



Chapitre 1 : Les réels

I Préliminaires

1. Supposé connu : l'ensemble \mathbb{R} qui contient \mathbb{Q} , les opérations $+$, \times , ...
2. Supposé connue : la relation d'ordre \leq sur \mathbb{R} qui constitue un ordre total :
 - La relation \leq est compatible avec $+$, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, (x_1 \leq x_2 \text{ et } x_3 \leq x_4) \implies (x_1 + x_3 \leq x_2 + x_4) \quad (1.1)$$

Il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0 \iff -x \geq 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Supposons $x \leq 0$. Comme $-x \leq -x$, on a : $x + (-x) \leq 0 + (-x)$, soit $-x \geq 0$.

Supposons $-x \geq 0$. Comme $x \leq x$, on a : $x + (-x) \geq 0 + x$, soit $0 \geq x$.

- La relation \leq n'est pas compatible avec \times , sauf restreinte à \mathbb{R}_+ :

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_+^4, (x_1 \leq x_2 \text{ et } x_3 \leq x_4) \implies (x_1 \times x_3 \leq x_2 \times x_4) \quad (1.2)$$

Il en résulte que $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}_+, x_1 \leq x_2 \implies ax_1 \leq ax_2$:

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}_+$.

Supposons $x_1 \leq x_2$. Alors $0 \leq x_2 - x_1$.

De plus, $0 \leq a$. Donc $0 \times 0 \leq a(x_2 - x_1)$, soit $ax_1 \leq ax_2$.

3. Supposé connu : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. Théorème fondamental, admis :

Théorème (de la borne supérieure) :

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

II Répartition des entiers et des rationnels dans \mathbb{R} .

A) Partie entière d'un réel

Lemme :

Pour tout réel x , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$. Alors \mathbb{N} est une partie non vide, majorée de \mathbb{R} donc \mathbb{N} admet une borne supérieure α (théorème fondamental). Alors $\alpha - 1$ étant strictement plus petit que α , il ne majore pas \mathbb{N} . Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha - 1 < n$. Donc $\alpha < n + 1$, ce qui est contradictoire, puisque $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Théorème, définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des éléments k de \mathbb{Z} tels que $k \leq x$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$, admet un plus grand élément. Ce plus grand élément est la partie entière de x , notée $[x]$, $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$. Alors :

- \mathcal{E} est une partie de \mathbb{Z} .
- \mathcal{E} est non vide : selon le lemme, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-x < n$. Alors $-n < x$, donc $-n \in \mathcal{E}$.
- \mathcal{E} est majorée en tant que partie de \mathbb{Z} : selon le lemme, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x < m$. Alors $\forall k \in \mathcal{E}, k \leq x < m$, donc m majore \mathcal{E} .

On retiendra :

- La partie entière de x est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x .
- On a donc, pour tout $p \in \mathbb{Z} : p = [x] \iff p \leq x < p + 1$

Remarque :

le lemme peut être oublié :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < [x] + 1 \tag{1.3}$$

B) Répartition des rationnels dans \mathbb{R} .

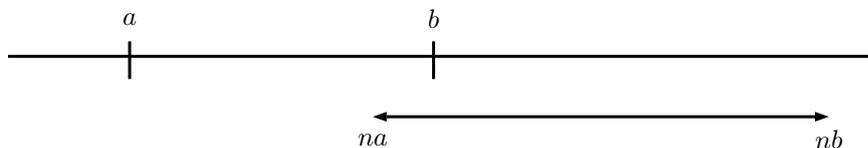
Théorème :

Entre deux réels distinct, il y a toujours un rationnel ou encore :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \iff \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < b \tag{1.4}$$

Démonstration :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $a < b$.



- On peut introduire $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nb - na > 1$ (prendre par exemple $n = 1 + \left\lceil \frac{1}{b-a} \right\rceil$). Ainsi, $n > \frac{1}{b-a}$
- Comme $nb - na > 1$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $na < p < nb$ (par exemple $p = [na] + 1$, puisque $[na] \leq na < \underbrace{[na] + 1}_p \leq na + 1 < nb$)
- Ainsi, $a < \frac{p}{n} < b$, et $\frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$.

Conséquence :

Entre deux réels distincts, il y a une infinité de rationnels.

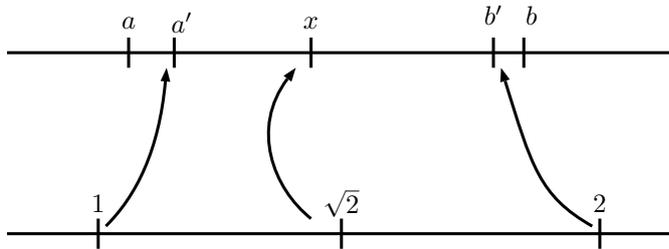
Théorème :

Entre deux réels distincts, il y a toujours un irrationnel ou encore :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \iff \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < x < b \tag{1.5}$$

Démonstration :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $a < b$.



