(2) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

$$(2) \quad \forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Il résulte aisément des propriétés (1), (2), (3) que si N est une norme sur E , on a :

$$\forall x \in E, (N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

$$\forall x \in E, N(-x) = N(x)$$

$$\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq N(x) + N(y)$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E, N(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq N(x_1) + N(x_2) + \dots + N(x_n)$$

Notation : une norme quelconque sur E est souvent notée $\| \cdot \|$.

B) Distance associée à une norme

On suppose que E est muni d'une norme notée $\| \cdot \|$. Pour tous x, y de E , on pose :

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Alors d est une distance sur E , c'est-à-dire que d est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

$$\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in E, d(y, x) = d(x, y)$$

$$\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

On dit que d est la distance associée à la norme $\| \cdot \|$.

C) Exemples de normes sur \mathbb{R}^n .

Pour chaque x de \mathbb{R}^n , on notera $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- L'application $\| \cdot \|_2$ définie sur \mathbb{R}^n par $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ est une norme sur \mathbb{R}^n : c'est la norme naturelle.
- L'application $\| \cdot \|_\infty$ définie sur \mathbb{R}^n par $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$ est aussi une norme sur \mathbb{R}^n .

En effet, $\| \cdot \|_\infty$ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , les propriétés (1) et (2) sont évidentes, et pour le (3) :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, d'où $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

D) Partie bornée, fonction bornée

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E .

- Etant donnée une partie A de E , on dit que A est bornée pour la norme $\| \cdot \|$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de A , on a $\|x\| \leq M$.
- Etant donnée une fonction f à valeurs dans E et définie sur un ensemble quelconque D , on dit que f est bornée pour la norme $\| \cdot \|$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de D , on a $\|f(x)\| \leq M$, autrement dit lorsque $\text{Im } f$ est une partie bornée de E pour la norme $\| \cdot \|$.

E) Boules

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E .

Définition :

Pour tout $A \in E$, et tout $r \in \mathbb{R}^+$, on appelle boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme $\| \cdot \|$ la partie $B(a, r)$ définie par $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$.

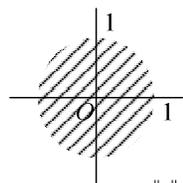
Et on appelle boule fermée de centre a et de rayon r pour la norme $\| \cdot \|$ la partie $\bar{B}(a, r)$ définie par $\bar{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$.

Remarque :

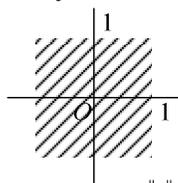
Si $r = 0$, $B(a, r)$ est vide et $\bar{B}(a, r)$ est réduit à $\{a\}$ mais si $r > 0$, $B(a, r)$ n'est pas vide (contient par exemple a)

Exemple :

Des boules de centre O et de rayon 1 dans \mathbb{R}^2



Pour la norme $\| \cdot \|_2$



Pour la norme $\| \cdot \|_\infty$

F) Normes équivalentes

Définition :

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, N_1(x) \leq aN_2(x)$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, N_2(x) \leq bN_1(x)$.

Il est évident que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E , c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple :

Dans \mathbb{R}^n , les normes $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes.

En effet, pour chaque $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n , on a, en posant $|x|_p = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$:

$$\sqrt{x_p^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{nx_p^2}, \text{ c'est-à-dire } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

En fait, sur \mathbb{R}^n , toutes les normes sont équivalentes, ce qui résulte du théorème :

Théorème (admis) :

Dans un \mathbb{R} -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Proposition :

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E , et soit A une partie de E . Alors A est bornée pour N_1 si et seulement si A est bornée pour N_2 . (Immédiat)

Par conséquent, dans \mathbb{R}^n , le caractère borné est indépendant du choix de la norme.

Proposition :

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E , alors toute boule ouverte non vide pour N_1 contient une boule ouverte non vide et de même centre pour N_2 , et vice-versa.

Démonstration :

Notons $B_1(\cdot)$ les boules ouvertes pour N_1 et $B_2(\cdot)$ les boules ouvertes pour N_2 .

Soit $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha_1 N_2(x)$

Alors, pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on a $B_2(a, \frac{r}{\alpha_1}) \subset B_1(a, r)$

(car si $N_2(x-a) < \frac{r}{\alpha_1}$, alors $N_1(x-a) < r$).

Et on peut refaire la même chose en échangeant 1 et 2.

II Eléments de topologie de \mathbb{R}^n .

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Toutes les boules considérées sont pour cette norme.

A) Voisinages d'un point de \mathbb{R}^n .

Soit a un élément de \mathbb{R}^n .

