Chapitre 15 : Champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$

Définition, rappels :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Un champ de vecteurs sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}^3$.
C'est donc une application $\vec{F}:\begin{array}{c}\Omega\to\mathbb{R}^3\\(x,y,z)\mapsto(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\end{array}$ où *X*, *Y*, *Z* (applications coordonnées) sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.
On dira que $\vec{F}$ est de classe C^k lorsque chaque application coordonnée est de classe C^k.
Si $\vec{F}$ est de classe C^k ($k\geq 1$), on définit :
$\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial x}(x,y,z)=\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}(x,y,z),\dfrac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z),\dfrac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z)\right)$, et de même pour les dérivées partielles par rapport à *y* et *z*, et pour les dérivées partielles d'ordre supérieur.
On conserve les notations dans la suite du chapitre.

I Divergence d'un champ de classe C^1.

Si $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ est un champ de classe C^1, et si $M=(x,y,z)\in\Omega$, on appelle divergence de $\vec{F}$ en *M*, et on note $\mathrm{Div}_M(\vec{F})$ le réel défini par :

$$\mathrm{Div}_M(\vec{F})=\frac{\partial X}{\partial x}(M)+\frac{\partial Y}{\partial y}(M)+\frac{\partial Z}{\partial z}(M)$$

Et on note aussi $\mathrm{Div}(\vec{F})$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à *M* associe $\mathrm{Div}_M(\vec{F})$.

II Rotationnel d'un champ de classe C^1.

Soit $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un champ de classe C^1, et soit $M=(x,y,z)\in\Omega$.

Le rotationnel de $\vec{F}$ en *M*, noté $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F})$, est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^3,\mathrm{Div}_M(\vec{F}\wedge\vec{u})=\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F})\cdot\vec{u}$, $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne naturelle.

Cette définition a bien un sens, puisqu'on vérifie immédiatement que l'application $\vec{u}\mapsto\mathrm{Div}_M(\vec{F}\wedge\vec{u})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Expression du rotationnel :
Posons $\vec{u}=(a,b,c)$.
Alors $(\vec{F}\wedge\vec{u})=(cY-bZ,aZ-cX,bX-aY)$.
Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Div}_M(\vec{F}\wedge\vec{u})&=c\frac{\partial Y}{\partial x}(M)-b\frac{\partial Z}{\partial x}(M)+a\frac{\partial Z}{\partial y}(M)-c\frac{\partial X}{\partial y}(M)+b\frac{\partial X}{\partial z}(M)-a\frac{\partial Y}{\partial z}(M)\\&=a\left[\frac{\partial Z}{\partial y}(M)-\frac{\partial Y}{\partial z}(M)\right]+b\left[\frac{\partial X}{\partial z}(M)-\frac{\partial Z}{\partial x}(M)\right]+c\left[\frac{\partial Y}{\partial x}(M)-\frac{\partial X}{\partial y}(M)\right]\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F})=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}(M)-\frac{\partial Y}{\partial z}(M),\frac{\partial X}{\partial z}(M)-\frac{\partial Z}{\partial x}(M),\frac{\partial Y}{\partial x}(M)-\frac{\partial X}{\partial y}(M)\right)$

On note $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}(\vec{F})$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à M associe $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F})$.

III Expressions symboliques

Si on note $\vec{\nabla}$ (Nabla) le « vecteur » $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, on a symboliquement :

$\mathrm{Div}(\vec{F})=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ et $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}(\vec{F})=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$

Et aussi, si $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est de classe C^1, on a, toujours symboliquement : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f=\vec{\nabla}f$.

IV Potentiels scalaires

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs sur Ω, et soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1.

On dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel scalaire *f*, ou encore que *f* est un potentiel scalaire de $\vec{F}$ lorsque $\vec{F}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$.

C'est-à-dire : $\forall M\in\Omega,\vec{F}(M)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Théorème :

Si $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ est de classe C^1 et dérive d'un potentiel, alors le rotationnel de $\vec{F}$ est nul. Autrement dit, si $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est de classe C^1, alors $\forall M\in\Omega,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)=\vec{0}$

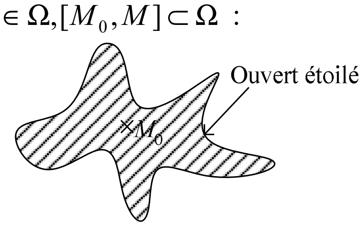
Démonstration :

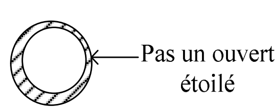
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\vec{0}$ d'après le théorème de Schwarz.

Réciproque (admise) sur un ouvert étoilé :

Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire tel qu'il existe $M_0\in\Omega$ tel que $\forall M\in\Omega,[M_0,M]\subset\Omega$:





Soit $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un champ de classe C^1 dont le rotationnel est nul. Alors $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.

V Formules

(1) Linéarité : les opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, Div et $\overrightarrow{\text{Rot}}$ sont linéaires.

(2) Composition :

Si f est de classe C^2 :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}\,,\ \text{Div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \ \text{(Laplacien de } f\text{)}$$

Si $\vec{F}$ est de classe C^2 : $\text{Div}(\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{F}) = 0$ (démonstration avec Schwarz)

(3) Produits : démonstrations par simple calcul…

Si f, g sont de classe C^1, $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f.\overrightarrow{\text{grad}}\, g + g.\overrightarrow{\text{grad}}\, f$

Si f est de classe C^1, et $\vec{F}$ de classe C^1, on a :

$$\text{Div}(f.\vec{F}) = f\text{Div}(\vec{F}) + (\overrightarrow{\text{grad}} f)\cdot\vec{F}$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(f.\vec{F}) = f\,\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{F}) + (\overrightarrow{\text{grad}} f)\wedge\vec{F}$$

Symboliquement, les formules donnent :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) = 0$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f.(\vec{\nabla} g) + (\vec{\nabla} f)g$$

$$(\vec{\nabla} f.\vec{F}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) + (\vec{\nabla} f)\cdot\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(f.\vec{F}) = f(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) + (\vec{\nabla} f)\wedge\vec{F}$$