- Déjà, on introduit $(a', b') \in \mathbb{Q}^2$ tels que $a < a' < b' < b$
- On introduit ensuite $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$ avec $\alpha > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a' \\ 2\alpha + \beta = b' \end{cases} \tag{1.6}$$

(il en existe : $\alpha = b' - a'$ et $\beta = 2a' - b'$ conviennent).

- Alors, comme $1 < \sqrt{2} < 2$, on a $\alpha + \beta < \alpha\sqrt{2} + \beta < 2\alpha + \beta$, soit $a' < \alpha\sqrt{2} + \beta < b'$. Et de plus $\alpha\sqrt{2} + \beta \notin \mathbb{Q}$ (Si $\alpha\sqrt{2} + \beta = M \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \frac{M-\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}$), d'où le résultat.

Conséquence :

Entre deux réels distincts, il y a une infinité d'irrationnels.

III Le théorème de la borne supérieure

Rappel :

Soit A une partie de \mathbb{R} , l un réel. Dire que l est la borne supérieure de A , c'est dire que l est le plus petit majorant de A . Ou encore :

$$\begin{aligned} l = \sup(A) &\iff \begin{cases} l \text{ est un majorant de } A \\ \text{et c'est le plus petit} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq l \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, (\forall x \in A, x \leq z) \implies l \leq z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq l \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, z < l \implies \exists x \in A, z < x \end{cases} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Exemple :

1. Soit $A =]0, 1[$, montrons que 1 est la borne supérieure de A .

Déjà, $\forall x \in A, x \leq 1$, donc 1 majore A .

Soit $z < 1$, montrons qu'alors z ne majore pas A :

- si $z \leq 0$, z ne majore pas A , car par exemple $\frac{1}{2} \in A$ et $z < \frac{1}{2}$.

- si $z > 0$, alors le réel $y = \frac{z+1}{2}$ est tel que $0 < z < y < 1$. Donc $y \in A$ et $z < y$, donc z ne majore pas A .

Donc 1 est la borne supérieure de A .

2. Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, montrons que A admet 0 comme borne inférieure.

Déjà, 0 minore A . De plus, 0 est le plus grand minorant de A . En effet, soit $a > 0$. On peut alors introduire $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{a}$ (par exemple $n = [\frac{1}{a}] + 1$). Alors $\frac{1}{n} \in A$, et $\frac{1}{n} < a$. Donc a ne minore pas A . Donc 0 est la borne inférieure de A .

Théorème :

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Démonstration :

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide. Supposons A minorée. Notons alors $B = \{-x, x \in A\}$. Alors : (1) B est majorée et (2) non vide. Donc B admet une borne supérieure l , (3) et donc $-l$ est la borne inférieure de A . En effet :

1. Soit m un minorant de A . Donc $\forall x \in A, x \geq m$, donc $\forall x \in A, -x \leq -m$. Comme $\forall x \in A, -x \in B$, on a $\forall x \in B, x \leq -m$. Donc $-m$ majore B .
2. Soit $a \in A$. Comme $A \subset \mathbb{R}$, $-a$ existe, et, par définition de B , $-a \in B$. Donc B est non vide.
- 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in B, x \leq l \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, z < l \implies \exists x \in B, z < x \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in B, -l \leq -x \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, -l < -z \implies \exists x \in B, -x < -z \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Remarque :

L'ensemble des majorants de \mathbb{R} est \emptyset . \emptyset n'a pas de plus petit élément, donc \mathbb{R} n'a pas de borne supérieure.

L'ensemble des majorants de \emptyset est \mathbb{R} . (puisque pour tout $l \in \mathbb{R}$, on a « $\forall x \in \emptyset, x \leq l$ »). \mathbb{R} n'a pas de plus petit élément, donc \emptyset n'a pas de borne supérieure.

Rappel :

Soit A une partie de \mathbb{R} . On suppose que A a une borne supérieure. Alors A admet un plus grand élément si et seulement si $\sup(A) \in A$. Dans ce cas, $\sup(A) = \max(A)$.

IV Valeur absolue

A) Généralités

Définition :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. |x| \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \in \mathbb{R}_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration (des deux dernières propriétés) :

Troisième Si $x \geq 0, y \geq 0$, alors $xy \geq 0, |xy| = xy = |x||y|$

Si $x \geq 0, y \leq 0$, alors $xy \leq 0, |xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$

Si $x \leq 0, y \leq 0$, alors $xy \geq 0, |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

(vus les rôles symétriques, le dernier cas se ramène au deuxième)

Quatrième Si $x + y \geq 0, |x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ (car $|x| = \max(-x, x)$, donc $x \leq |x|$)

Si $x + y \leq 0, |x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$ (idem, $-x \leq |x|$)

Conséquence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

Démonstration :

La première conséquence se montre par récurrence. Pour la deuxième :

- 2^{ème} inégalité :

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| \quad (1.9)$$

- 1^{ère} inégalité :

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad (1.10)$$

Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$.

