



Chapitre 4 : Rudiments de topologie (sur \mathbb{R} et \mathbb{C})

I Notion de boule ouverte, fermée

Dans \mathbb{C} : Soit $a \in \mathbb{C}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre a et de rayon ε est l'ensemble $B(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < \varepsilon\}$.

Dans \mathbb{R} : Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre a et de rayon ε est l'ensemble $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon\}$.

On définit aussi la boule fermée de centre a et de rayon ε comme étant :

Dans \mathbb{C} : $\bar{B}(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq \varepsilon\}$.

Dans \mathbb{R} : $\bar{B}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon\}$.

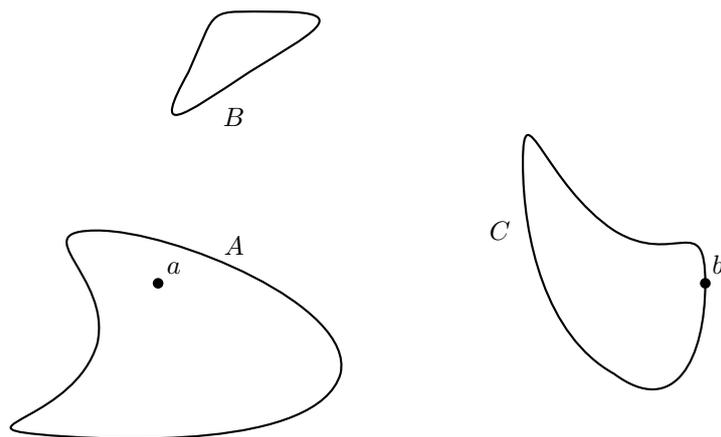
On étend la définition de boules : $\bar{B}(a, 0) = \{a\}$ et $B(a, 0) = \emptyset$.

II Notion de voisinage

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (au choix)

Définition :

Soit A une partie de \mathbb{K} . Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que A est un voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.



Sur le dessin :

A est un voisinage de a , B n'est pas un voisinage de a , mais $A \cup B$ en est un.

C n'est pas un voisinage de b : il faut qu'une boule ouverte soit incluse dans C .

Propriétés :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

On note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

- $V(a)$ est stable par extension, c'est-à-dire :
Si $V \in V(a)$, et si $V \subset W$, alors $W \in V(a)$
- $V(a)$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire :
Si $V \in V(a)$, et si $W \in V(a)$, alors $V \cap W \in V(a)$.
Plus généralement, si $V_1, V_2, \dots, V_n \in V(a)$, alors $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in V(a)$.
Mais ce n'est pas valable pour une infinité : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[0, 1 + \frac{1}{n}[$ est un voisinage de 1, mais $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 + \frac{1}{n}[\notin V(1)$.
En effet : Soient $V, W \in V(a)$.
Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$, et $\varepsilon' > 0$ tel que $B(a, \varepsilon') \subset W$.
Alors, pour $\alpha = \min(\varepsilon, \varepsilon')$, on a $B(a, \alpha) \subset V \cap W$.
- Séparabilité de voisinages : Soient $a, a' \in \mathbb{K}$, avec $a \neq a'$. Il existe alors $V \in V(a)$, $W \in V(a')$ tels que $V \cap W = \emptyset$.
Démonstration :
 $|a' - a| > 0$. On peut choisir ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{|a' - a|}{2}$.
Alors $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) = \emptyset$ et $B(a, \varepsilon) \in V(a)$, $B(a', \varepsilon) \in V(a')$. D'où l'existence.

III Les ouverts, les fermés

A) Les ouverts

Définition :

Soit $\Omega \subset \mathbb{K}$. On dit que Ω est ouvert lorsque Ω est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire lorsque $\forall a \in \Omega, \Omega \in V(a)$.

Exemple :

- Les boules ouvertes sont ouvertes.

Démonstration :

Pour $B(a, 0)$, on a bien le résultat ($B(a, 0) = \emptyset$!)

Soit Ω une boule ouverte de centre $a \in \mathbb{K}$ et de rayon $r > 0$.

Montrons alors que Ω est ouvert.

Soit $x \in \Omega$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < r - |a - x|$ (ce qui est possible car $|a - x| < r$).

Alors $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. En effet, pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$, on a :

$$|a - x| \leq |a - x| + \underbrace{|x - y|}_{< \varepsilon < r - |a - x|} < r \tag{4.1}$$

Donc $\Omega \in V(x)$. Donc Ω est voisinage de chacun de ses points.

