Chapitre 16 : Intégrales curvilignes, formes différentielles

Ici, $p = 2$ ou 3.

I Intégrale curviligne le long d'une courbe

Soit $\gamma : \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{R}^p \\ t \mapsto M(t)\end{array}$ un arc paramétré de classe C^1, de support *C*.

Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On appelle intégrale curviligne de *f* le long de γ, et on note $\int_\gamma f(M)ds$ le réel défini par

$$\int_\gamma f(M)ds = \int_a^b f(M(t))\tfrac{ds}{dt}(t)dt \text{ (où } \frac{ds}{dt}(t) = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)\right\|\text{)}$$

Admis :

Si le paramétrage est « raisonnable » (en particulier pas de points doubles autres qu'en des points isolé), cette intégrale ne dépend que de *C*.

Généralisation :

Aux arcs continus et de classe C^1 par morceaux,

c'est-à-dire que γ est continu et il existe une subdivision $a = a_1 < a_2 < ... < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \gamma_{/[a_{i-1},a_i]}$ est de classe C^1.

(On généralise par addition…)

Interprétation :

s étant une abscisse curviligne, ds représente « le déplacement élémentaire sur *C* ».

Ainsi, $\int_\gamma f(M)ds = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(M(t_i))(s(t_i) - s(t_{i-1}))$ (admis)

où, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $t_i = a + i.\frac{b-a}{n}$ (subdivision régulière de $[a,b]$).

Utilité :

Exemple : un fil dont la forme est donné par la courbe paramétrée γ, de densité linéique $p : M \mapsto p(M)$ (fonction continue de *M*) a pour masse totale $\int_\gamma p(M)ds$.

II Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

A) Définition

Une forme différentielle sur Ω est une application de Ω dans $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Si par exemple $p = 3$, on sait que $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ (dual de $\mathbb{R}^3$) est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, dont une base naturelle est constituée des 3 projecteurs : $(x, y, z) \mapsto x$, $(x, y, z) \mapsto y$ et $(x, y, z) \mapsto z$, qu'on a notés en analyse dx, dy, dz.

Ainsi, une forme différentielle ω sur Ω s'écrit :
$\omega = Adx + Bdy + Cdz$ où *A*, *B*, *C* sont 3 applications de Ω dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \omega(x,y,z) = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$.
On dit que ω est de classe C^k lorsque *A*, *B*, *C* le sont.
De même si $p = 2$, une forme différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ s'écrit :
$\omega = Adx + Bdy$ où *A* et *B* sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- ω définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \omega(x,y) = (2x+1)dx + xydy$ est une forme différentielle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ est une forme différentielle continue sur Ω.

B) Formes différentielles exactes

Définition :

Soit ω une forme différentielle continue sur Ω. On dit que ω est exacte lorsqu'il existe *f*, de classe C^1 sur Ω, telle que $\omega = df$.

Autrement dit, avec $p = 2$ par exemple :

La forme différentielle ω définie par $\forall (x,y) \in \Omega, \omega(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ (où *A* et *B* sont continues) est exacte si et seulement si il existe *f*, de classe C^1, telle que $\forall (x,y) \in \Omega$, $A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $B(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

C) Intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe

Soit $\gamma : \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{R}^p \\ t \mapsto M(t)\end{array}$ un arc de classe C^1 et de support *C*.

On prend les notations habituelles :

On pose $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(M(t))(\vec{v}(t))dt$.

Attention : $\omega \in \mathfrak{F}(\Omega, L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}))$, $\omega(M(t)) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ et $\omega(M(t))(\vec{v}(t)) \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, dans le cas $p = 2$:

Si $\forall (x,y) \in \Omega, \omega(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, alors :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [A(x(t),y(t)).x'(t) + B(x(t),y(t)).y'(t)]dt$$

Admis :

Si le paramétrage est « raisonnable », cette intégrale ne dépend que de *C* et de l'orientation de *C* définie par ce paramétrage (l'intégrale est changée en son opposée si la paramétrisation inverse l'orientation de *C*).

Lien avec les intégrales curvilignes de fonctions :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(M(t))(\tfrac{ds}{dt}(t)\vec{T}(t))dt = \int_a^b \omega(M(t))(\vec{T}(t))\tfrac{ds}{dt}(t)dt = \int_\gamma \omega(M)(\vec{T}(M))ds$$

On peut ici encore généraliser aux arcs continus et C^1 par morceaux, par addition.

Cas où ω est exacte :

Théorème :

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, de classe C^1, et soit $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^p$ continue et de classe C^1 par morceaux, de support contenu dans Ω.

Alors $\int_\gamma df = f(B)-f(A)$, où A est le point de γ de paramètre *a*, B celui de paramètre *b*.

En particulier, si γ est fermé (c'est-à-dire $A=B$), $\int_\gamma df = 0$.

Démonstration :

Avec les notations précédentes, dans le cas $p=2$ par exemple :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)).x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).y'(t)\right]}_{\text{dérivée en } t \text{ de } t\mapsto f(x(t),y(t))} dt = \left[f(x(t),y(t))\right]_a^b = f(B)-f(A)$$

III Circulation d'un champ de vecteurs

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et soit $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^0.

On a : $\forall(x,y,z)\in\Omega, \vec{F}(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$

Soit ω la forme différentielle $\omega = Xdx + Ydy + Zdz$.

Alors $\int_\gamma \omega$ est aussi noté $\int_\gamma \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dM}$, appelé circulation de $\vec{F}$ le long de γ.

Justification, interprétation :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \left[X(M(t)).x'(t) + Y(M(t)).y'(t) + Z(M(t)).z'(t)\right]dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(M)\cdot\vec{v}(t).dt \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \vec{F}(M(t_i))\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\end{aligned}$$

Où $t_i = a + i.\frac{b-a}{n}$ et $M_i = M(t_i)$.

(La dernière égalité est admise, mais intuitivement claire)

Ainsi, le théorème du paragraphe précédent s'écrit aussi :

$\int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}_M f\cdot\overrightarrow{dM} = f(B)-f(A)$ (circulation d'un champ dérivant d'un potentiel)

où $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est de classe C^1.