On appelle voisinage de a (dans \mathbb{R}^n) toute partie U de \mathbb{R}^n qui contient une boule ouverte non vide de centre a .

D'après l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^n , cette définition est indépendante du choix de la norme.

Proposition :

- Toute partie de \mathbb{R}^n qui contient un voisinage de a est un voisinage de a (stabilité par extension)
- Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a (stabilité par intersection finie)
- Etant donnés deux éléments distincts a et a' de \mathbb{R}^n , on peut toujours trouver un voisinage de a et un voisinage de a' qui ne se rencontrent pas (séparation des voisinages)

Démonstration :

- Soit D une partie de \mathbb{R}^n contenant un voisinage V de a .

Comme V est un voisinage de a , il contient une boule ouverte non vide de centre a , par exemple $B(a, \varepsilon)$. Alors $B(a, \varepsilon) \subset V \subset D$, donc D contient une boule ouverte non vide de centre a (à savoir $B(a, \varepsilon)$), donc est un voisinage de a .

- Soit $(V_i)_{i \in K}$ une famille de voisinages de a , indexée par K fini.

Notons $V = \bigcap_{i \in K} V_i$.

Pour tout $i \in K$, soit ε_i tel que $B(a, \varepsilon_i) \subset V_i$ (il en existe car V_i est un voisinage de a). Alors, pour $\varepsilon = \min_{i \in K} \varepsilon_i$, on a $\forall i \in K, B(a, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon_i) \subset V_i$. (En effet, pour tout $i \in K$, si $x \in B(a, \varepsilon)$, alors $\|x - a\| < \varepsilon$, donc $\|x - a\| < \varepsilon \leq \varepsilon_i$, soit $x \in B(a, \varepsilon_i)$)

Donc $B(a, \varepsilon) \subset \bigcap_{i \in K} V_i$. Donc $B(a, \varepsilon) \subset V$, donc V est un voisinage de a .

- Soient a, a' deux éléments distincts de \mathbb{R}^n .

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{\|a - a'\|}{2}$.

Alors $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) = \emptyset$.

En effet, supposons que $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \neq \emptyset$.

Soit alors $x \in B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon)$.

Alors $\|x - a\| < \varepsilon$ soit $\|a - x\| < \varepsilon$ et $\|x - a'\| < \varepsilon$. Donc $\|a - a'\| \leq \|a - x\| + \|x - a'\| < 2\varepsilon$

ce qui est impossible car $\varepsilon < \frac{\|a - a'\|}{2}$.

Pour la suite, on notera $V_n(a)$ l'ensemble des voisinages, dans \mathbb{R}^n , d'un point a de \mathbb{R}^n .

B) Ouverts de \mathbb{R}^n .

Définition :

Soit Ω une partie de \mathbb{R}^n . On dit que Ω est ouverte lorsque Ω est voisinage de chacun de ses points.

Compte tenu de la définition de voisinage, on a donc aussi l'équivalence :

Ω est ouverte $\Leftrightarrow \forall a \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset \Omega$.

La notion est indépendante du choix de la norme, puisqu'elle ne dépend que de la notion de voisinages.

Exemple :

Les boules ouvertes sont ouvertes :

Soit $B(a, \varepsilon)$ une boule ouverte.

Soit $x \in B(a, \varepsilon)$. Donc $\|x - a\| < \varepsilon$. Soit alors $\mu > 0$ tel que $\mu < \varepsilon - \|x - a\|$.

Alors $B(x, \mu) \subset B(a, \varepsilon)$. En effet :

Soit $y \in B(x, \mu)$. Alors $\|y - x\| < \mu < \varepsilon - \|x - a\|$

Donc $\|y - x\| + \|x - a\| < \varepsilon$.

Or, $\|(y - x) + (x - a)\| \leq \|y - x\| + \|x - a\|$. Donc $\|y - a\| < \varepsilon$, donc $y \in B(a, \varepsilon)$, d'où l'inclusion. Donc $B(a, \varepsilon)$ est un voisinage de x .

Donc $B(a, \varepsilon)$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouverte.

\emptyset et \mathbb{R}^n sont aussi ouverts.

Proposition :

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts indexée par un ensemble I .

Notons $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Soit $x \in \Omega$. Il existe alors $i \in I$ tel que $x \in \Omega_i$. Comme Ω_i est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_i$. Comme $\Omega_i \subset \Omega$, on a donc $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$.

Donc Ω est voisinage de x . C'est valable pour tout $x \in \Omega$. Donc Ω est ouvert.

Soit maintenant $(\Omega_i)_{i \in K}$ une famille d'ouverts indexée par un ensemble K fini.