De même, $|y| - |x| \leq |x - y|$, c'est-à-dire $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. On a donc deux inégalités de la forme :

$-A \leq B, A \leq B$. Donc $\max(-A, A) \leq B$. Donc $|A| \leq B$, d'où la deuxième inégalité.

B) Parties bornées de \mathbb{R} : compléments

Soient $x, a \in \mathbb{R}$; on a l'équivalence $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

Proposition :

soit A une partie de \mathbb{R} . Alors A est bornée si et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq m$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq m$. Donc il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A, -m \leq x \leq m$.

Donc $-m$ minore A et m majore A .

Supposons que A est bornée. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, a \leq x \leq b$. Posons $m = \max(|a|, |b|)$.

Alors, pour tout x de $A, -m \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq m$, donc $|x| \leq m$.

Remarque :

$(\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leq m) \iff$ l'ensemble des valeurs absolues des éléments de A est majoré.

V Les intervalles de \mathbb{R}

Définition :

Soit A une partie de \mathbb{R} .

On dit que A est convexe lorsque $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \implies z \in A)$

Proposition :

Toute intersection de parties convexes de \mathbb{R} est une partie convexe de \mathbb{R} .

Démonstration :

Soit K un ensemble quelconque, et $(A_k)_{k \in K}$ une famille de parties convexe de \mathbb{R} , indexée par K . Montrons que $A = \bigcap_{k \in K} A_k$ est une partie convexe de \mathbb{R} . (rappel : $\bigcap_{k \in K} A_k = \{x \in \mathbb{R}, \forall k \in K, x \in A_k\}$)

Soient $x, y \in A, z \in \mathbb{R}$, supposons que $x \leq z \leq y$. Montrons que $z \in A$.

Soit $k \in K$. Alors $x \in A_k, y \in A_k$. Or, A_k est convexe. Donc $z \in A_k$. C'est valable pour tout k , donc $z \in A$.

Théorème :

Les parties convexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles de \mathbb{R} , c'est-à-dire les parties du type :

$$\begin{aligned} \emptyset \quad \{a\} = [a, a] \quad [a, b] \quad [a, b[\quad]a, b] \quad]a, b[\quad] - \infty, a[\quad] - \infty, a[\quad]a, +\infty[\quad [a, +\infty[\quad \mathbb{R} =] - \infty, +\infty[\end{aligned} \tag{1.11}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Démonstration :

Déjà il est immédiat que les intervalles sont des parties convexes de \mathbb{R} .

Soit A une partie convexe de \mathbb{R} . Montrons que A est un intervalle.

Si $A = \emptyset$, ok.

Sinon $A \neq \emptyset$: Soit alors $a \in A$, et notons $A_1 = [a, +\infty[\cap A$.

Alors déjà A_1 est intersection de deux convexes, donc est un convexe. On va montrer que A_1 est un intervalle du type $[a, \dots]$:

- A_1 est non vide (il contient a).
- soit A_1 est majoré ; il a alors une borne supérieure b . Montrons que $[a, b[\subset A_1$. Soit $x \in [a, b[$. Alors $x < b$. Or, b est le plus petit majorant de A_1 , donc x ne majore pas A_1 . Il existe donc $y \in A_1$ tel que $x < y$. Donc $a \leq x < y$. Or, $a, y \in A_1$ et A_1 est convexe. Donc $x \in A_1$, d'où l'inclusion. Ainsi, $[a, b[\subset A_1 \subset [a, b]$ (la deuxième inclusion est due au fait que a minore A_1 et b majore A_1).
Donc $A_1 = [a, b[$ ou $A_1 = [a, b]$.
- Soit A_1 n'est pas majorée ; montrons alors que $A_1 = [a, +\infty[$.
Déjà, par construction de A_1 , $[a, +\infty[\subset A_1$. Montrons l'autre inclusion :
Soit $x \in A_1$. x n'est pas un majorant de A_1 , donc il existe $y \in A_1$ tel que $x < y$. Ainsi, $a \leq x < y$. Comme A_1 est convexe, $x \in A_1$, d'où l'autre inclusion.

Finalement, A_1 est un intervalle du type $[a, \dots]$.

De même, on peut montrer que $A_2 =]-\infty, a] \cap A$ est un intervalle du type $]\dots, a]$. Et, comme $A = A_1 \cup A_2$, on voit que A est un intervalle.

Remarque :

Ne sont pas des intervalles :

$$\mathbb{R}^*, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Q}, \quad]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\text{ où } a < b \quad (1.12)$$