- \mathbb{K} est ouvert.
- Exemples d'ouverts de \mathbb{R} :

$$\emptyset, \mathbb{R},]a, b[\text{ avec } a < b,]a, +\infty[,]-\infty, a[\text{ avec } a \in \mathbb{R},]a, b[\cup]c, d[\text{ où } a < b < c < d \tag{4.2}$$

Proposition :

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

- Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts.
Montrons que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert.
Soit $a \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Alors il existe $j \in I$ tel que $a \in \Omega_j$. Donc Ω_j est voisinage de a .
Comme $\Omega_j \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in V(a)$.
Donc $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est voisinage de tous ses points. C'est donc un ouvert.
- Soient Ω, Ω' deux ouverts.
Soit $a \in \Omega \cap \Omega'$.
Donc $\Omega \in V(a)$, et $\Omega' \in V(a)$. Donc $\Omega \cap \Omega' \in V(a)$.
C'est valable pour tout $a \in \Omega \cap \Omega'$. Donc $\Omega \cap \Omega'$ est un ouvert.

B) Les fermés

Soit $F \subset \mathbb{K}$. On dit que F est fermée lorsque $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert.

Exemple :

\emptyset est fermé, \mathbb{K} est fermé, les boules fermées sont fermées.

Démonstration (pour les boules fermées) :

Soient $a \in \mathbb{K}, r \in \mathbb{R}_+$.

- Dans \mathbb{R} : facile, $\bar{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.
- Dans \mathbb{K} :
Soit $F = \bar{B}(a, r)$. Soit $b \in C_{\mathbb{K}}F$, c'est-à-dire tel que $|b - a| > r$.
Prenons alors ε tel que $0 < \varepsilon < |b - a| - r$.
Alors $B(b, \varepsilon) \subset C_{\mathbb{K}}F$:
Pour tout $x \in B(b, \varepsilon)$, $|b - a| \leq |b - x| + |x - a|$, soit $|x - a| \geq |b - a| - \underbrace{|b - x|}_{< \varepsilon < |b - a| - r} > r$.
Donc $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert, donc F est fermé.
- Les intervalles fermés de \mathbb{R} sont fermés Les intervalles fermés sont $[a, b]$, où $a < b$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$.

IV Intérieur et adhérence d'une partie

A) Intérieur

Définition :

Soit $A \subset \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est intérieur à A lorsque A est voisinage de a , c'est-à-dire lorsque :
 $\exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset A$.

On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A , appelé « l'intérieur de A ».

Proposition :

$\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A , et c'est le plus grand des ouverts contenus dans A , au sens de l'inclusion.

Démonstration :

- Déjà, il est évident que $\overset{\circ}{A} \subset A$.
- $\overset{\circ}{A}$ est ouvert :
Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.
Soit alors $y \in B(x, \varepsilon)$. Montrons que $y \in \overset{\circ}{A}$:
 $B(x, \varepsilon)$ est ouverte. Elle est donc voisinage de chacun de ses points.
Or, $B(x, \varepsilon) \subset A$. Donc A est voisinage de y , donc $y \in \overset{\circ}{A}$.
Ainsi, $B(x, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.
- Montrons que c'est le plus grand :
Soit Ω un ouvert inclus dans A . Montrons qu'alors $\Omega \subset \overset{\circ}{A}$.
Soit $x \in \Omega$. Ω est ouvert, donc $\Omega \in V(x)$. Mais $\Omega \subset A$. Donc $A \in V(x)$. Donc $x \in \overset{\circ}{A}$. D'où l'inclusion.

Exemple :

- Dans \mathbb{R} , l'intérieur d'un intervalle $]\alpha, \beta[$ où $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ est $]\alpha, \beta[$.
- $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$: si Ω est un ouvert non vide, alors Ω contient un intervalle du type $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Or, cet intervalle contient des irrationnels. Donc $\Omega \not\subset \mathbb{Q}$.
- L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon.

B) Adhérence (dans \mathbb{K}) d'une partie de \mathbb{K}

Définition :

Soient $A \subset \mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est adhérent à A lorsque tout voisinage de a rencontre A , c'est-à-dire lorsque $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \emptyset$.

La définition revient à dire que a est adhérent à A lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

En effet : Si $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \emptyset$, alors « en particulier », $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, puisque les boules ouvertes de centre a et de rayon non nul sont des voisinages de a .

Inversement, tout voisinage de a contient une boule ouverte de centre a .

La définition équivaut aussi à : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, |x - a| < \varepsilon$.

On note $\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des points de A adhérents à A . On l'appelle « l'adhérence de A dans \mathbb{K} ».