Notons $\Omega = \bigcap_{i \in K} \Omega_i$.

Soit $x \in \Omega$. Alors $\forall i \in K, x \in \Omega_i$.

Pour tout $i \in K$, on pose alors ε_i tel que $B(x, \varepsilon_i) \subset \Omega_i$ (ce qui est possible car les ensembles sont ouverts)

Posons $\varepsilon = \min_{i \in K} \varepsilon_i$. Alors $\forall i \in K, B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset \Omega_i$. Donc $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$.

D'où le résultat.

Proposition :

Soient n intervalles ouverts I_1, I_2, \dots, I_n de \mathbb{R} .

Alors le produit cartésien $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Une telle partie est appelée un pavé ouvert.

Démonstration :

Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

Alors, pour chaque k entre 1 et n , a_k est élément de l'intervalle ouvert I_k , donc il existe $\varepsilon_k > 0$ tel que $]a_k - \varepsilon_k, a_k + \varepsilon_k[\subset I_k$.

Si on pose $\varepsilon = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \varepsilon_k$, alors on a bien $\varepsilon > 0$ et la boule ouverte de centre a et de rayon ε pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est contenue dans $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

En effet, soit $x \in B_\infty(a, \varepsilon)$ (où on a noté $B_\infty(\cdot)$ une boule ouverte pour $\|\cdot\|_\infty$)
 Alors $\|x - a\|_\infty < \varepsilon$, donc $\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k - a_k| < \varepsilon$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
 Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_k - a_k| < \varepsilon \leq \varepsilon_k$. Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in]a_k - \varepsilon_k, a_k + \varepsilon_k[\subset I_k$.
 Donc $x \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.
 Donc $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est un voisinage de a .
 Donc $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est ouvert.

C) Fermés de \mathbb{R}^n .

Soit F une partie de \mathbb{R}^n . On dit que F est un fermé lorsque le complémentaire de F dans \mathbb{R}^n est un ouvert.

Exemples, propositions :

- Les boules fermées sont fermées.
- \mathbb{R}^n et \emptyset sont fermés (et ce sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées)
- Toute intersection de fermés est un fermé, toute réunion finie de fermés est un fermé.
- Tout produit cartésien de n intervalles fermés de \mathbb{R} est un fermé de \mathbb{R}^n (qu'on appelle un pavé fermé de \mathbb{R}^n).

Démonstration :

- Soit $\bar{B}(a, \varepsilon)$ une boule fermée. Notons Ω son complémentaire dans \mathbb{R}^n .

Ainsi, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| > \varepsilon\}$.

Soit $x \in \Omega$. Soit $\mu > 0$ tel que $\mu < \|x - a\| - \varepsilon$.

Alors $B(x, \mu) \subset \Omega$. En effet, soit $y \in B(x, \mu)$.

$$\text{Alors } \|y - a\| = \|(a - x) - (y - x)\| \geq \|a - x\| - \|y - x\| \geq \|a - x\| - \underbrace{\|y - x\|}_{< \mu < \|x - a\| - \varepsilon} > \varepsilon$$

Donc $y \in \Omega$. Donc Ω est un voisinage de x . Ce résultat est valable pour tout x , donc Ω est ouvert.

- Les complémentaires de \mathbb{R}^n et \emptyset sont respectivement \emptyset et \mathbb{R}^n qui sont ouverts, donc sont fermés.
- Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille de fermés indexée par un ensemble I quelconque. Si on note $\Omega = \bigcap_{i \in I} \Omega_i$, Alors $C_{\mathbb{R}^n}(\Omega) = \bigcup_{i \in I} C_{\mathbb{R}^n}(\Omega_i)$, donc Ω est une réunion d'ouverts qui est un ouvert. On fait le même raisonnement pour une réunion finie de fermés.
- Soient n intervalles fermés I_1, I_2, \dots, I_n de \mathbb{R} .

Soit Ω le complémentaire dans \mathbb{R}^n de $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

Soit $x \in \Omega$. On note x_1, x_2, \dots, x_n ses composantes dans \mathbb{R}^n . L'un au moins des x_i est dans $C_{\mathbb{R}}(I_i)$, disons x_q où $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\varepsilon_i = 1$ si $x_i \in I_i$, et $\varepsilon_i > 0$ tel que $]x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i[\subset C_{\mathbb{R}}(I_i)$ sinon.

Alors, si on note $\varepsilon = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \varepsilon_i$, on a $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$.

En effet :

Soit $y \in B_\infty(x, \varepsilon)$ (où on a noté $B_\infty(\cdot)$ une boule ouverte pour $\|\cdot\|_\infty$).

Montrons que $y \notin I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

On a $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$.

Donc, en notant y_1, y_2, \dots, y_n les composantes de y dans \mathbb{R}^n , on a :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i - y_i| \leq \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k - y_k| < \varepsilon \leq \varepsilon_i$. Donc en particulier $|x_q - y_q| < \varepsilon_q$, soit

$y_q \in]x_q - \varepsilon_q, x_q + \varepsilon_q[\subset C_{\mathbb{R}}(I_q)$, c'est-à-dire $y_q \in C_{\mathbb{R}}(I_q)$.

Donc $y \notin I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, c'est-à-dire $y \in \Omega$. D'où l'inclusion.

Donc Ω est un voisinage de x , donc Ω est ouvert (puisque le résultat est valable pour tout x). donc $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est fermé.

D) Points intérieurs

Soit A une partie de \mathbb{R}^n .

Définition :

Etant donné $a \in \mathbb{R}^n$, on dit que a est intérieur à A lorsque A est un voisinage de a , c'est-à-dire lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$.

Proposition :

Soit A une partie de \mathbb{R}^n . L'intérieur de A est un ouvert contenu dans A ; et c'est le plus grand, au sens de l'inclusion, des ouverts contenus dans A .

Démonstration :

Déjà, $\overset{\circ}{A}$ est ouvert :

Supposons $\overset{\circ}{A}$ non vide (sinon il est bien ouvert).

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors A est un voisinage de x , il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Alors $B(x, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A}$. En effet, $B(x, \varepsilon)$ est ouverte, donc est voisinage de chacun de ses points. Donc A est voisinage de tout les points de $B(x, \varepsilon)$ (stabilité par extension), d'où l'inclusion.

De plus, il est évidemment contenu dans A .

Montrons maintenant que c'est le plus grand :

Soit Ω un ouvert contenu dans A . Soit $x \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, c'est un voisinage de x . Mais $\Omega \subset A$. Donc A est un voisinage de x . Donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc $\Omega \subset \overset{\circ}{A}$.

Il résulte en particulier de la proposition que A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

Exemple :

Dans \mathbb{R}^2 , l'intérieur de $[0;1] \times]1;2]$ est $]0;1[\times]1;2[$.

E) Points adhérents

Soit A une partie de \mathbb{R}^n .

Définition :

Etant donné $a \in \mathbb{R}^n$, on dit que a est adhérent à A lorsque tout voisinage de a rencontre A , c'est-à-dire lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A , noté \bar{A} .

Proposition :

Soit A une partie de \mathbb{R}^n . L'adhérence de A est un fermé contenant A , et c'est le plus petit, au sens de l'inclusion, des fermés contenant A .

Démonstration :

Déjà, \bar{A} contient bien A ...

Posons maintenant $\Omega = C_{\mathbb{R}^n} \bar{A}$. Montrons que Ω est ouvert.

Soit $x \in \Omega$. Alors $x \notin \bar{A}$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Alors $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. En effet : soit $y \in B(x, \varepsilon)$. Alors $B(x, \varepsilon)$ est un voisinage de y , et il ne rencontre pas A , donc $y \notin \bar{A}$, donc $y \in \Omega$.

Donc Ω est un voisinage de x . C'est valable pour tout x de Ω , donc Ω est ouvert.

Donc \bar{A} est fermé.

Soit enfin F un fermé contenant A . Montrons qu'alors $\bar{A} \subset F$.

Soit $x \in \bar{A}$, montrons que $x \in F$. Supposons que $x \notin F$. Alors $x \in C_{\mathbb{R}^n} F$, qui est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C_{\mathbb{R}^n} F$. Ainsi, $B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Mais alors $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (puisque $A \subset F$), ce qui est impossible car $x \in \bar{A}$. Donc $x \in F$. Donc $\bar{A} \subset F$. Donc \bar{A} est bien le plus petit des fermés contenant A .

Ainsi, il résulte de la définition que A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Exemples :

- Dans \mathbb{R}^2 , l'adhérence de $[0;1] \times]1;2]$ est $[0;1] \times [1;2]$.
- L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

III Commentaires et précisions sur les fonctions d'une partie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

A) Limite en un point de \mathbb{R} pour une fonction d'une partie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

On a déjà défini cette notion, dans le cours sur les fonctions vectorielles, mais ici la norme n'est pas forcément euclidienne.

Etant donné une partie D de \mathbb{R} , une fonction f de D dans \mathbb{R}^n , un point a de \mathbb{R} adhérent à D , et un élément l de \mathbb{R}^n , on a vu :

$$\lim_{x \rightarrow a} f = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$$

où $\| \cdot \|$ désignait la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

Mais, vu l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^n , il est clair que $\| \cdot \|$ peut désigner n'importe quelle norme sur \mathbb{R}^n sans que cela change la notion.