Proposition :

$\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ est un fermé qui contient A , et c'est le plus petit des fermés contenant A , au sens de l'inclusion.

Démonstration :

- Déjà, $A \subset \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$, puisque $\forall a \in A, \forall V \in V(a), a \in A \cap V$.
- Soit $\Omega = C_{\mathbb{K}} \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Montrons que Ω est ouvert :
Soit $x \in \Omega$. Montrons que $\Omega \in V(x)$.
Déjà, $x \in \Omega$, donc $x \notin \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Il existe donc $W \in V(x)$ tel que $W \cap A = \emptyset$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset W$.

Alors $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Notons $W' = B(x, \varepsilon)$. Alors W' est un ouvert, et il est inclus dans Ω : pour tout $y \in W'$, on a $W' \in V(y)$ (car W' est ouvert), et de plus ce voisinage ne rencontre pas A , donc $y \notin \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$, c'est-à-dire que $y \in \Omega$. D'où l'inclusion. Donc $\Omega \in V(x)$, donc Ω est ouvert, soit $\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermé.

- C'est le plus petit fermé : soit F un fermé contenant A .

Montrons qu'alors $\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \subset F$.

Soit $x \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Montrons que $x \in F$.

Supposons que $x \notin F$. Ainsi, $x \in C_{\mathbb{K}}F$.

Comme $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert, il existe $V \in V(x)$ tel que $V \subset C_{\mathbb{K}}F$, c'est-à-dire que $V \cap F = \emptyset$. Donc $V \cap A = \emptyset$ (car $A \subset F$), ce qui contredit la définition de x puisque $x \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Donc $x \in F$.

Donc $\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \subset F$.

Exemple :

L'adhérence de $\{a, b\}$ dans \mathbb{R} avec $a, b \in \mathbb{R}$ est $[a, b]$.

L'adhérence dans \mathbb{R} de \mathbb{Q} est \mathbb{R} .

$\text{Adh}_{\mathbb{K}}(B(a, r)) = \bar{B}(a, r)$

V Les suites et le vocabulaire de la topologie

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, soit $l \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } l \iff \forall V \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V \tag{4.3}$$

Démonstration :

\implies : supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Soit $V \in V(l)$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(l, \varepsilon) \subset V$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon) \subset V$

D'où l'implication puisque ce résultat est valable pour tout $V \in V(l)$.

\impliedby : supposons que $\forall V \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $B(l, \varepsilon) \in V(l)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon)$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

D'où l'autre implication.

Proposition :

Définition de l'adhérence avec les suites :

Soit $A \subset \mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$a \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .

Démonstration :

\implies : Soit $a \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. On peut donc choisir $u_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - a| < \frac{1}{n} \quad (4.4)$$

Donc d'après le théorème des gendarmes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers a .

\Leftarrow : Soit $a \in \mathbb{K}$. Supposons qu'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \in B(a, \varepsilon)$.

Comme $u_N \in A$, on a $A \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. Comme le résultat est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $a \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

VI Partie dense dans une autre

Définition :

Soient $A, B \subset \mathbb{K}$, avec $A \subset B$.

On dit que A est dense dans B lorsque $B \subset \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

Ou encore lorsque $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, B(b, \varepsilon) \cap \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$.

Ou quand tout point de B est limite d'une suite d'éléments de A .

Par exemple, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

VII Compléments (dans \mathbb{R})

Définition :

Un voisinage de $+\infty$, c'est une partie de \mathbb{R} qui contient un intervalle du type $]c, +\infty[$, avec $c \in \mathbb{R}$. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de \mathbb{R} qui contient un intervalle du type $] -\infty, c[$.

Définition :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ on dit que $+\infty$ est adhérent à A lorsque tout voisinage de $+\infty$ rencontre A , c'est-à-dire lorsque $\forall V \in V(+\infty), V \cap A \neq \emptyset$, ce qui revient à dire que $\forall c \in \mathbb{R},]c, +\infty[\cap A \neq \emptyset$, ou encore que A n'est pas majorée.

On définit de même pour $-\infty$.

On note $\text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(A)$ l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérents à A .

Exemple :

On note $A =]0, 5[\cup]5, +\infty[$. Alors :

$$\text{Adh}_{\mathbb{R}}(A) = A \cup \{0, 5\}$$

$$\text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = A \cup \{0, 5, +\infty\}$$

Remarque :

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si $\forall V \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$.

$V(+\infty)$ est stable par extension et par intersection finie.

De même pour $-\infty$.