On peut même traduire la définition sous forme de voisinage, qui montre bien l'indépendance de la norme :

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_n(l), \exists U \in \mathcal{V}_1(a), f(U \cap D) \subset V$$

Remarque :

En prenant comme norme sur \mathbb{R}^n la norme $\| \cdot \|_\infty$, on retrouve immédiatement le fait que :

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_a f_k = l_k$$

$$\text{Où on a noté } l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \text{ et } \forall x \in D, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

B) Précisions sur les suites à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Notons $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^n .

Etant donnée une suite $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , nous noterons $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ les suites à valeurs réelles telles que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = (u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(n)})$ (suites coordonnées)

Définition :

Soit u une suite à valeurs dans \mathbb{R}^n , et soit $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite u converge vers l lorsque pour tout voisinage V de l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N, u_k \in V$.

Cela revient à dire : u converge vers l lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \|u_k - l\| < \varepsilon$.

Remarque :

On vérifie aisément que la définition est encore en accord avec le cours sur les fonctions vectorielles dans le cas de limite en $+\infty$ d'une fonction de $D = \mathbb{N}$ dans \mathbb{R}^n .

Ainsi, les résultats suivants sont des cas particuliers de choses déjà dites :

- u tend vers l si et seulement si la suite réelle $(\|u_k - l\|)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
- u tend vers $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ si et seulement si chaque suite coordonnée $u^{(i)}$ tend vers l_i .
- Si u tend vers l et u' tend vers l' , alors pour tout réel λ , $u + \lambda u'$ tend vers $l + \lambda l'$.

Autre remarque :

Dans le cas $n = 2$, on voit aussi que la suite à valeurs dans \mathbb{R}^2 de terme général (x_k, y_k) converge vers l'élément (a, b) de \mathbb{R}^2 revient à dire que la suite complexe de terme général $x_k + i y_k$ converge vers le complexe $a + i b$.

On a aussi les résultats suivants :

- Toute suite convergente d'éléments de \mathbb{R}^n est bornée (reprendre exactement la démonstration du cas réel en remplaçant les valeurs absolues par des $\| \cdot \|$).
- De toute suite bornée d'éléments de \mathbb{R}^n , on peut extraire une suite convergente (Théorème de Bolzano–Weierstrass ; la démonstration faite dans le cas complexe se généralise aisément à \mathbb{R}^n).

Enfin, ajoutons cette caractérisation (dite séquentielle) des points adhérents à une partie :

Proposition :

Soit A une partie de \mathbb{R}^n , et soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors a est adhérent à A si et seulement si a est la limite d'une suite convergente de points de A .

Démonstration :

• Supposons que $a = \lim u$ où u est une suite de points de A .

Soit V un voisinage de a . Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $u_k \in V$.

Donc $V \cap A$ n'est pas vide, et comme c'est valable pour tout voisinage de a , ce point est donc adhérent à A .

• Inversement, supposons a adhérent à A .

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B(a, 2^{-k}) \cap A$ n'est pas vide, et donc on peut introduire $u_k \in A$ tel que $\|u_k - a\| < 2^{-k}$, et la suite $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers a .

Conséquence :

Une partie A de \mathbb{R}^n est un fermé si et seulement si toute suite convergente de points de A a sa limite dans A . (Résulte immédiatement du fait que A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.)

IV Limite et continuité pour les fonctions d'une partie de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

A) Notations

On note $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^p , et on note aussi $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^n : c'est ce qui est à l'intérieur qui permet de distinguer.

Si n ou p vaut 1, on prendra de préférence sur \mathbb{R} la norme $| \cdot |$.

D désigne ici une partie non vide de \mathbb{R}^p , et f est une application de D dans \mathbb{R}^n . On désigne par f_1, f_2, \dots, f_n les applications coordonnées de f , c'est-à-dire les applications de D dans \mathbb{R} définies par $\forall x \in D, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Enfin, si $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ est un élément de D (qui est une partie de \mathbb{R}^p), on note $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, c'est-à-dire qu'on omet une paire de parenthèses (d'où le nom de « fonction de p variables »)

B) Limite

Dans tout ce sous paragraphe, a est un élément de \mathbb{R}^p adhérent à D .

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que f tend vers l en a lorsque pour tout voisinage V de l (dans \mathbb{R}^n), il existe un voisinage U de a (dans \mathbb{R}^p) tel que $f(D \cap U) \subset V$.

Compte tenu de ce que sont les voisinages, cela revient à dire que f tend vers l en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$$

(Et ce quel que soit le choix des normes)

On vérifie aisément les résultats suivants :

- Unicité de la limite éventuelle (séparation des voisinages)
- Si f a une limite en a , alors cette limite est dans l'adhérence de $f(D)$.
- Si $a \in D$, et si f a une limite en a , alors cette limite est $f(a)$.
- La notion de limite en a est locale :

Si U est un voisinage de a , alors f tend vers l en a si et seulement si f restreinte à $D \cap U$ tend vers l en a .

- f admet la limite l en a si et seulement si pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui converge vers a , la suite $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

- Limites et opérations simples sur les fonctions définies sur D :

Si f tend vers l en a , et si g (à valeurs dans \mathbb{R}^n) tend vers l' en a , alors $f + g$ tend vers $l + l'$ en a .

Si f tend vers l en a et si λ est un réel, alors λf tend vers λl en a .

Plus généralement, si f tend vers l en a , et si φ (à valeurs réelles) tend vers λ en a , alors $\varphi \cdot f$ tend vers λl en a .

- On montre aussi facilement le théorème de composition de limites :

Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n définie sur D , soit Φ une fonction à valeur dans \mathbb{R}^m définie sur une partie de \mathbb{R}^n contenant $f(D)$.

Si f tend vers l en a , et si Φ tend vers Λ en l , alors la fonction $\Phi \circ f$ tend vers Λ en a .

- Enfin, dans le cas $n = 1$, c'est-à-dire pour les fonctions à valeurs réelles, on a aussi les résultats classiques portant sur les inégalités :

Passage à la limite dans une inégalité : si f tend vers l en a , si g tend vers l' en a et si $f \leq g$, alors $l \leq l'$.

Théorème des gendarmes :

Si f et h tendent vers l en a , et si $f \leq g \leq h$, alors g tend vers l en a .

Pour les démonstrations de tous ces résultats, il suffit de reprendre exactement les démonstrations vues dans le cas des fonctions réelles à variable réelle – chapitre « limite en un point » –, en changeant si nécessaire les intervalles en boules (en particulier pour le 5^{ème} point, et en retirant les cas où $a, l = \pm\infty$).

De plus, deux résultats importants permettent de se ramener aux fonctions à valeurs réelles :

- f tend vers l en a si et seulement si la fonction $x \mapsto \|f(x) - l\|$ tend vers 0 en a (immédiat)
- f tend vers $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ en a si et seulement si pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction coordonnée f_k tend vers l_k en a .

En effet :

On prend sur \mathbb{R}^n la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a les équivalences :

f tend vers $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ en a

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\|_\infty < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \Rightarrow \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |f_k(x) - l_k| < \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \Rightarrow |f_k(x) - l_k| < \varepsilon)$
 \Leftrightarrow pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction coordonnée f_k tend vers l_k en a .
 D'où l'équivalence.

C) Continuité en un point

Définition :

Soit a un élément de D . On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a (cette limite étant alors $f(a)$)

Par simple traduction, dans le cas $a \in D$, des résultats sur l'éventuelle limite en a , on obtient :

- f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui converge vers a , la suite $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

- Continuité et opérations simples sur les fonctions définies sur D :

Si f et g sont continues en a , alors $f + g$ est continue en a .

Si f est continue en a , et si φ (à valeurs réelles) est continue en a , alors $\varphi \cdot f$ est continue en a .

- Et le théorème de composition de limites donne :

Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n définie sur D , soit Φ une fonction à valeur dans \mathbb{R}^m définie sur une partie de \mathbb{R}^n contenant $f(D)$.

Si f est continue en a , et si Φ est continue en $f(a)$, alors la fonction $\Phi \circ f$ est continue en a .

Enfin, pour se ramener aux fonctions réelles :

- f est continue en a si et seulement si la fonction réelle $x \mapsto \|f(x) - f(a)\|$ tend vers 0 en a .
- f est continue en a si et seulement si les fonctions coordonnées sont continues en a .

D) Fonctions continues

Définition :

On dit que f est continue (sur D) lorsque f est continue en tout point a de D .

Les résultats précédents donnent :

- Opérations sur les fonctions continues sur D :

Si f et g sont continues, alors $f + g$ est continue.

Si f est continue, et si φ (à valeurs réelles) est continue, alors $\varphi \cdot f$ est continue.

- Composition :

Si f est une fonction continue à valeurs dans \mathbb{R}^n définie sur D , si Φ est une fonction continue à valeur dans \mathbb{R}^m définie sur une partie de \mathbb{R}^n contenant $f(D)$, alors $\Phi \circ f$ est continue.

- Enfin, f est continue si et seulement si les fonctions coordonnées sont continues

Ainsi, on remarque que la nouveauté et la difficulté vient non pas du fait que les fonctions considérées sont à valeurs dans \mathbb{R}^n , mais dans le fait que leur ensemble de départ est une partie de \mathbb{R}^p .

Exemples :

- L'application identité sur \mathbb{R}^p , les applications constantes sur \mathbb{R}^p sont continues : évident
- La norme est continue, c'est-à-dire que l'application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} qui à x associe $\|x\|$ est continue (quelle que soit la norme)

En effet, pour tous x, x' de \mathbb{R}^p , on a $\left| \|x\| - \|x'\| \right| \leq \|x - x'\|$; la continuité en tout x de \mathbb{R}^p en résulte immédiatement, avec $\alpha = \varepsilon : \|x - x'\| < \alpha \Rightarrow \left| \|x\| - \|x'\| \right| < \varepsilon$.

- Pour chaque k entre 1 et p , la k -ième projection canonique de \mathbb{R}^p sur \mathbb{R} , c'est-à-dire l'application p_k de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} qui à (x_1, x_2, \dots, x_p) associe x_k est continue.

En effet, pour tous x, x' de \mathbb{R}^p , on a : $|p_k(x) - p_k(x')| = |x_k - x'_k| \leq \|x - x'\|_\infty$

La continuité de p_k en tout x de \mathbb{R}^p en résulte immédiatement (par le théorème des gendarmes, vu le théorème précédent)

- Ainsi, compte tenu de cela et des résultats portant sur les opérations sur les fonctions continues, la continuité sur \mathbb{R}^3 d'une application du genre

$$(x, y, z) \mapsto \frac{3x + \sin(xy + z^3)}{\sqrt{1 + y^2 z^2}} \text{ est évidente.}$$

En détails :

L'application $(x, y, z) \mapsto z^3$ est continue (sur \mathbb{R}^3) et à valeurs dans \mathbb{R} ;

L'application $\varphi : (x, y, z) \mapsto x$ est continue et à valeurs dans \mathbb{R} , et l'application $f : (x, y, z) \mapsto y$ est aussi continue et à valeurs dans \mathbb{R} , donc $\varphi.f$ est continue (sur \mathbb{R}^3) et à valeurs dans \mathbb{R} .

Donc $(x, y, z) \mapsto xy + z^3$ est continue et à valeurs dans \mathbb{R} .

Or, l'application $u \mapsto \sin u$ est continue sur \mathbb{R} , et à valeurs dans \mathbb{R} . Donc $(x, y, z) \mapsto \sin(xy + z^3)$ est continue (sur \mathbb{R}^3) et à valeurs dans \mathbb{R} .

De plus, l'application $(x, y, z) \mapsto 3x$ est continue et à valeurs dans \mathbb{R} .

Il en résulte que $\psi : (x, y, z) \mapsto 3x + \sin(xy + z^3)$ est continue et à valeurs dans \mathbb{R} .

D'autre part, l'application $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}$ est continue sur \mathbb{R} , et l'application

$(x, y, z) \mapsto yz$ est continue sur \mathbb{R}^3 et à valeurs dans \mathbb{R} . Donc $g : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + y^2 z^2}}$

est continue sur \mathbb{R}^3 .

Donc $\psi.g$ est continue sur \mathbb{R}^3 .

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{sinon} \end{cases}$

La continuité de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est encore évidente.

En $(0,0)$: pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$|f(x,y)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Et l'inégalité est encore valable pour $(x,y) = (0,0)$.

De plus, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue en $(0,0)$, donc $\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y) \mapsto (0,0)} 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $|f(x,y)| \xrightarrow{(x,y) \mapsto (0,0)} 0 = f(0,0)$.

Ajoutons maintenant deux résultats importants sur les fonctions continues (on travaille toujours sur les fonctions d'une partie de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n :

Théorème (admis, vu en spé) :

L'image d'une partie fermée et bornée par une fonction continue est une partie fermée et bornée.

Conséquence :

Toute fonction réelle f continue sur une partie (non vide) fermée et bornée de \mathbb{R}^p est bornée et atteint ses bornes.

En effet, les bornes inférieures et supérieures d'une partie non vide et bornée de \mathbb{R} sont dans l'adhérence de cette partie, donc les parties non vides fermées et bornées de \mathbb{R} contiennent leurs bornes inférieures et supérieures.

Théorème :

L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n est un ouvert. L'image réciproque d'un fermé par une fonction continue de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n est un fermé.

Démonstration :

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue.

- Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $a \in f^{-1}(\Omega)$. Alors $f(a) \in \Omega$, et comme Ω est ouvert, il constitue un voisinage de $f(a)$ dans \mathbb{R}^n . Comme f est continue en a , on peut donc introduire un voisinage U de a dans \mathbb{R}^p tel que $f(U) \subset \Omega$. Mais alors $f^{-1}(\Omega)$ contient U , et donc est un voisinage de a . Comme c'est valable pour tout $a \in f^{-1}(\Omega)$, $f^{-1}(\Omega)$ est bien un ouvert.
- Soit F un fermé de \mathbb{R}^n . Soit Ω le complémentaire de F dans \mathbb{R}^n . Ω est ouvert, donc, selon le résultat précédent, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert. Or, de façon purement logique, $f^{-1}(F)$ est le complémentaire de $f^{-1}(\Omega)$ dans \mathbb{R}^p :

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{R}^p}(f^{-1}(\Omega)) &= \{x \in \mathbb{R}^p, x \notin f^{-1}(\Omega)\} = \{x \in \mathbb{R}^p, f(x) \notin \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^p, f(x) \in F\} = \{x \in \mathbb{R}^p, x \in f^{-1}(F)\} \\ &= f^{-1}(F) \end{aligned}$$

C'est donc le complémentaire d'un ouvert, c'est-à-dire d'un fermé.

Conséquence :

Si f est une fonction réelle continue sur \mathbb{R}^p , alors pour tout réel α , l'ensemble des (x_1, x_2, \dots, x_p) de \mathbb{R}^p tels que $f(x_1, x_2, \dots, x_p) > \alpha$ est un ouvert de \mathbb{R}^p et l'ensemble des (x_1, x_2, \dots, x_p) de \mathbb{R}^p tels que $f(x_1, x_2, \dots, x_p) \geq \alpha$ est un fermé de \mathbb{R}^p .

En effet, $]\alpha, +\infty[$ et $[\alpha, +\infty[$ sont respectivement un ouvert et un fermé de \mathbb{R} .

E) Applications partielles et continuité

Soit toujours $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in D$.

Pour chaque entier k entre 1 et p , on note $D_{a,k}$ l'ensemble des réels t tels que $(a_1, a_2, \dots, \underset{\substack{k\text{-ième} \\ \text{place}}}{t}, \dots, a_p) \in D$, et $\varphi_{a,k}$ l'application de $D_{a,k}$ dans \mathbb{R}^n qui à t associe $f(a_1, a_2, \dots, \underset{\substack{k\text{-ième} \\ \text{place}}}{t}, \dots, a_p)$. $\varphi_{a,k}$ s'appelle la k -ième application partielle associée à f en a .

Définition :

Si l'application $\varphi_{a,k}$ est continue en a_k , on dit que f est, au point a , continue par rapport à la k -ième variable.

Proposition :

Si f est continue en a , alors f est, en a , continue par rapport à chaque variable.

Démonstration :

On peut écrire que $\varphi_{a,k} = f \circ \delta_{a,k}$ où $\delta_{a,k}$ est l'application qui à t associe $(a_1, a_2, \dots, t, \dots, a_p)$. Or, cette application est continue, donc on obtient le résultat par composition : $\delta_{a,k}$ est continue en a_k , donc si f est continue en $a = \delta_{a,k}(a_k)$, alors $\varphi_{a,k} = f \circ \delta_{a,k}$ est continue en a_k .

Attention : la réciproque de la proposition est fautive. Cela signifie que l'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables ne se ramène pas à l'étude de la continuité de fonctions d'une variable.

Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Alors les applications partielles en $(0, 0)$ sont les applications $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$, qui sont nulles, donc f est, en $(0, 0)$, continue par rapport à chaque variable. Mais si $x \neq 0$, alors $f(x, x) = \frac{1}{2}$, et il en résulte alors que f n'est pas continue en $(0, 0)$:

Comme $f(0, 0) = 0$, si f était continue en $(0, 0)$, elle tendrait vers 0 en $(0, 0)$. Mais si on prend $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on ne trouvera jamais $\alpha > 0$ tel que $\|(x, y)\|_\infty < \alpha \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon$ (l'implication sera toujours fautive avec $(x, y) = (\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$).

Autre manière : comme $x \mapsto (x, x)$ est évidemment continue, si f était continue en $(0, 0)$, alors d'après le théorème de composition l'application $x \mapsto f(x, x)$ serait continue en 0, ce qui n'est évidemment pas le cas (nulle en 0 et constante non nulle sur \mathbb{R}^*)